Максимальное количество баллов за олимпиаду — 100

Задание 1. Пусть X — множество целых чисел, в котором n элементов. Определим медиану m множества X. Выпишем элементы множества X в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. При нечётном n обозначим $n = 2k+1$ и положим $m = a_{k+1}$ (т. е. медиана — среднее из чисел в получившемся ряду). При чётном n обозначим $n = 2k$ и положим $m = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ (т. е. полагаем медиану — средним арифметическим двух средних чисел в получившемся ряду).

Пусть A и B — множества целых чисел, состоящие из нечётного числа элменетов, причём $A \cap B = \emptyset$. Известно, что медиана множества A равна 10, а медиана множества B равна 100.Какое наибольшее значение может иметь медиана множества $A \cup B$?

Ответ: 99.5

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

Заметим, что $|A \cup B|$ чётно, поэтому медиана $A \cup B$ — полусумма двух соседних *различных* целых чисел.

Обозначим $|A| = 2p+1$ и $|B| = 2q+1$. Из того, что медиана A равна 10, следует, что в A не менее $p+1$ элементов ≤ 10, а значит ≤ 100. Из того, что медиана B равна 100, следует, что в B не менее $q+1$ элементов ≤ 100. Следовательно, в объединении $A \cup B$ не менее

$$(p+1) + (q+1) = p + q + 2$$

элементов ≤ 100. Но всего элементов $2(p+q+1)$, то есть *строго больше половины* элементов не превосходят 100. Значит, правое из двух средних чисел в отсортированном $A \cup B$ не больше 100. Так как оба средних — целые и различны, левое из них ≤ 99. Отсюда

$$m(A \cup B) \leq \frac{99 + 100}{2} = 99.5.$$

Покажем достижимость на 6 элементах ($|A| = |B| = 3$):

$$A = \{0,\ 10,\ 1000\}, \qquad B = \{99,\ 100,\ 101\}.$$

Тогда $m(A) = 10$, $m(B) = 100$, множества дизъюнктны, а при упорядочивании объединения получаем

$$0,\ 10,\ \boxed{99},\ \boxed{100},\ 101,\ 1000,$$

то есть средние два числа — 99 и 100, и

$$m(A \cup B) = \frac{99 + 100}{2} = 99.5.$$

Следовательно, наибольшее возможное значение медианы $A \cup B$ равно 99.5.

Задание 2. Три программы ИИ (искусственного интеллекта), отвечают на одни и те же 30 вопросов. *Ансамбль* из трёх программ выдаёт ответ на каждый вопрос «по правилу большинства»: если хотя бы две из трёх программ дали одинаковый ответ, выдаётся именно этот ответ. В противном случае выдаётся ответ первой программы. Известно, что каждая из трёх программ ответила верно не менее чем на 22 вопроса. Какое наименьшее число правильных ответов гарантированно будет у ансамбля из трёх программ?

Ответ: 18

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

Каждая программа ошибается не более чем на 8 из 30 вопросов, поэтому суммарное число ошибок трёх программ не превосходит

$$8 + 8 + 8 = 24.$$

Если ансамбль на каком-то вопросе выдаёт неверный ответ, то хотя бы две программы на этом вопросе ошиблись (либо две согласованно дали один и тот же неверный ответ, либо все трое ответили по-разному и тогда выбор ответа первой программы неверен, но и здесь не менее двух программ ошиблись). Значит, число вопросов, на которых ошибся ансамбль, не больше, чем

$$\frac{24}{2} = 12.$$

Следовательно, минимум гарантированных верных ответов ансамбля равен

$$30 - 12 = 18.$$

Покажем, что оценка точна. Разобьём 12 вопросов на три группы по 4:

- на первых четырёх одинаково ошибаются первая и вторая программы (третья отвечает верно);
- на следующих четырёх одинаково ошибаются первая и третья;
- на ещё четырёх одинаково ошибаются вторая и третья.

Тогда каждая программа ошиблась ровно 8 раз, а на всех этих 12 вопросах ансамбль выбирает неверное «большинство». На остальных 18 вопросах все три программы отвечают верно. В итоге у ансамбля ровно 18 верных ответов, что совпадает с найденной нижней границей.

Итак, наименьшее гарантированное число правильных ответов ансамбля равно 18.

Задание 3. В порту расположено m площадок, пронумерованных целыми числами $0, 1, 2, \ldots, m-1$. В порт прибудет контейнеровоз с сотней контейнеров, которые пронумерованы последовательными целыми числами. Автоматический кран разгружает контейнеровоз по следующему правилу: контейнер с номером N разгружается на площадку с таким номером k, что $N-k$ делится на m (напомним, что k принимает значения от 0 до $m-1$). При каком наибольшем значении m мы гарантированно можем утверждать, что на каждой площадке после разгрузки окажется не менее 9 контейнеров?

Ответ: 11

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

По правилу разгрузки каждый контейнер идёт на площадку по своему остатку по модулю m. Для любых 100 *последовательных* целых чисел количества контейнеров по остаткам отличаются не более чем на 1, то есть каждая площадка получит либо $\left\lfloor \frac{100}{m} \right\rfloor$, либо $\left\lceil \frac{100}{m} \right\rceil$ контейнеров. Следовательно, гарантированное (минимальное) число контейнеров на площадке равно $\left\lfloor \frac{100}{m} \right\rfloor$.

Требование $\left\lfloor \frac{100}{m} \right\rfloor \geq 9$ эквивалентно $m \leq \frac{100}{9}$, откуда наибольшее целое m равно 11. Действительно, при $m = 11$ мы имеем $100 = 9 \cdot 11 + 1$: десять площадок получат по 9 контейнеров и одна — 10, независимо от начального номера.

Наконец, m не может быть ≥ 12: тогда $\left\lfloor \frac{100}{m} \right\rfloor \leq 8$, и гарантировать «не менее 9 на каждой площадке» нельзя. Уже при $m = 12$ имеем $100 = 8 \cdot 12 + 4$: четыре площадки получат по 9 контейнеров, а остальные восемь — по 8. Следовательно, максимальное подходящее значение m равно 11.

Задание 4. Вася настраивает проверку входящих писем по трём признакам A, B и C. Обозначим:

- A — в письме есть слово БЕСПЛАТНО;
- B — в письме есть три восклицательных знака подряд;
- C — в письме есть ссылка (текстовый адрес, по которому открывается страница).

Письмо отправляется в папку НЕЖЕЛАТЕЛЬНАЯ ПОЧТА, если выполнены хотя бы два из трёх упомянутых выше признаков.

По набору писем известно, что признаки A и B выполнены одновременно для 80 писем, признаки A и C — для 50 писем, признаки B и C — для 60 писем. Все три признака A, B, C одновременно выполняются для 30 писем. Сколько писем отправится в папку НЕЖЕЛАТЕЛЬНАЯ ПОЧТА?

Ответ: 130

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

Обозначим через x, y, z количества писем, в которых выполнены соответственно ровно пары признаков:

$$x = |A \cap B \setminus C|, \quad y = |A \cap C \setminus B|, \quad z = |B \cap C \setminus A|,$$

а через t — число писем, где выполнены все три признака: $t = |A \cap B \cap C| = 30$.

Из данных:

$$|A \cap B| = 80 = x + t \;\Rightarrow\; x = 80 - 30 = 50,$$
$$|A \cap C| = 50 = y + t \;\Rightarrow\; y = 50 - 30 = 20,$$
$$|B \cap C| = 60 = z + t \;\Rightarrow\; z = 60 - 30 = 30.$$

В папку попадают письма, где выполнено «ровно две» или «все три»:

$$x + y + z + t = 50 + 20 + 30 + 30 = 130.$$

Следовательно, в папку НЕЖЕЛАТЕЛЬНАЯ ПОЧТА отправится 130 писем.

Задание 5. Даны точки на клетчатой плоскости, разбитые на три класса:
класс 0: $(2, -1),\ (1, 1),\ (2, 1),\ (1, -2),\ (2, 0)$;
класс 1: $(0, 1),\ (-2, 1),\ (-1, -2),\ (0, 2)$;
класс 2: $(-1, 1),\ (0, -2),\ (-2, 0)$.

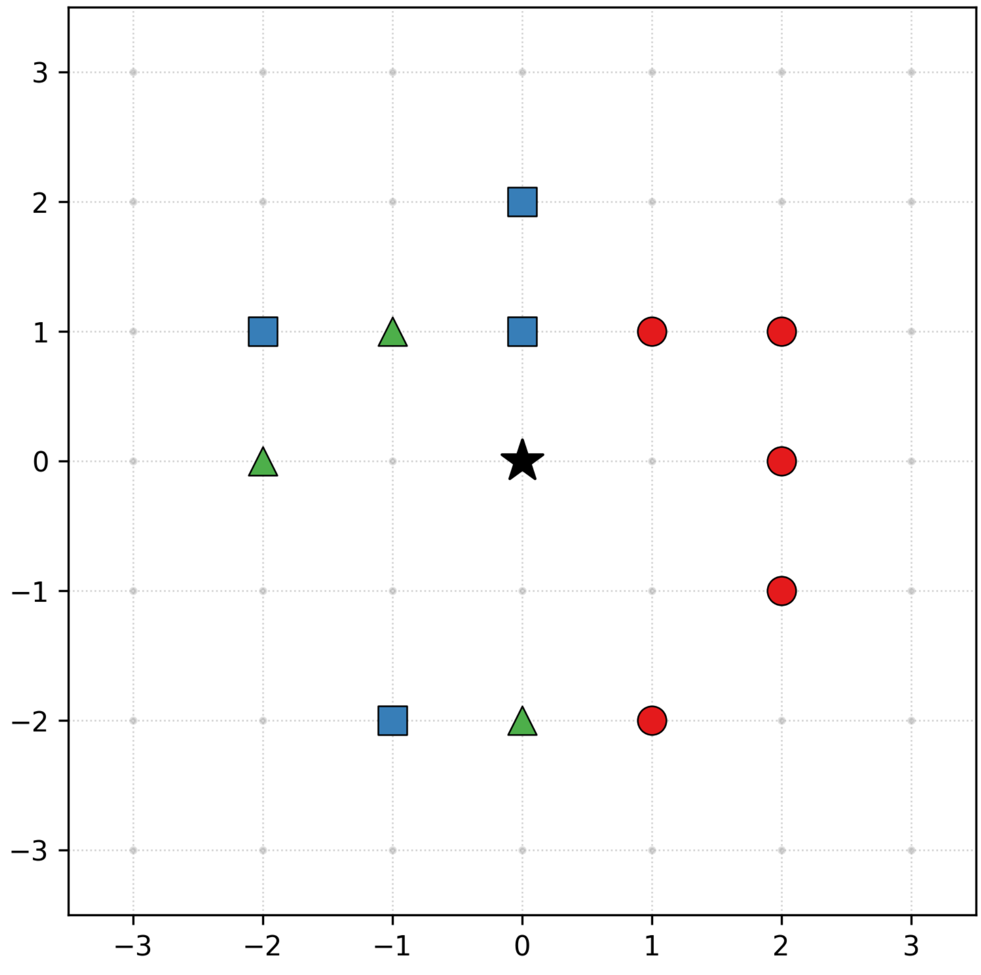

Рис. 1: Точки на плоскости

Новую точку $(0, 0)$, помеченную звёздочкой, нужно отнести к одному из трёх классов *по правилу ближайшего центра*.

Назовём *центром* класса точку, у которой первая координата равна среднему арифметическому всех первых координат точек класса, а вторая координата — среднему арифметическому всех вторых координат. *Ближайшим* для точки считается класс, расстояние до центра которого наименьшее; при равенстве расстояний выбирается класс с меньшим номером.

Правило ближайшего центра требует относить точку к ближайшему для неё классу. Определите, какой класс получит точка, помеченная звёздочкой.

Ответ: 1

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 12 баллов

Максимальный балл за задание — 12

Решение.

Посчитаем центры классов:

$$C_0 = \left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right), \quad C_1 = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad C_2 = \left(-1, -\frac{1}{3}\right).$$

Сначала оценим расстояние от $(0,0)$ до центра класса 1:

$$d_1^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{4}{16} = \frac{13}{16} < 1,$$

значит $d_1 < 1$.

Теперь заметим, что расстояния до двух остальных центров заведомо больше 1:

- для $C_0 = \left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ уже $|x| = \frac{8}{5} > 1$, следовательно $d_0 > 1$;
- для $C_2 = \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ имеем $d_2^2 = 1 + \frac{1}{9} > 1$, то есть $d_2 > 1$.

Итак, единственное расстояние < 1 — до центра класса 1, следовательно по правилу ближайшего центра точка $(0,0)$ относится к классу 1.

Задание 6. Линейный счётчик по модулю

Имя входного файла: стандартный ввод

Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничения по времени: 1 секунда

Ограничения по памяти: 256 мегабайт

В одной далёкой лаборатории учёные создали особого робота-предсказателя. Этот робот умеет строить магическую последовательность чисел. Его память устроена так: он всегда хранит два последних значения и по ним вычисляет следующее.

Работает он так:

$$F_0 = a, \quad F_1 = b, \quad F_n = \left(p \cdot F_{n-1} + q \cdot F_{n-2}\right) \bmod m \quad (n \geq 2).$$

Знак «$\mathrm{mod} m$» означает, что после вычисления берётся остаток от деления на число m, будто числа «оборачиваются» при достижении предела.

Ваша задача — помочь роботу посчитать число F_n.

Ровно шесть строк:

- 1-я строка: целое n;
- 2-я строка: целое a;
- 3-я строка: целое b;
- 4-я строка: целое p;
- 5-я строка: целое q;
- 6-я строка: целое m.

Гарантируется, что

$$0 \le n \le 10^5, \quad 1 \le m \le 10^9 + 7, \quad 0 \le a, b, p, q < m.$$

Одно целое число — F_n.

Критерий оценивания: Каждый тест не из условия 1 балл. Всего 20 баллов

Максимальный балл за задание — 20

Решение.

По заданным a, b, p, q, m считаем значения последовательно: $F_0 = a$, $F_1 = b$, далее $F_n = (pF_{n-1} + qF_{n-2}) \bmod m$. Идём итеративно от 2 до n, на каждом шаге обновляя пару последних значений.

```
n = int(input())
a = int(input())
b = int(input())
p = int(input())
q = int(input())
m = int(input())

if n == 0:
    print(a)
elif n == 1:
    print(b)
else:
    f0, f1 = a, b
    for _ in range(2, n + 1):
        f0, f1 = f1, (p * f1 + q * f0) % m
    print(f1)
```

Задание 7.

Пожарная тревога Имя входного файла: стандартный ввод

Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничения по времени: 1 секунда

Ограничения по памяти: 256 мегабайт

Представь, что у тебя есть карта города. На ней есть две пожарные станции: станция класса (0) с координатами (x_0, y_0) и станция класса (1) с координатами (x_1, y_1). Где-то в городе произошла авария, её место обозначено точкой (x, y).

Чтобы вызвать помощь, нужно понять, какая станция доберётся до аварии быстрее. Машины пожарных двигаются только вдоль улиц и проспектов, то есть сначала по горизонтали, потом по вертикали (или наоборот). Время проезда считается просто: складываем количество кварталов по горизонтали и по вертикали. Именно поэтому расстояние от точки ((u,v)) до точки (r, s) определяется так:

$$D((u, v), (r, s)) = |u - r| + |v - s|.$$

Нужно определить, какая станция по этому правилу ближе к месту аварии. Если обе станции окажутся на одинаковом расстоянии, помощь приедет со станции класса (0).

Формат входных данных:

Шесть целых чисел, по одному в строке:

$$x,\ y,\ x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1.$$

Гарантируется, что

$$|x|, |y|, |x_0|, |y_0|, |x_1|, |y_1| \le 10^5.$$

Формат выходных данных:

Выведите одно число: 0 или 1 — номер класса с меньшим расстоянием (при равенстве — 0).

Критерий оценивания: Каждый тест не из условия 1 балл. Всего 20 баллов

Максимальный балл за задание — 20

Решение.

Посчитаем манхэттенские расстояния от точки аварии до каждой станции:

$$d_0 = |x - x_0| + |y - y_0|, \qquad d_1 = |x - x_1| + |y - y_1|.$$

Если $d_0 \leq d_1$, выбираем станцию класса `0`, иначе — `1`.

```
x = int(input())
y = int(input())
x0 = int(input())
y0 = int(input())
x1 = int(input())
y1 = int(input())
d0 = abs(x - x0) + abs(y - y0)
d1 = abs(x - x1) + abs(y - y1)
print(0 if d0 <= d1 else 1)
```