

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 112

Задание 1. Пусть $k \geq 2$ — целое число. Будем говорить, что две точки на числовой прямой дружат, если разность их координат делится на k . Непустое множество точек назовём кластером, если любые две точки в этом множестве дружат, и к нему нельзя добавить ни одной точки, чтобы это свойство сохранилось.

При каких целых $k \geq 2$ точки числовой прямой с координатами

$$1, 7, 21, 22, 28, 42, 43, 49, 63$$

можно разбить на два кластера?

Ответ: 2, 3, 7

Критерий оценивания: Точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

Рассмотрим числа 21, 22, 28. Если всё множество разбивается ровно на два кластера, то среди этих трёх хотя бы два лежат в одном кластере, значит разность одной из пар делится на k . Возможные разности: 1, 6, 7. Так как $k \geq 2$, имеем

$$k \mid 6 \quad \text{или} \quad k \mid 7,$$

то есть кандидатами остаются $k \in \{2, 3, 6, 7\}$.

Проверка:

- $k = 2$: все числа чётные или нечётные $\Rightarrow$ два кластера.
- $k = 3$: все числа дают остаток 0 или 1 $\Rightarrow$ два кластера.
- $k = 7$: все числа дают остаток 0 или 1 $\Rightarrow$ два кластера.
- $k = 6$: уже числа $42 \equiv 0, 1 \equiv 1, 21 \equiv 3, 22 \equiv 4 \pmod{6}$ дают четыре разных остатка $\Rightarrow$ не два кластера.

Итак, подходит только $k = 2, 3, 7$.

Задание 2. Петя загадал два натуральных числа a и b . Вася пытается их отгадать, задавая вопросы. Вопрос Васи состоит в том, что он называет два натуральных числа x и y . В ответ на вопрос Петя сообщает два числа $z < t$, одно из которых равно $ax + by$ (какое именно — не говорит).

Вася задал два вопроса: для $x = 4$ и $y = 1$ Петя ответил 14 и 15; для $x = 1$ и $y = 4$ Петя ответил 9 и 11. Какие числа загадал Петя?

Ответ: $a = 3, b = 2$

Критерий оценивания: Точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

Заметим: в обоих вопросах $x + y = 5$. Значит верные ответы на два вопроса (по одному из каждой пары) в сумме дают

$$(ax + by) + (ax' + by') = a(x + x') + b(y + y') = 5(a + b),$$

то есть их сумма делится на 5.

Из пар $\{14, 15\}$ и $\{9, 11\}$ единственная комбинация с суммой, кратной 5, — это 14 и 11. Следовательно,

$$4a + b = 14, \quad a + 4b = 11.$$

Решая, получаем $a = 3, b = 2$.

Задание 3.

В заповеднике планируют ввести автоматический мониторинг редких *розовых лемурув*. Для тестирования системы была выбрана группа из 100 животных, в которой 10% составляют розовые

лемуры (класс 1), а оставшиеся 90% — обычные лемуры (класс 0). Будем называть эту группу *тестовой выборкой*.

Модели ИИ для каждой особи из тестовой выборки сделали предсказание, к какому классу (0 или 1) относится данный лемур. Для оценки качества распознавания введём следующие стандартные обозначения:

- TP . Предсказан класс (1), в действительности — класс (1).
- FP . Предсказан класс (1), в действительности — класс (0).
- TN . Предсказан класс (0), в действительности — класс (0).
- FN . Предсказан класс (0), в действительности — класс (1).

Всего в тестовой выборке $P = TP + FN$ объектов (лемуров) класса 1 и $N = TN + FP$ объектов класса 0.

Четыре модели ИИ (А, В, С и D) распознавали лемуров из тестовой выборки. Модель А всех лемуров отнесла к классу 0, модель В всех лемуров отнесла к классу 1. Данные о работе моделей С и D приведены в таблице ниже.

Модель	TP	FP	TN	FN
С	7	8	82	3
D	8	14	76	2

Для моделей А, В, С, D вычислим следующие пять *метрик* M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 (если для некоторой модели возникает деление на ноль, соответствующая метрика для неё не вычисляется).

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{TP + TN}{P + N} && \text{(общая точность),} \\
 M_2 &= \frac{TP}{TP + FN} && \text{(верные на классе 1),} \\
 M_3 &= \frac{TN}{TN + FP} && \text{(верные на классе 0),} \\
 M_4 &= \frac{1}{2} (M_2 + M_3) && \text{(сбалансированная точность),} \\
 M_5 &= \frac{TP}{TP + FP} && \text{(точность на предсказаниях 1).}
 \end{aligned}$$

Для каждой из метрик $M_1, M_2, \dots, M_5$ определите, для какой из моделей достигается её максимальное значение.

Правильный ответ: M_1 — модель А; M_2 — модель В; M_3 — модель А; M_4 — модель D; M_5 — модель С.

Точное совпадение ответа — 1 балл Максимальный балл за задание — 12

Решение.

Посчитаем значения.

Модель А (все — класс 0):

$$M_1 = \frac{90}{100} = 0.9, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 1, \quad M_4 = \frac{1}{2}, \quad M_5 \text{ не определена (нет предсказаний 1).}$$

Модель В (все — класс 1):

$$M_1 = \frac{10}{100} = 0.1, \quad M_2 = 1, \quad M_3 = 0, \quad M_4 = \frac{1}{2}, \quad M_5 = \frac{10}{100} = 0.1.$$

Модель С:

$$M_1 = \frac{7+82}{100} = 0.89, \quad M_2 = \frac{7}{10} = 0.7, \quad M_3 = \frac{82}{90} \approx 0.911, \quad M_4 \approx 0.806, \quad M_5 = \frac{7}{7+8} = \frac{7}{15} \approx 0.467.$$

Модель D:

$$M_1 = \frac{8+76}{100} = 0.84, \quad M_2 = \frac{8}{10} = 0.8, \quad M_3 = \frac{76}{90} \approx 0.844, \quad M_4 \approx 0.822, \quad M_5 = \frac{8}{8+14} = \frac{8}{22} \approx 0.364.$$

Сравнивая, получаем максимумы: M_1 и M_3 — у модели А, M_2 — у В, M_4 — у D, M_5 — у С.

Задание 4. Вася тестировал модель с действительными параметрами x и y . Он выяснил, что функция потерь задаётся формулой

$$\mathcal{L}(x, y) = x^4 + y^2 + 2x^2y + 4y + 6x^2 - 4x + 14.$$

Помогите Васе определить значения параметров (x^*, y^*) , для которых значение функции потерь наименьшее. В ответ укажите x^* , y^* и значение $\mathcal{L}(x^*, y^*)$.

Ответ: $x^* = 1$, $y^* = -3$, $\mathcal{L}(x^*, y^*) = 8$

Критерий оценивания: Точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

Выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, y) &= (y + x^2 + 2)^2 - (x^2 + 2)^2 + x^4 + 6x^2 - 4x + 14 \\ &= (y + x^2 + 2)^2 + (2x^2 - 4x + 10) \\ &= (y + x^2 + 2)^2 + 2(x - 1)^2 + 8.\end{aligned}$$

Минимум достигается, когда квадраты равны нулю:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x^* = 1, \quad y + x^2 + 2 = 0 \Rightarrow y^* = -1^2 - 2 = -3.$$

Тогда $\mathcal{L}(x^*, y^*) = 8$.

Задание 5. Есть набор примеров для обучения: всего N примеров, из них ровно два — положительные, остальные — отрицательные. Случайно выбирают группу из 4 примеров. Известно, что вероятность того, что в группе окажутся оба положительных, в 2 раза больше вероятности того, что не окажется ни одного положительного. Найдите все возможные значения N .

Ответ: 7

Критерий оценивания: Точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

Пусть отрицательных $m = N - 2$.

Число 4-элемент. групп:

$$\#_{\text{всего}} = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}.$$

Групп с обоими положительными: нужно добрать 2 из m отрицательных,

$$\#(2^+) = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Групп без положительных: берём все четвёрки из m отрицательных,

$$\#(0^+) = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}.$$

По условию

$$\frac{\#(2^+)}{\#_{\text{всего}}} = 2 \cdot \frac{\#(0^+)}{\#_{\text{всего}}} \implies \frac{m(m-1)}{2} = 2 \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}.$$

Сокращая (при $m \geq 4$):

$$\frac{1}{2} = \frac{(m-2)(m-3)}{12} \implies (m-2)(m-3) = 6 \implies m = 5.$$

Значит $N = m + 2 = 7$.

Задание 6.

Отчёт об обучении нейросетистандартный вводстандартный вывод1 секунда256 мегабайт

Обучение нейронных сетей обычно делится на эпохи. За одну эпоху, в рамках обучения, модель один раз проходит по обучающему датасету.

Дима долгое время работал над новой разработкой. В процессе её обучения было целых n эпох. После каждой эпохи, Дима записывал текущее время в формате $HH : MM$ (например, 13 : 03). Теперь Диме интересно, какое минимальное количество времени могло уйти на обучение модели.

Дима сейчас очень загружен рабочими задачами, поэтому обратился за помощью к Вам. Посчитайте минимальное количество времени, которое могло уйти на обучение модели.

Формат входных данных

В первой строке входных данных даётся одно целое число n ($2 \leq n \leq 10^4$).

В следующих n строках задаются моменты времени, когда заканчивалась очередная эпоха в формате $HH : MM$ (24-х часовой формат)

Формат выходных данных

Выведите одно целое число: минимальное количество минут, которое могло уйти на обучение модели. Округлите ответ вниз до ближайшего целого количества минут.

Замечание

В первом тестовом примере, точно прошло 10 полных часов (14 – 24). А также, было 56 минут, начиная с 13 : 03 и до 14 : 00 (не 57, так как 13 : 03 могло быть 13 : 03 : 59). И еще 15 минут прошло с 00 : 00 до 00 : 15. Итого, $10 \cdot 60 + 56 + 15 = 671$

Критерий оценивания: Каждый тест не из условия 1 балл. Всего 20 баллов

Максимальный балл за задание — 20

Решение.

Пусть отметки (в минутах) $t_1, \dots, t_n$. Минимальный промежуток между соседними — это

$$\Delta_i = \begin{cases} t_{i+1} - t_i, & t_{i+1} \geq t_i, \\ (24 \cdot 60 - t_i) + t_{i+1}, & t_{i+1} < t_i. \end{cases}$$

Складываем $\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{n-1}$. Начать обучение можно почти сразу перед первой отметкой, поэтому ответ на 1 меньше.

```
n = int(input())
prev = None
s = 0
day = 24 * 60
for _ in range(n):
    hh, mm = map(int, input().strip().split(':'))
    t = hh * 60 + mm
    if prev is None:
        prev = t
        continue
    if t >= prev:
        s += t - prev
    else:
        s += day - prev + t
    prev = t
print(s - 1)
```

Задание 7.

Специальное дерево принятия решений

Имя входного файла: стандартный ввод

Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничения по времени: 1 секунда

Ограничения по памяти: 256 мегабайт

Дано полное бинарное дерево принятия решений глубины n . От корня до листа делается ровно n шагов. На каждом шаге принимается одно из двух решений: пойти влево или вправо. Изначально оба варианта равновероятны: у каждого ребра вероятность $1/2$.

Кто-то изменил устройство дерева и поменял две вероятности на ребрах на 0:

- первое ребро — это a -е ребро на пути «всегда влево» (ребро между уровнями $a - 1$ и a , если от корня на каждом шаге выбирать влево);
- второе ребро — это b -е ребро на пути «всегда вправо» (ребро между уровнями $b - 1$ и b , если от корня на каждом шаге выбирать вправо).

Все остальные ребра по-прежнему имеют вероятность $1/2$ (кроме тех ребер, которые лишились соседнего ребра, у них вероятность теперь равна единице).

Исходами в этом дереве называются листья (вершины на самом нижнем уровне). Вероятность каждого исхода, это произведение вероятностей на пути до соответствующего листа.

Требуется определить, сколько различных исходов (листьев дерева) всё ещё имеют **ненулевую** вероятность.

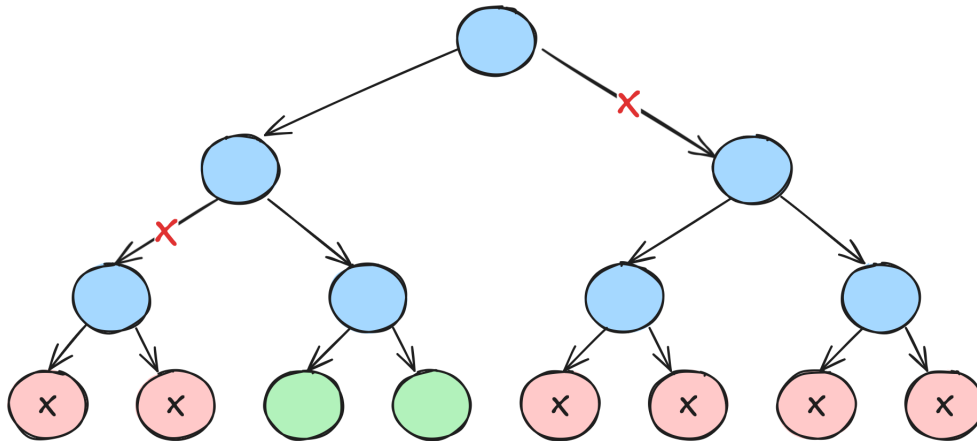
Формат входных данных

В единственной строке заданы три целых числа n, a, b ($1 \leq n \leq 60, 1 \leq a, b \leq n$).

Формат выходных данных

Выведите одно целое число — количество листьев, которые остаются достижимыми (то есть соответствуют путям ненулевой вероятности).

Замечание



В первом тестовом примере, доступными останется лишь 2 исхода.

Решение.

В полном двоичном дереве глубины n листьев 2^n . Если обнулить ребро на пути «всегда влево» на уровне a , то все пути, проходящие через него, становятся невозможными — это ровно 2^{n-a} листьев под этим ребром. Аналогично, обнуление ребра на пути «всегда вправо» на уровне b убирает ещё 2^{n-b} листьев. Эти множества не пересекаются (нельзя одновременно идти всё время влево и всё время вправо в начале пути). Итого остаётся

$$2^n - 2^{n-a} - 2^{n-b}.$$

```
n, a, b = map(int, input().split())
x = 1
print((x << n) - (x << (n - a)) - (x << (n - b)))
```

Задание 8. С помощью трёх моделей машинного обучения a_1, a_2, a_3 мы хотим различать фотографии собачек (класс 0) и кошечек (класс 1). Чтобы оценить качество моделей, мы запустили их на наборе изображений, для которых известен правильный ответ.

В таблице (формат XLSX формат CSV) в каждой строке записаны четыре числа: в столбце y указан правильный класс, а в столбцах a_1, a_2, a_3 — ответы трёх моделей. Все числа равны 0 или 1.

Доверие к моделям различается; веса заданы так:

$$w_1 = 2, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 3.$$

Для каждой строки вычисляется взвешенная сумма

$$S = w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + w_3 \cdot a_3.$$

Итоговый ответ равен $\hat{y} = 1$, если $S \geq 3$, и $\hat{y} = 0$ иначе.

Найдите количество строк, в которых итоговый ответ $\hat{y}$ совпадает с правильным ответом y . В ответ укажите только это число.

Ответ: 69

Критерий оценивания: Точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

Шаг 1. Взвешенная сумма. В ячейку E2:

$$= 2 * B2 + 1 * C2 + 3 * D2$$

Протяните до E101.

Шаг 2. Итоговое предсказание. В ячейку F2:

$$= \text{ЕСЛИ}(E2 \geq 3; 1; 0)$$

Протяните до F101.

Шаг 3. Совпадение с правильным ответом. В ячейку G2:

$$= \text{ЕСЛИ}(F2 = A2; 1; 0)$$

Протяните до G101.

Шаг 4. Подсчёт количества совпадений. В любую свободную ячейку (например, H2):

$$= \text{СУММ}(G2 : G101)$$

Это число показывает, в скольких строках итоговый ответ $\hat{y}$ совпал с правильным классом y .