11 класс

Задача 1.1. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, такая, что

$$a_1 + a_2 = 9,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 = 108.$$

Найдите a_1 и разность этой арифметической прогрессии.

Ответ: 3 и 3

Решение. Обозначим через d разность арифметической прогрессии. Тогда верны равенства $a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + d) = 2a_1 + d$ и

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_8 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + 7d) = 8a_1 + 28d.$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} 2a_1 + d = 9; \\ 8a_1 + 28d = 108. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на 4 получаем систему

$$\begin{cases} 2a_1 + d = 9; \\ 2a_1 + 7d = 27. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем равенство $6d = 18$, откуда $d = 3$. Наконец, подставляя это в изначальную систему, получаем что $a_1 = 3$.

□

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 1.2. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, такая, что

$$a_1 + a_2 = 10,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 = 88.$$

Найдите a_1 и разность этой арифметической прогрессии.

Ответ: 4 и 2

Задача 1.3. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, такая, что

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 11, \\ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 &= 164. \end{aligned}$$

Найдите a_1 и разность этой арифметической прогрессии.

Ответ: 3 и 5

Задача 1.4. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, такая, что

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 14, \\ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 &= 104. \end{aligned}$$

Найдите a_1 и разность этой арифметической прогрессии.

Ответ: 6 и 2

Задача 2.1. У Вити есть четыре карточки, на которых написаны числа 3, 5, 7, 8. Он случайным образом составляет из них число вида $\overline{ab}^{\overline{cd}}$. С какой вероятностью это число делится на 3?

Выражение $\overline{ab}$ обозначает двухзначное число, состоящее из цифр a и b.

Ответ: 1/3

Решение. Число $\overline{ab}^{\overline{cd}}$ делится на 3 тогда и только тогда, когда основание $\overline{ab}$ делится на 3. По признаку делимости на 3 число $\overline{ab}$ делится на 3 тогда и только тогда, когда $a + b$ делится на 3.

Всего есть 12 способов выбрать a и b, все они равновероятны, и из них подходят 4: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$. Поэтому искомая вероятность равняется $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. □

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 2.2. У Вити есть четыре карточки, на которых написаны числа 1, 2, 4, 7. Он случайным образом составляет из них число вида $\overline{ab}^{\overline{cd}}$. С какой вероятностью это число делится на 3?

Выражение $\overline{ab}$ обозначает двухзначное число, состоящее из цифр a и b.

Ответ: 1/2

Задача 2.2. У Вити есть четыре карточки, на которых написаны числа 1, 2, 4, 5. Он случайным образом составляет из них число вида $\overline{ab}^{\overline{cd}}$. С какой вероятностью это число делится на 3?

Выражение $\overline{ab}$ обозначает двухзначное число, состоящее из цифр a и b.

Ответ: 2/3

Задача 2.4. У Вити есть четыре карточки, на которых написаны числа 1, 3, 4, 6. Он случайным образом составляет из них число вида $\overline{ab}^{\overline{cd}}$. С какой вероятностью это число делится на 3?

Выражение $\overline{ab}$ обозначает двухзначное число, состоящее из цифр a и b.

Ответ: 1/6

Задача 3.1. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ отметили точку E — пересечение лучей AD и BC и точку F — пересечение лучей AB и DC. Оказалось, что $CD = DE$, $\angle AEB = 51°$ и угловые меры дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ находятся в соотношении 2 : 5.

(а) (4 балла) Найдите угол AFD. Ответ выразите в градусах.

(б) (3 балла) Найдите величину меньшей дуги $\overset{\frown}{BC}$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: **а)** 27
б) 36

Решение. **(а)** Поскольку четырехугольник AB вписанный, то $\angle DCE = \angle EAB = 51°$. Поскольку $CD = DE$, то и $\angle DEC = 51°$. Тогда $\angle ADF$, как внешний в треугольнике CDE, равен $\angle DCE + \angle CED = 102°$. И, наконец, $\angle AFD = 180° - 51° - 102° = 27°$.

(б) Поскольку угловые меры дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ находятся в соотношении 2 : 5, обозначим их $2x$ и $5x$ соответственно. Как известно, $\angle AFD = \frac{5x-2x}{2} = \frac{3x}{2} = 27°$, откуда $x = 18°$. Тогда дуга BC равна $2x$, что равняется 36°. □

Критерии

Точное совпадение ответа в пункте а) – 4 балла.

Точное совпадение ответа в пункте б) – 3 балла.

Задача 3.2. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ отметили точку E — пересечение лучей AD и BC — и точку F — пересечение лучей AB и DC. Оказалось, что $CD = DE$, $\angle AEB = 53°$ и угловые меры дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ находятся в соотношении 1 : 4.

(а) (4 балла) Найдите угол AFD. Ответ выразите в градусах.

(б) (3 балла) Найдите величину меньшей дуги $\overset{\frown}{BC}$. Ответ выразите в градусах.

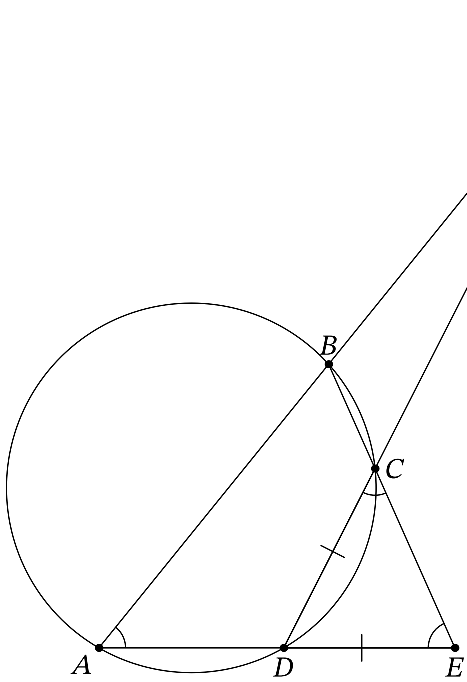

Рис. 1: К решению задачи 3.1

Ответ: **а)** 21
б) 14

Задача 3.3. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ отметили точку E — пересечение лучей AD и BC — и точку F — пересечение лучей AB и DC. Оказалось, что $CD = DE$, $\angle AEB = 48°$ и угловые меры дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ находятся в соотношении $3:7$.

(а) (4 балла) Найдите угол AFD. Ответ выразите в градусах.

(б) (3 балла) Найдите величину меньшей дуги $\overset{\frown}{BC}$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: **а)** 36
б) 54

Задача 3.4. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ отметили точку E — пересечение лучей AD и BC — и точку F — пересечение лучей AB и DC. Оказалось, что $CD = DE$, $\angle AEB = 52°$ и угловые меры дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ находятся в соотношении $1:4$.

(а) (4 балла) Найдите угол AFD. Ответ выразите в градусах.

(б) (3 балла) Найдите величину меньшей дуги $\overset{\frown}{BC}$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: **а)** 24
б) 16

Задача 4.1. Найдите количество пар различных натуральных чисел a, b, таких, что $1 \leqslant a < b \leqslant 100$ и
$$\lfloor\sqrt{a}\rfloor + \lceil\sqrt{b}\rceil = \lceil\sqrt{a}\rceil + \lfloor\sqrt{b}\rfloor.$$

Напомним, что $\lfloor x\rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное x, а $\lceil x\rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x.

Ответ: 4050

Решение. Перепишем условие:
$$\lceil\sqrt{b}\rceil - \lfloor\sqrt{b}\rfloor = \lceil\sqrt{a}\rceil - \lfloor\sqrt{a}\rfloor.$$

Заметим, что
$$\lceil\sqrt{a}\rceil - \lfloor\sqrt{a}\rfloor = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ является точным квадратом,} \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому равенство из условия равносильно тому, что числа a и b либо одновременно являются, либо одновременно не являются точными квадратами. От 1 до 100 есть ровно 10 точных квадратов, поэтому два точных квадрата можно выбрать $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ способами, а два не точных квадрата — $\frac{90\cdot 89}{2} = 4005$ способами. Следовательно, всего есть $45 + 4005 = 4050$ подходящих пар (a, b). □

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 балла.

Задача 4.2. Найдите количество пар различных натуральных чисел a, b, таких, что $1 \leqslant a < b \leqslant 81$ и
$$\lfloor\sqrt{a}\rfloor + \lceil\sqrt{b}\rceil = \lceil\sqrt{a}\rceil + \lfloor\sqrt{b}\rfloor.$$

Напомним, что $\lfloor x\rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное x, а $\lceil x\rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x.

Ответ: 2592

Задача 4.3. Найдите количество пар различных натуральных чисел a, b, таких, что $1 \leqslant a < b \leqslant 144$ и
$$\lfloor\sqrt{a}\rfloor + \lceil\sqrt{b}\rceil = \lceil\sqrt{a}\rceil + \lfloor\sqrt{b}\rfloor.$$

Напомним, что $\lfloor x\rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное x, а $\lceil x\rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x.

Ответ: 8712

Задача 4.4. Найдите количество пар различных натуральных чисел a, b, таких, что $1 \leqslant a < b \leqslant 64$ и

$$\lfloor\sqrt{a}\rfloor + \lceil\sqrt{b}\rceil = \lceil\sqrt{a}\rceil + \lfloor\sqrt{b}\rfloor.$$

Напомним, что $\lfloor x\rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное x, а $\lceil x\rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x.

Ответ: 1568

Задача 5.1. Дана колода из 300 карт, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до 300 (каждое число встречается по одному разу). Петя раскладывает пасьянс. Для этого Петя выкладывает карты в прямоугольник 3×100 (3 строки, 100 столбцов) так, что числа на картах в каждом столбце возрастают сверху вниз, а также любое число в нижней строке больше любого числа в верхней строке. *Удачностью* пасьянса называется сумма всех чисел на карточках в верхней и нижней строках. Какой максимальной удачности пасьянс может выложить Петя?

Ответ: 35050

Решение. Пример. Расставим карточки следующим образом:

1	3	5	...	199
2	4	6	...	200
201	202	203	...	300

Тогда сумма чисел на карточках в верхней строке равна

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 199 = \frac{100 \cdot (1 + 199)}{2} = 10000,$$

а в нижней

$$201 + 202 + 203 + \ldots + 300 = \frac{100 \cdot (201 + 300)}{2} = 25050.$$

Итого $10000 + 25050 = 35050$.

Оценка. Заметим, что в нижнем ряду сумма карточек не больше, чем сумма 100 максимальных карточек, которая равна $201+202+203+\ldots+300 = 25050$. Теперь оценим сумму в верхнем ряду. Упорядочим карточек в верхнем ряду. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$ — числа записанные в верхнем ряду, а $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ — числа, записанные сразу под $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ соответственно. Из условия a_{100} меньше всех 100 карточек в нижнем ряду, а также меньше b_{100}. Следовательно, $a_{100} \leqslant 199$. Далее, a_{99} меньше всех 100 карточек в нижнем ряду, а также карточек a_{100}, b_{99}, b_{100}. Следовательно, $a_{100} \leqslant 197$. Аналогично, карточка a_i меньше всех 100 карточек в нижнем ряду, а также карточек $a_{i+1}, \ldots, a_{100}, b_i, \ldots, b_{100}$, откуда $a_i \leqslant 2i - 1$. Просуммировав полученные неравенства, получим, что сумма карточек в верхнем ряду не больше $1 + 3 + 5 + \ldots + 199 = 10000$, и общая сумма не больше $10000 + 25050 = 35050$. □

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 балла.

Задача 5.2. Дана колода из 600 карт, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до 600 (каждое число встречается по одному разу). Петя раскладывает пасьянс. Для этого Петя выкладывает карты в прямоугольник 3×200 (3 строки, 200 столбцов) так, что числа на картах в каждом столбце возрастают сверху вниз, а также любое число в нижней строке больше любого числа в верхней строке. *Удачностью* пасьянса называется сумма всех чисел на карточках в верхней и нижней строках. Какой максимальной удачности пасьянс может выложить Петя?

Ответ: 140100

Задача 5.3. Дана колода из 900 карт, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до 900 (каждое число встречается по одному разу). Петя раскладывает пасьянс. Для этого Петя выкладывает карты в прямоугольник 3×300 (3 строки, 300 столбцов) так, что числа на картах в каждом столбце возрастают сверху вниз, а также любое число в нижней строке больше любого числа в верхней строке. *Удачностью* пасьянса называется сумма всех чисел на карточках в верхней и нижней строках. Какой максимальной удачности пасьянс может выложить Петя?

Ответ: 315150

Задача 5.4. Дана колода из 1200 карт, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до 1200 (каждое число встречается по одному разу). Петя раскладывает пасьянс. Для этого Петя выкладывает карты в прямоугольник 3×400 (3 строки, 400 столбцов) так, что числа на картах в каждом столбце возрастают сверху вниз, а также любое число в нижней строке больше любого числа в верхней строке. *Удачностью* пасьянса называется сумма всех чисел на карточках в верхней и нижней строках. Какой максимальной удачности пасьянс может выложить Петя?

Ответ: 560200

Задача 6.1. Толя задумал два квадратных трёхчлена. Оказалось, что первый трёхчлен имеет корни 1 и 2, а один из двух корней второго трёхчлена равен -5. Также известно, что графики трёхчленов пересекаются в двух точках: одна из них имеет координаты $(3, 4)$, а вторая — лежит на оси ординат.

(а) (2 балла) Найдите ординату второй точки пересечения графиков.
(б) (5 баллов) Найдите произведение корней второго трёхчлена.

Ответ: а) 4
б) -40

Решение. Так как первый квадратный трёхчлен имеет корни 1 и 2, то вершина соответствующей параболы лежит на прямой $x = \frac{3}{2}$, и весь график трёхчлена симметричен относительно прямой $x = \frac{3}{2}$. Так как по условию точка $(3, 4)$ лежит на параболе, то и симметричная ей точка $(0, 4)$ тоже лежит на параболе. Полученная точка лежит на оси ординат и является искомой, её ордината равна 4.

На графике второго трёхчлена лежат точки $(3, 4)$ и $(0, 4)$, поэтому он также симметричен относительно прямой $x = \frac{3}{2}$. Так по условию точка $(-5, 0)$ лежит на графике, то и симметричная ей точка $(8, 0)$ тоже лежит на графике. Таким образом, -5 и 8 — корни второго трёхчлена, их произведение равно -40. □

Критерии

Точное совпадение ответа в пункте а) – 2 балла.

Точное совпадение ответа в пункте б) – 5 баллов.

Задача 6.2. Толя задумал два квадратных трёхчлена. Оказалось, что первый трёхчлен имеет корни 1 и 3, а один из двух корней второго трёхчлена равен -5. Также известно, что графики трёхчленов пересекаются в двух точках: одна из них имеет координаты $(4, 6)$, а вторая — лежит на оси ординат.

(а) (2 балла) Найдите ординату второй точки пересечения графиков.
(б) (5 баллов) Найдите произведение корней второго трёхчлена.

Ответ: а) 6
б) -45

Задача 6.3. Толя задумал два квадратных трёхчлена. Оказалось, что первый трёхчлен имеет корни 2 и 4, а один из двух корней второго трёхчлена равен -3. Также известно, что графики трёхчленов пересекаются в двух точках: одна из них имеет координаты $(6, 7)$, а вторая — лежит на оси ординат.

(а) (2 балла) Найдите ординату второй точки пересечения графиков.
(б) (5 баллов) Найдите произведение корней второго трёхчлена.

Ответ: а)7
б) -27

Задача 6.4. Толя задумал два квадратных трёхчлена. Оказалось, что первый трёхчлен имеет корни 1 и 4, а один из двух корней второго трёхчлена равен -4. Также известно, что графики трёхчленов пересекаются в двух точках: одна из них имеет координаты $(5, 8)$, а вторая — лежит на оси ординат.

(а) (2 балла) Найдите ординату второй точки пересечения графиков.
(б) (5 баллов) Найдите произведение корней второго трёхчлена.

Ответ: а) 8
б) -36

Задача 7.1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь треугольника BCC_1 равна 1, треугольника ACC_1 — 34.

(а) (2 балла) Пусть S — площадь треугольника CDC_1. Найдите S^2.

(б) (5 баллов) Оказалось, что площадь треугольника ABC_1 равна 46. Чему равна площадь треугольника ABC?

Ответ: а) 1155
б) 31

Решение. Пусть рёбра, параллельные AB, равны a, рёбра, параллельные AD, равны b, а рёбра, параллельные AA_1 равны c. Так как треугольник BCC_1 прямоугольный, то его площадь равна $\frac{bc}{2}$ и равна 1, откуда следует что $b^2c^2 = 4$. Заметим, что треугольник ACC_1 также прямоугольный ($\angle ACC_1 = 90°$), так что его площадь равна $\frac{1}{2}AC \cdot CC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}c = 34$, откуда $(a^2+b^2)c^2 = (2\cdot 34)^2 = 4624$.

(а) Треугольник CDC_1 также прямоугольный, поэтому квадрат его площади равен

$$\left(\frac{1}{2}ac\right)^2 = \frac{a^2c^2}{4} = \frac{(a^2+b^2)c^2 - b^2c^2}{4} = \frac{4624-4}{4} = \frac{4620}{4} = 1155.$$

(б) Треугольник ABC_1 также прямоугольный ($\angle ABC_1 = 90°$), откуда получаем, что $\frac{1}{2}AB \cdot BC_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2+c^2} = 46$, а значит $(b^2+c^2)a^2 = (2\cdot 46)^2 = 8464$. Отсюда получаем, что

$$a^2b^2 = (b^2+c^2)a^2 - a^2c^2 = 8464 - 4\cdot 1155 = 3844.$$

Площадь прямоугольного треугольника ABC равна

$$\frac{1}{2}ac = \sqrt{\frac{a^2c^2}{4}} = \sqrt{\frac{3844}{4}} = \sqrt{961} = 31.$$

□

Критерии

Точное совпадение ответа в пункте а) – 2 балла.

Точное совпадение ответа в пункте б) – 5 баллов.

Задача 7.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь треугольника BCC_1 равна 2, треугольника ACC_1 — 37.

(а) (2 балла) Пусть S — площадь треугольника CDC_1. Найдите S^2.

(б) (5 баллов) Оказалось, что площадь треугольника ABC_1 равна 43. Чему равна площадь треугольника ABC?

Ответ: а) 1365
б) 22

Задача 7.3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь треугольника BCC_1 равна 4, треугольника ACC_1 — 17.

(а) (2 балла) Пусть S — площадь треугольника CDC_1. Найдите S^2.

(б) (5 баллов) Оказалось, что площадь треугольника ABC_1 равна 23. Чему равна площадь треугольника ABC?

Ответ: а) 273
б) 16

Задача 7.4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь треугольника BCC_1 равна 12, треугольника ACC_1 — 24.

(а) (2 балла) Пусть S — площадь треугольника CDC_1. Найдите S^2.

(б) (5 баллов) Оказалось, что площадь треугольника ABC_1 равна 31. Чему равна площадь треугольника ABC?

Ответ: а) 432
б) 23

Задача 8.1. Каждый день в 8:00 Петя выписывает на доску букву «a», «b» или «c». Затем каждую минуту он делает одно из следующих действий:

- Приписывает сразу после буквы «a» букву «c»;
- Приписывает сразу перед буквой «b» букву «c»;
- Приписывает сразу после буквы «c» ещё одну букву «c»;
- Стирает букву «c» и вписывает на том же месте комбинацию «ba».

Через 9 минут, получив последовательность из 10 букв, Петя останавливается. Сколько различных последовательностей из 10 букв, в которых ровно 2 буквы «c», может получить Петя?

Ответ: 15.

Решение. Заметим, что чётность суммарного числа букв «a» и «b» при действиях не меняется. А так как Петя ищет последовательности букв, в которых суммарно 8 букв «a» и «b», то и начинать нужно с последовательностей букв, в которых суммарно «a» и «b» чётно. Такая последовательность ровно одна — «c».

Заменим каждую букву «c» на последовательность «ba». Заметим, что все получаемые слова будут иметь вид «baba…ba». Действительно, последнее действие не изменяет слово, первая и третья — приписывает «ba» сразу после «a», а вторая — приписывает «ba» сразу перед «b».

Следовательно, после замены в конце будет последовательность «baba ...ba» из 12 букв. Из скольки изначальных слов могло получиться «baba...ba»? После замены есть 6 букв «b», из которых 2 получились заменой «c» на «ba». Выбрать 2 буквы из 6 можно $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ способами, поэтому таких слов 15.

Проверим, что все 15 слов могут быть получены. Сначала проделаем 5 раз третье действие, и получим слово «cccccc». Затем выберем две буквы «c» и оставим их, а каждую из остальныех четырёх заменим на «ab». Получим 15 различных слов, удовлетворяющих условию.

□

Критерии

Точное совпадение ответа – 7 баллов.

Задача 8.2. Каждый день в 8:00 Петя выписывает на доску букву «a», «b» или «c». Затем каждую минуту он делает одно из следующих действий:

- Приписывает сразу после буквы «a» букву «c»;
- Приписывает сразу перед буквой «b» букву «c»;
- Приписывает сразу после буквы «c» ещё одну букву «c»;
- Стирает букву «c» и вписывает на том же месте комбинацию «ba».

Через 11 минут, получив последовательность из 12 букв, Петя останавливается. Сколько различных последовательностей из 12 букв, в которых ровно 2 буквы «c», может получить Петя?

Ответ: 21.

Задача 8.3. Каждый день в 8:00 Петя выписывает на доску букву «a», «b» или «c». Затем каждую минуту он делает одно из следующих действий:

- Приписывает сразу после буквы «a» букву «c»;
- Приписывает сразу перед буквой «b» букву «c»;
- Приписывает сразу после буквы «c» ещё одну букву «c»;
- Стирает букву «c» и вписывает на том же месте комбинацию «ba».

Через 13 минут, получив последовательность из 14 букв, Петя останавливается. Сколько различных последовательностей из 14 букв, в которых ровно 2 буквы «c», может получить Петя?

Ответ: 28.

Задача 8.4. Каждый день в 8:00 Петя выписывает на доску букву «a», «b» или «c». Затем каждую минуту он делает одно из следующих действий:

- Приписывает сразу после буквы «a» букву «c»;
- Приписывает сразу перед буквой «b» букву «c»;
- Приписывает сразу после буквы «c» ещё одну букву «c»;
- Стирает букву «c» и вписывает на том же месте комбинацию «ba».

Через 15 минут, получив последовательность из 16 букв, Петя останавливается. Сколько различных последовательностей из 16 букв, в которых ровно 2 буквы «c», может получить Петя?

Ответ: 36.