9 класс

Задача 1.1.

Есть 70 литров смеси, в которой доли красной, зелёной и синей красок равняются 20 %, 35 % и 45 % соответственно. Сколько литров красной и зелёной краски нужно добавить, чтобы получилась смесь с 25 % красной, 40 % зелёной и 35 % синей красок? Синюю краску добавлять нельзя.

Ответ: Красной — 8,5 литров, а зелёной — 11,5

Решение. Поскольку синюю краску добавлять нельзя, её количество останется таким же. Отсюда $70 \cdot 0,45 = x \cdot 0,35$, где x — новое общее количество краски. Значит, $x = \frac{70 \cdot 0,45}{0,35} = 90$.

Получаем, что красной краски будет $90 \cdot 0,25 = 22,5$ литров, а зелёной — $90 \cdot 0,4 = 36$. Тогда красной краски надо добавить $22,5 - 70 \cdot 0,2 = 22,5 - 14 = 8,5$ литров, а зелёной краски надо добавить $36 - 70 \cdot 0,35 = 36 - 24,5 = 11,5$ литров. □

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Только одно из введенных чисел верное – 3 балла.

Задача 1.2. Есть 90 литров смеси, в которой доли красной, зелёной и синей красок равняются 25 %, 20 % и 55 % соответственно. Сколько литров красной и зелёной краски нужно добавить, чтобы получилась смесь с 30 % красной, 25 % зелёной и 45 % синей красок? Синюю краску добавлять нельзя.

Ответ: Красной 10,5, а зеленой 9,5

Задача 1.3. Есть 90 литров смеси, в которой доли красной, зелёной и синей красок равняются 35 %, 25 % и 40 % соответственно. Сколько литров красной и зелёной краски нужно добавить, чтобы получилась смесь с 40 % красной, 30 % зелёной и 30 % синей красок? Синюю краску добавлять нельзя.

Ответ: Красной 16,5, а зеленой 13,5

Задача 1.4. Есть 30 литров смеси, в которой доли красной, зелёной и синей красок равняются 35 %, 40 % и 25 % соответственно. Сколько литров красной и зелёной краски нужно добавить, чтобы получилась смесь с 40 % красной, 45 % зелёной и 15 % синей красок? Синюю краску добавлять нельзя.

Ответ: Красной 9,5, а зеленой 10,5

Задача 2.1. В таблице 6×6 отметили несколько клеток. После этого слева от каждой строки написали, сколько свободных клеток от левой границы до первой отмеченной клетки в этой строке свободны. Аналогичные числа записали сверху, справа и снизу. После этого числа снизу, а также отметки в клетках стёрли.

(а) (5 баллов) Восстановите числа, которые были записаны снизу.
(б) (2 балла) Найдите количество отмеченных клеток.

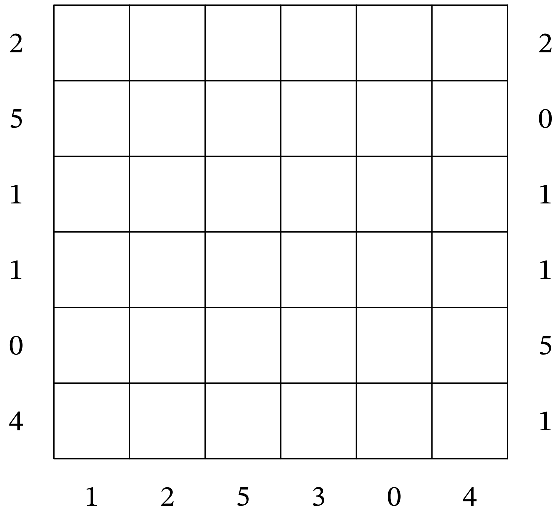

Рис. 1: К задаче 2.1

Ответ: а) 4, 2, 0, 0, 2, 1
б) 10

Решение. Несложно понять, что во второй и пятой строках отмечено только по одной клетке в шестом и первом столбце соответственно. Кроме того, в первой строке отмечена только клетка во втором столбце, а в шестой строке отмечены клетки в третьем и четвёртом столбце.

Осталось разобраться с третьей и четвёртой строками. В них есть отмеченные клетки во втором и пятом столбцах и нет отмеченных клеток в первом и шестом столбцах. Если теперь посмотреть на третий и четвёртый столбцы, то можно понять, что должна быть отмеченная клетка в четвёртой строке и третьем столбце, а остальные клетки центрального квадратика 2×2 должны быть свободными.

Исходя из этого получаем такую картинку:

То есть под нижней строчкой будут написаны 1, 2, 0, 0, 2, 4, а всего будет отмечено 10 клеток.

□

Критерии

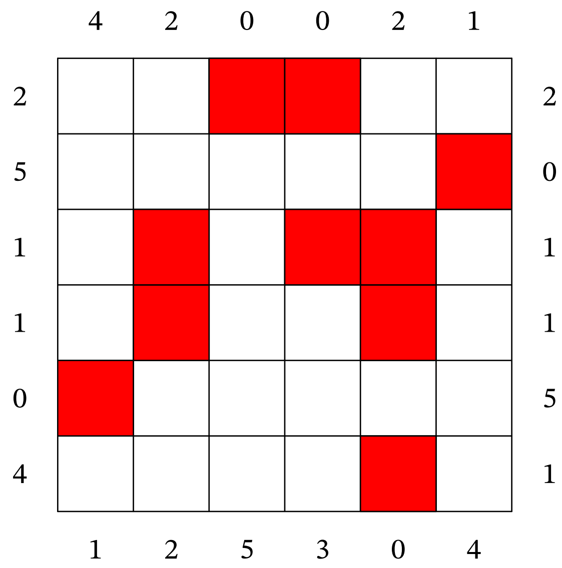

Рис. 2: К решению задачи 2.1

Точное совпадение ответа в пункте а) – 5 баллов.

За каждое неверное число в пункте а) снимается 2 балла.

Точное совпадение ответа в пункте б) – 2 балла.

Задача 2.2. В таблице 6×6 отметили несколько клеток. После этого слева от каждой строки написали, сколько свободных клеток от левой границы до первой отмеченной клетки в этой строке свободны. Аналогичные числа записали сверху, справа и снизу. После этого числа снизу, а также отметки в клетках стёрли.

(а) (5 баллов) Восстановите числа, которые были записаны снизу.
(б) (2 балла) Найдите количество отмеченных клеток.

Ответ: а) 1, 2, 0, 0, 2, 4
б) 10

Задача 2.3. В таблице 6×6 отметили несколько клеток. После этого слева от каждой строки написали, сколько свободных клеток от левой границы до первой отмеченной клетки в этой строке свободны. Аналогичные числа записали сверху, справа и снизу. После этого числа снизу, а также отметки в клетках стёрли.

(а) (5 баллов) Восстановите числа, которые были записаны снизу.
(б) (2 балла) Найдите количество отмеченных клеток.

2							2
0							5
1							1
1							1
5							0
1							4
	4	0	3	5	2	1	

Рис. 3: К задаче 2.2

0							5
4							1
2							2
4							0
1							4
3							2
	5	1	3	0	2	2	

Рис. 4: К задаче 2.3

Ответ: а) 0, 4, 2, 2, 1, 3
б) 8

Задача 2.4. В таблице 6×6 отметили несколько клеток. После этого слева от каждой строки написали, сколько свободных клеток от левой границы до первой отмеченной клетки в этой строке свободны. Аналогичные числа записали сверху, справа и снизу. После этого числа снизу, а также отметки в клетках стёрли.

(а) (5 баллов) Восстановите числа, которые были записаны снизу.
(б) (2 балла) Найдите количество отмеченных клеток.

5							0
1							4
2							2
0							4
4							1
2							3
	2	2	0	3	1	5	

Рис. 5: К задаче 2.4

Ответ: а) $3, 1, 2, 2, 4, 0$
б) 8

Задача 3.1. Два равносторонних треугольника с параллельными сторонами расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что расстояния между параллельными сторонами треугольников равны $\sqrt{3}$. Найдите разность периметров этих треугольников.

Ответ: 18

Решение. Рассмотрим сторону A_1B_1 маленького треугольника и опустим перпендикуляры A_1X и B_1Y на соответствующую сторону AB большого треугольника.

Заметим, что тогда треугольник AA_1X прямоугольный, причем $\angle A_1AX = 30°$. Отсюда следует, что $AX = 3$. Аналогично $BY = 3$. Заметим, что четырехугольник A_1B_1YX является прямоугольником, поэтому $XY = A_1B_1$, что означает, что стороны этих треугольников отличаются на 6, а значит периметры отличаются на 18.

$\square$

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

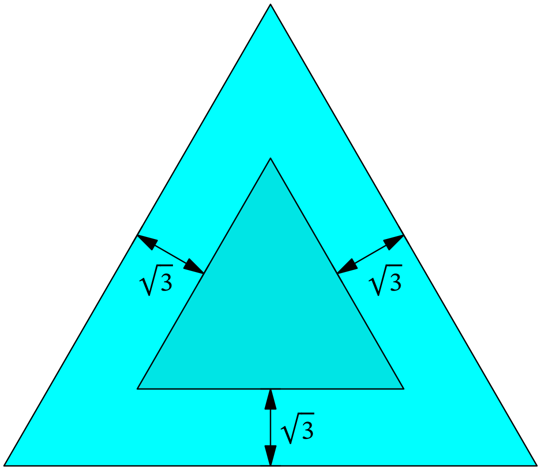

Рис. 6: К задаче 3.1

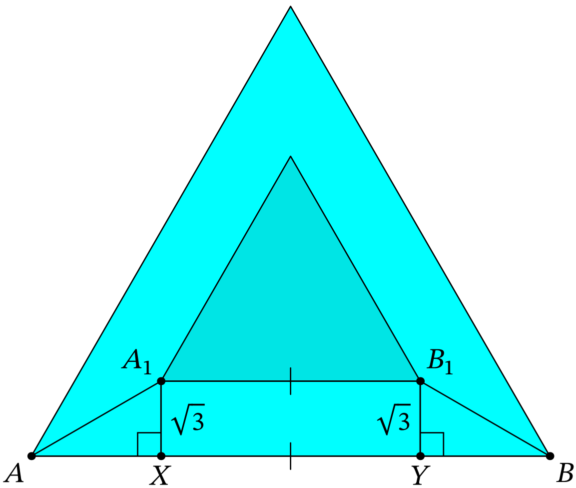

Рис. 7: К решению задачи 3.1

Задача 3.2. Два равносторонних треугольника с параллельными сторонами расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что расстояния между параллельными сторонами треугольников равны $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите разность периметров этих треугольников.

Ответ: 6

Задача 3.3. Два равносторонних треугольника с параллельными сторонами расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что расстояния между параллельными сто-

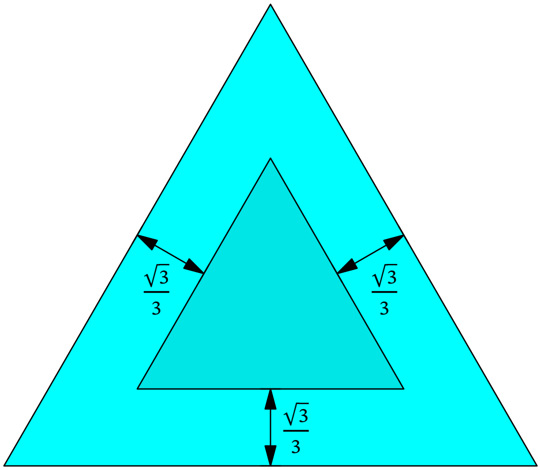

Рис. 8: К задаче 3.2

ронами треугольников равны $3\sqrt{3}$. Найдите разность периметров этих треугольников.

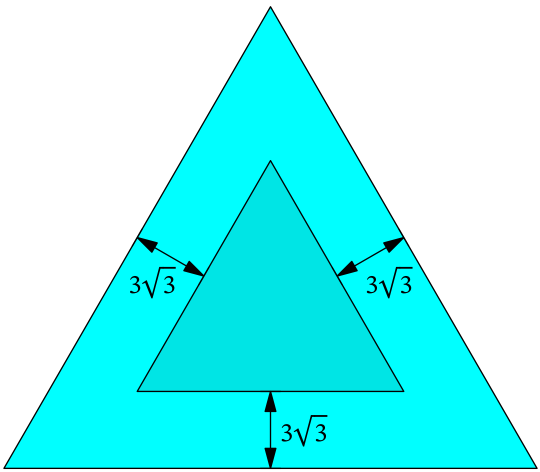

Рис. 9: К задаче 3.3

Ответ: 54

Задача 3.4. Два равносторонних треугольника с параллельными сторонами расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что расстояния между параллельными сторонами треугольников равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите разность периметров этих треугольников.

Ответ: 9

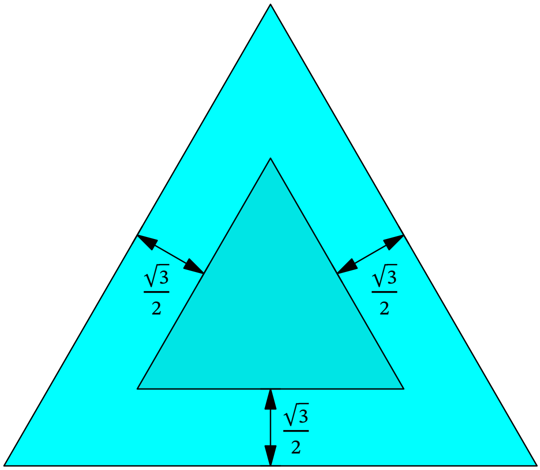

Рис. 10: К задаче 3.4

Задача 4.1. Числа 3, 7, 10, 16, 23 и 31 разбили на три группы по два числа так, что выполняются следующие условия:

- В первой группе оказались только простые числа.
- Во второй группе сумма чисел делится на 3.
- Сумма чисел в третьей группе больше половины от общей суммы.

Какие числа в какой группе?

Ответ: 1: 3, 7
2: 10, 23
3: 16, 31

Решение. Посчитаем сумму всех чисел. Она равна $3+7+10+16+23+31 = 90$. Тогда сумма чисел в третьей группе должна быть больше 45. Значит, это либо $31+16$, либо $31+23$, т.е. 31 точно входит в третью группу.

Заметим, что числа 7, 10 и 16 имеют остаток 1 при делении на 3, число 3 — остаток 0, а число 23 — остаток 2. Значит, во вторую группу должно войти число 23 с одним из чисел 7, 10, 16.

Получаем, что тогда в третьей группе числа 16 и 31, в первой — 3 и 7, а во второй — 10 и 23.

$\square$

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 4.2. Числа 2, 6, 11, 15, 23 и 31 разбили на три группы по два числа так, что выполняются следующие условия:

- В первой группе оказались только простые числа.
- Во второй группе сумма чисел делится на 3.
- Сумма чисел в третьей группе больше половины от общей суммы.

Какие числа в какой группе?

Ответ: 1: 2, 11
2: 6, 15
3: 23, 31

Задача 4.3. Числа 3, 6, 11, 16, 23 и 31 разбили на три группы по два числа так, что выполняются следующие условия:

- В первой группе оказались только простые числа.
- Во второй группе сумма чисел делится на 3.
- Сумма чисел в третьей группе больше половины от общей суммы.

Какие числа в какой группе?

Ответ: 1: 11, 23
2: 3, 6
3: 16, 31

Задача 4.4. Числа 3, 8, 11, 17, 22 и 31 разбили на три группы по два числа так, что выполняются следующие условия:

- В первой группе оказались только простые числа.
- Во второй группе сумма чисел делится на 3.
- Сумма чисел в третьей группе больше половины от общей суммы.

Какие числа в какой группе?

Ответ: 1: 3, 11
2: 8, 22
3: 17, 31

Задача 5.1. Дан треугольник ABC с прямым углом C. Окружность с центром в A, проходящая через C, пересекает гипотенузу в точке E, а окружность с центром в B, проходящая через C, пересекает гипотенузу в точке D. Найдите ED, если $AD = 16, BE = 50$.

Ответ: 40

Решение. Обозначим $x = DE$. По неравенству треугольника $AC + BC > AB$, поэтому точка D находится между A и E, а не наоборот.

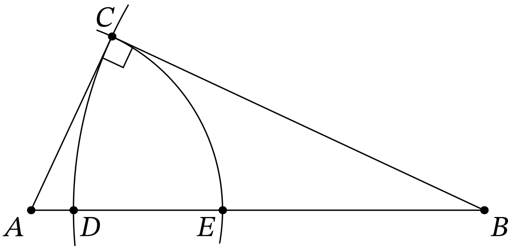

Рис. 11: К решению задачи 5.1

Тогда $AC = AE = 16 + x$, $BC = BD = 50 + x$, а $AB = 16 + x + 50 = 66 + x$. Из теоремы Пифагора получаем уравнение

$$(16 + x)^2 + (50 + x)^2 = (66 + x)^2$$

Преобразовав, получим $256 + 32x + x^2 + 2500 + 100x + x^2 = 4356 + 132x + x^2$, откуда $x^2 = 4356 - 256 - 2500 = 1600$, т.е. $DE = x = 40$. □

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 5.2. Дан треугольник ABC с прямым углом C. Окружность с центром в A, проходящая через C, пересекает гипотенузу в точке E, а окружность с центром в B, проходящая через C, пересекает гипотенузу в точке D. Найдите ED, если $AD = 12, BE = 54$.

Ответ: 36

Задача 5.3. Дан треугольник ABC с прямым углом C. Окружность с центром в A, проходящая через C, пересекает гипотенузу в точке E, а окружность с центром в B, проходящая через C, пересекает гипотенузу в точке D. Найдите ED, если $AD = 15, BE = 30$.

Ответ: 30

Задача 5.4. Дан треугольник ABC с прямым углом C. Окружность с центром в A, проходящая через C, пересекает гипотенузу в точке E, а окружность с центром в B, проходящая через C, пересекает гипотенузу в точке D. Найдите ED, если $AD = 14, BE = 112$.

Ответ: 56

Задача 6.1.

В квадрате 5×5 расставили натуральные числа от 1 до 25, каждое по одному разу, так, что суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей совпали. Оказалось, что в центре стоит число 18. Чему может быть равна сумма чисел в отмеченных клетках?

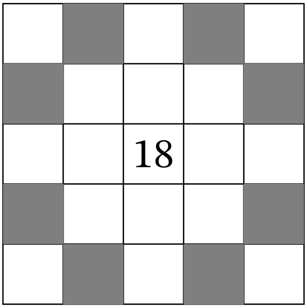

Рис. 12: К задаче 6.1

Ответ: 119.

Решение. Сумма всех чисел в таблице равняется

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 25 = \frac{25 \cdot 26}{2} = 325.$$

Так как суммы чисел во всех рядах равны, то эти суммы равняются $325/5 = 65$. Обозначим через A сумму всех чисел в неотмеченных клетках. Просуммируем центральную строку, центральный столбец и две диагонали. С одной стороны, полученная сумма равняется $65 \cdot 4 = 260$. С другой стороны, центральная клетка была подсчитана 4 раза, а остальные неотмеченные — по одному разу. Следовательно, $A + 3 \cdot 18 = 260$, откуда $A = 260 - 54 = 206$. А сумма в отмеченных клетках равняется $325 - 206 = 119$. □

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 6.2.

В квадрате 5×5 расставили натуральные числа от 1 до 25, каждое по одному разу, так, что суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей совпали. Оказалось, что в центре стоит число 17. Чему может быть равна сумма чисел в отмеченных клетках?

Ответ: 116.

Задача 6.3.

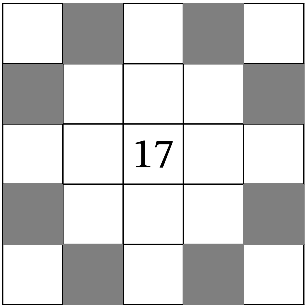

Рис. 13: К задаче 6.2

В квадрате 5×5 расставили натуральные числа от 1 до 25, каждое по одному разу, так, что суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей совпали. Оказалось, что в центре стоит число 8. Чему может быть равна сумма чисел в отмеченных клетках?

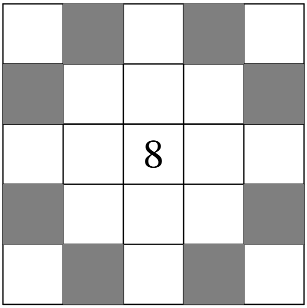

Рис. 14: К задаче 6.3

Ответ: 89.

Задача 6.4.

В квадрате 5×5 расставили натуральные числа от 1 до 25, каждое по одному разу, так, что суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей совпали. Оказалось, что в центре стоит число 9. Чему может быть равна сумма чисел в отмеченных клетках?

Ответ: 92.

Задача 7.1. Натуральные числа a, b таковы, что число $\frac{7a+9b}{a+3b}$ — тоже натуральное. Чему может быть равно отношение $\frac{a}{b}$? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

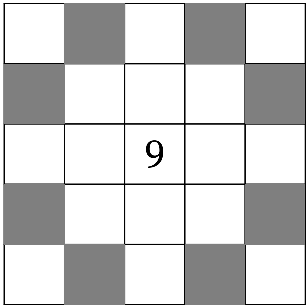

Рис. 15: К задаче 6.4

Ответ: $1; 3; 9$

Решение. Заметим, что

$$3 = \frac{3a+9b}{a+3b} < \frac{7a+9b}{a+3b} < \frac{7a+21b}{a+3b} = 7.$$

Таким образом, $\frac{7a+9b}{a+3b}$ — натуральное число, большее 3 и меньшее 7. Таких чисел ровно 3.

1. $\frac{7a+9b}{a+3b} = 4$, $7a + 9b = 4a + 12b$, $3a = 3b$, $\frac{a}{b} = 1$. Достигается при $a = b = 1$.
2. $\frac{7a+9b}{a+3b} = 5$, $7a + 9b = 5a + 15b$, $2a = 6b$, $\frac{a}{b} = 3$. Достигается при $a = 3, b = 1$.
3. $\frac{7a+9b}{a+3b} = 6$, $7a + 9b = 6a + 18b$, $a = 9b$, $\frac{a}{b} = 9$. Достигается при $a = 9, b = 1$.

□

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 7.2. Натуральные числа a, b таковы, что число $\frac{9a+10b}{a+2b}$ — тоже натуральное. Чему может быть равно отношение $\frac{a}{b}$? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: $2/3; 2; 6$

Задача 7.3. Натуральные числа a, b таковы, что число $\frac{9a+20b}{a+4b}$ — тоже натуральное. Чему может быть равно отношение $\frac{a}{b}$? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: $4/3; 4; 12$

Задача 7.4. Натуральные числа a, b таковы, что число $\frac{7a+15b}{a+5b}$ — тоже натуральное. Чему может быть равно отношение $\frac{a}{b}$? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 5/3; 5; 15

Задача 8.1. На квалификационное соревнование, по результатам которого отбираются участники на областной чемпионат, подали заявки 80 команд. Отбор происходит по следующей схеме.

У каждой команды есть некоторый счёт побед и поражений (изначально $0-0$). В каждом матче принимают участие две команды с одинаковым текущим счётом, и одна из них побеждает, а другая проигрывает (ничьих не бывает). Если команда набирает 3 поражения, она выбывает из отбора. Если команда набирает 3 победы, она выходит в основную часть и тоже прекращает участие квалификационном соревновании. Турнир оканчивается, когда судьба каждой команды будет определена.

(а) (1 балл) Сколько команд попадёт на областной чемпионат?

(б) (6 баллов) Сколько будет сыграно матчей?

Ответ: а) 40, б) 165

Решение. Поскольку в каждом матче принимают участие команды с одинаковым счётом, то у них и одинаковое количество сыгранных матчей. Значит, можно считать, что соревнование проходит в 5 раундов, причём в каждом раунде принимают участие все оставшиеся команды.

Посчитаем, сколько будет команд с каким счётом после каждого раунда.

После первого раунда у 40 команд будет счёт $1-0$, у ещё 40 команд счёт $0-1$. Сыграно 40 матчей.

Во втором раунде половина из первых 40 команд выиграет, а половина проиграет. Значит, из них будет 20 команд со счётом $2-0$ и 20 со счётом $1-1$. Аналогично, среди вторых 40 команд будет 20 команд со счётом $1-1$ и 20 команд со счётом $0-2$. Всего будет сыграно по-прежнему 40 матчей.

После третьего раунда будет 10 команд со счётом $3-0$, ещё $10+20=30$ команд со счётом $2-1$, ещё $20+10=30$ команд со счётом $1-2$ и 10 команд со счётом $0-3$. Сыграно ещё 40 матчей. Далее команды со счётом $3-0$ и $0-3$ уже не участвуют.

После 4 раунда будет 15 команд со счётом $3-1$, $15+15=30$ команд со счётом $2-2$ и 15 команд со счётом $1-3$. Сыграно 30 матчей и команды со счётом $3-1$ и $1-3$ дальше не играют.

Далее играют только 30 команд со счётом $2-2$, из которых у 15 будет счёт $3-2$, а у 15 счёт $2-3$. Тут 15 матчей.

Получаем, что на областной чемпионат попадёт $10 + 15 + 15 = 40$ команд. При этом всего будет сыграно $40 + 40 + 40 + 30 + 15 = 165$ матчей.

□

Критерии

Точное совпадение ответа в пункте а) – 1 балл.

Точное совпадение ответа в пункте б) – 6 баллов.

Задача 8.2. На квалификационное соревнование, по результатам которого отбираются участники на областной чемпионат, подали заявки 112 команд. Отбор происходит по следующей схеме.

У каждой команды есть некоторый счёт побед и поражений (изначально $0 - 0$). В каждом матче принимают участие две команды с одинаковым текущим счётом, и одна из них побеждает, а другая проигрывает (ничьих не бывает). Если команда набирает 3 поражения, она выбывает из отбора. Если команда набирает 3 победы, она выходит в основную часть и тоже прекращает участие квалификационном соревновании. Турнир оканчивается, когда судьба каждой команды будет определена.

(а) (1 балл) Сколько команд попадёт на областной чемпионат?

(б) (6 баллов) Сколько будет сыграно матчей?

Ответ: а) 56, б) 231

Задача 8.3. На квалификационное соревнование, по результатам которого отбираются участники на областной чемпионат, подали заявки 96 команд. Отбор происходит по следующей схеме.

У каждой команды есть некоторый счёт побед и поражений (изначально $0 - 0$). В каждом матче принимают участие две команды с одинаковым текущим счётом, и одна из них побеждает, а другая проигрывает (ничьих не бывает). Если команда набирает 3 поражения, она выбывает из отбора. Если команда набирает 3 победы, она выходит в основную часть и тоже прекращает участие квалификационном соревновании. Турнир оканчивается, когда судьба каждой команды будет определена.

(а) (1 балл) Сколько команд попадёт на областной чемпионат?

(б) (6 баллов) Сколько будет сыграно матчей?

Ответ: а) 48, б) 198

Задача 8.4. На квалификационное соревнование, по результатам которого отбираются участники на областной чемпионат, подали заявки 128 команд. Отбор происходит по следующей схеме.

У каждой команды есть некоторый счёт побед и поражений (изначально 0 – 0). В каждом матче принимают участие две команды с одинаковым текущим счётом, и одна из них побеждает, а другая проигрывает (ничьих не бывает). Если команда набирает 3 поражения, она выбывает из отбора. Если команда набирает 3 победы, она выходит в основную часть и тоже прекращает участие квалификационном соревновании. Турнир оканчивается, когда судьба каждой команды будет определена.

(а) (1 балл) Сколько команд попадёт на областной чемпионат?

(б) (6 баллов) Сколько будет сыграно матчей?

Ответ: а) 64, б) 264