Материалы для проведения регионального этапа

LII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2025–2026 учебный год

Второй день

2–3 февраля 2026 года

Москва, 2026

Сборник содержит материалы для проведения III этапа LII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2025–2026 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2025–2026 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **2 февраля 2026 г.** (I тур) и **3 февраля 2026 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2025–2026 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

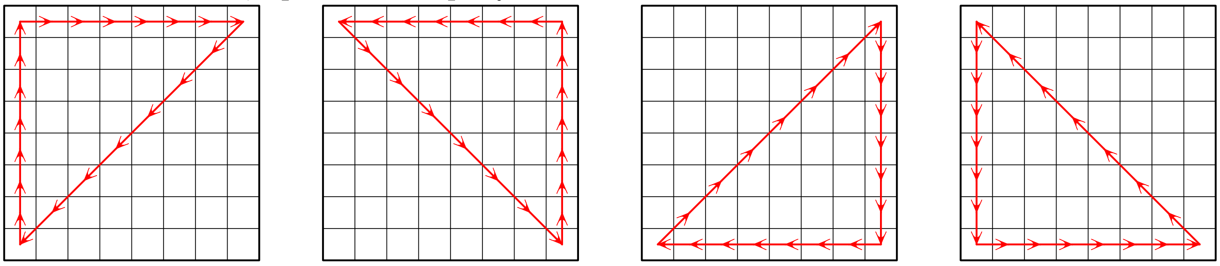
Авторы и составители сборника

9 класс

9.6. Тренер дал начинающим шахматистам задание: каждый должен подойти к шахматной доске 8×8, поставить шахматного короля на одну из угловых клеток и сделать им 21 ход так, чтобы король побывал в каких-то двух других угловых клетках и вернулся в исходную клетку. После этого короля убирают, и к доске подходит следующий ребёнок. Четыре ребёнка по очереди выполнили задание. Обязательно ли после этого найдутся такие две клетки A и B, что хотя бы два ребёнка сделали ход королём с клетки A на клетку B?

Ответ: Не обязательно.

Решение. Пример четырёх обходов, совершённых детьми, при которых таких двух клеток не найдётся, приведён на рисунке ниже.



Замечание. Существуют и немного другие примеры. Укажем общие свойства *всех* возможных примеров.

В каждую угловую клетку король должен (у разных детей) входить с разных клеток, и уходить с неё на разные. Поскольку у угловых клеток всего три соседних, каждая угловая клетка должна быть посещена ровно трижды. Далее, между любыми двумя посещениями угловых клеток должно пройти ровно 7 ходов. У каждого ребёнка король должен подряд посетить две угловых клетки, расположенных «по диагонали» друг от друга, и между этими клетками он должен совершить 7 диагональных ходов. Значит, обе диагонали доски должны быть пройдены по два раза в разных направлениях. Отсюда уже можно вывести, что порядок посещения угловых клеток у четырёх детей должен быть таким же, как в примере сверху, либо же обратным (у всех детей). Наконец, на пути между двумя соседними угловыми клетками (скажем, находящимися в одной строке) первый и последний ход должны быть горизонтальными, а вот между ними путь может выглядеть по-разному.

($\star$) Любой верный пример четырёх обходов доски, удовлетворяющих требованиям7 баллов

(0) Пример, в котором *не указаны* направления обходов (но их можно указать так, чтобы получился верный пример!) ....4 балла

(1) То же, но указано направление лишь одного обхода из четырёх ....5 баллов

(2) То же, но указано направление хотя бы двух обходов ....7 баллов

9.7. Дано нечётное простое число p. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что $\frac{a}{p} + \frac{p}{b} = 2$.

Ответ: Пары $a = b = p$ и $a = 2p - 1$, $b = p^2$.

Решение. Умножив равенство на pb, получаем $ab + p^2 = 2pb$, откуда $p^2 = (2p - a)b$. Значит, b — натуральный делитель числа p^2. У p^2 всего 3 натуральных делителя 1, p и p^2. Если $b = 1$, то $2p - a = p^2$, значит, $a = 2p - p^2 = p(2 - p) < 0$, то есть этот случай невозможен. Если $b = p$, то $2p - a = p$, откуда $a = p$. Если $b = p^2$, то $2p - a = 1$, откуда $a = 2p - 1$. Обе найденные пары (p, p) и $(2p - 1, p^2)$, как нетрудно проверить, подходят.

Замечание. Обратим внимание, что все преобразования в решении равносильны (если числа a, b и p натуральны), поэтому на самом деле проверка того, что полученные ответы подходят, не требуется.

(O+) Только полный ответ .... 1 балл

(O−) Неполный ответ (в котором хотя бы один случай упущен) .... не оценивается

(O) Если в работе ответ неверен .... не более 5 баллов за задачу

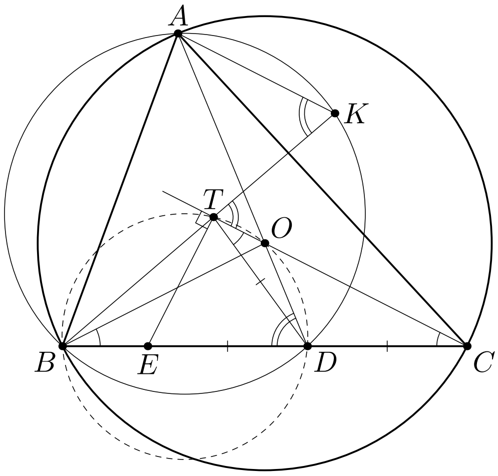
(A) Получено равенство $p^2 = (2p-a)b$ (именно такое, с разложением на множители!) или хотя бы одна из делимостей $p^2 \vdots b$ и $p^2 \vdots 2p-a$ .... 3 балла

(B−) Во в целом верном решении при переборе делителей числа p^2 ровно один из них (1, p или p^2) упущен или разобран неверно .... снимаются 2 балла

(C) В решении с существенно неравносильными переходами отсутствует проверка того, что ответы подходят .... снимается 1 балл

9.8. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Прямая AO пересекает отрезок BC в точке D. Точка E выбрана на отрезке BC так, что D — середина отрезка CE. Основание T перпендикуляра, опущенного из E на CO, лежит в треугольнике ABD. Прямая BT пересекает окружность, описанную около треугольника ABD, в точке K. Докажите, что прямые AK и CO параллельны.

Решение. Так как треугольник CET прямоугольник, середина гипотенузы D равноудалена от вершин T и C. Тогда из равнобедренных треугольников DTC и OBC имеем $\angle OTD = \angle OCD = \angle OBD$, поэтому четырёхугольник $OTBD$ — вписанный. Значит, $\angle ADB = \angle ODB = \angle OTK$. С другой стороны, поскольку четырёхугольник $AKDB$ вписан, имеем $\angle ADB = \angle AKB = \angle AKT$. Итак, $\angle OTK = \angle AKT$, откуда и следует, что прямые OT (то есть CO) и AK параллельны.



(1) Доказано, что точки O, T, D и B лежат на одной окружности .... 3 балла

(2) Утверждение задачи сведено к факту, что точки O, T, D и B лежат на одной окружности .... 3 балла

9.9. Числа a, b и c больше единицы и удовлетворяют равенству $\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)=1.$ Докажите, что

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2+\left(c-\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

Решение. Домножив первую скобку в равенстве из условия на $\frac{b}{a}$, вторую на $\frac{c}{b}$, а третью на $\frac{a}{c}$, получим равенство

$$\left(b-\frac{1}{a}\right)\left(c-\frac{1}{b}\right)\left(a-\frac{1}{c}\right)=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1. \qquad (*)$$

По неравенству о средних для трех чисел из $(*)$ получаем

$$\left(b-\frac{1}{a}\right)^2+\left(c-\frac{1}{b}\right)^2+\left(a-\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant 3\left(\left(b-\frac{1}{a}\right)\left(c-\frac{1}{b}\right)\left(a-\frac{1}{c}\right)\right)^{2/3}=3.$$

Раскрыв скобки в левой части и перенеся все попарные произведения в правую часть, получаем, что

$$a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant 3+2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right) \geqslant 6+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right),$$

где в последнем неравенстве мы снова применили неравенство о средних для трех чисел: $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=3$.

Осталось заметить, что то же самое получится, если раскрыть скобки в требуемом неравенстве и перенести 6 в правую часть.

9.10. В большой компании у каждого человека ровно 100 знакомых в этой же компании (если A знаком с B, то и B знаком с A). Оказалось, что у любого человека среди его 100 знакомых есть хотя бы одна пара незнакомых друг с другом людей. При каком наибольшем k можно утверждать, что в компании найдётся такой человек, что среди его 100 знакомых найдутся хотя бы k различных пар людей, в каждой из которых люди не знакомы друг с другом? (Один человек может входить в несколько таких пар.)

Ответ: $k = 50$.

Решение 1. Введём граф, вершины которого будут соответствовать людям; две вершины соединены синим ребром, если соответствующие работники знакомы, и красным иначе. Тогда из каждой вершины v выходят ровно 100 синих рёбер — назовём множество их вторых концов *окрестностью* $N(v)$ вершины v, и в каждом множестве $N(v)$ есть две вершины, соединённые красным ребром. Требуется же выяснить, при каком наибольшем k обязательно найдётся вершина v такая, что на вершинах множества $N(v)$ есть хотя бы k красных рёбер.

Пример. Покажем сначала, что при $k \geqslant 51$ требуемая вершина найдётся не всегда. Рассмотрим 102 вершины, разобьём их на пары и вершины каждой пары соединим красным ребром. Все остальные пары вершин соединим синими рёбрами. Тогда окрестность каждой вершины состоит из 50 пар, и на них есть ровно 50 красных рёбер. Таким образом, условие выполнено, но ни в одной окрестности нет 51 красного ребра.

Оценка. Осталось показать, что при $k = 50$ требуемая окрестность всегда найдётся. Предположим противное. Рассмотрим произвольную вершину v. В множестве $N(v)$ найдутся две вершины u_1 и u_2, соединённые красным ребром. Тогда из u_1 выходит синее ребро в какую-то вершину, не лежащую в $N(v) \cup \{v\}$ — обозначим её через w. Итак, вершины v и w соединены красным ребром, но множества $N(v)$ и $N(w)$ пересекаются — хотя бы по u_1.

Положим $P = N(v) \cap N(w)$; пусть t — количество вершин в P, тогда $1 \leqslant t \leqslant 100$. Обозначим через Q множество всех вершин в $N(v)$, не лежащих в P, а через R множество всех вершин в $N(w)$, не лежащих в P; тогда в Q и R по $100-t$ вершин. Пусть $S = N(v) \cup \cup N(w) = P \cup Q \cup R$; тогда число вершин в S равно $t + 2(200-t) = 200-t$. Пусть есть всего a красных рёбер, соединяющих вершины P друг с другом, b красных рёбер, соединяющих P с Q, и c красных рёбер, соединяющих P с R.

Из каждой вершины p множества P идут синие рёбра в v, в w, и ещё максимум 98 синих рёбер в S; значит из p идут не менее $(200-t)-98-1 = 101-t$ красных рёбер в S. Просуммировав эти количества по всем t вершинам множества P, мы учтём каждое из a красных рёбер, соединяющих вершины P друг с другом, дважды, а каждое из $b+c$ красных рёбер, соединяющих P с вершинами из $Q \cup R$, по разу, то есть получим оценку $2a+b+c \geqslant t(101-t)$. С другой стороны, на множестве $N(v)$ есть хотя бы $a+b$ красных рёбер, а на множестве $N(w)$ — хотя бы $a+c$ красных рёбер; по нашему предположению, оба этих количества не превосходят 49, поэтому $2\cdot 49 \geqslant (a+b)+(a+c) = 2a+b+c \geqslant t(101-t)$. Но это неравенство неверно, поскольку $t(101-t) = \frac{1}{4}(101^2-(2t-101)^2) \geqslant \frac{1}{4}(101^2-99^2) = 100$.

Решение 2. Приведём другое доказательство того, что при $k = 50$ требуемая окрестность $N(v)$ найдётся. Опять же предположим противное. Воспользуемся следующими двумя нехитрыми соображениями.

Лемма 1. Пусть у вершины $u \in N(v)$ есть ровно t вершин в $N(v)$, с которыми она соединена красным ребром. Тогда u соединена синими рёбрами ровно с t вершинами, отличными от v и не лежащими в $N(v)$.

Доказательство. Вершина u соединена синими рёбрами с v и ровно с $99-t$ вершинами в $N(v)$. Значит, количество остальных вершин, с которыми она соединена синими рёбрами, равно $100 - 1 - (99 - t) = t$. $\square$

Лемма 2. Пусть у вершины $u \in N(v)$ есть t вершин в $N(v)$, с которыми она соединена красными рёбрами. Тогда в $N(v)$ есть как минимум $t + 1$ вершин, каждая из которых соединена со всеми остальными 99 вершинами в $N(v)$ сними рёбрами.

Доказательство. Если это не так, то из вершины u выходит t красных рёбер в другие вершины $N(v)$, и ещё минимум из $99 - t$ других вершин в $N(v)$ выходит хотя бы по одному красному ребру в вершины $N(v)$. Значит, общее количество красных рёбер между вершинами множества $N(v)$ не меньше $(t + (99 - t))/2 > 49$, то есть их хотя бы 50. Это противоречит нашему предположению. $\square$

Перейдём к решению. Рассмотрим произвольную вершину v. Выберем вершину $w \in N(v)$, из которой выходит наибольшее количество t красных рёбер в другие вершины из $N(v)$ (тогда $t > 0$). Обозначим через T множество вершин, соединённых с w синим ребром, а с v — красным; по лемме 1, в T ровно t вершин.

В множестве $N(w)$ содержится вершина v; при этом она соединёна с t вершинами из $N(w)$ красными рёбрами — а именно, с вершинами из T. По лемме 2, в $N(w)$ есть $t+1$ вершин, каждая из которых соединена синими рёбрами со всеми вершинами из $N(w)$ (отличными от неё); обозначим через S множество этих вершин. В частности, v не лежит в S (ибо из v выходят красные рёбра в T), и все вершины из S соединены синими рёбрами с v, то есть S содержится в $N(w) \cap N(v)$.

Рассмотрим теперь какую-нибудь вершину u из $N(v)$, соединённую с w красным ребром. Любая вершина $s \in S$ соединена синими рёбрами со всеми другими вершинами из $N(w)$ и с самой w — здесь уже перечислены все 100 синих рёбер, выходящих из неё. Значит, s соединена с u красным ребром. Но тогда из u выходит $t + 2$ красных ребра в вершины из $N(v)$ — а именно, в w и во все вершины из S. Это противоречит выбору t; значит, наше исходное предположение неверно, что мы и хотели доказать.

Замечание. Существуют и другие способы доказать оценку.

Например, опять же в предположении противного, можно выбрать наибольшее t, при котором найдутся вершины v и $w \in N(v)$ такие, что w соединена с t вершинами из $N(v)$ красными рёбрами (тогда $t \leq 49$). Опять же обозначим через T множество вершин из $N(w)$, не лежащих в $N(v) \cup \{v\}$; тогда $|T| = t$. Пусть $Q = N(w) \setminus T$; тогда из леммы 1 можно вывести, что из вершин множества Q выходит суммарно не более $98 - t$ синих рёбер в вершины из T. Значит, количество красных рёбер между Q и T не меньше, чем $\Delta = t(100 - t) - (98 - t)$; нетрудно показать, что $\Delta > t^2$, и потому в T найдётся вершина, соединённая более чем с t вершинами из Q красными рёбрами. Это противоречит выбору t, ибо все эти вершины лежат в $N(w)$.

(П) Показано только, что при $k \geqslant$ ‘51 требуемой вершины может не найтись .... 1 балл

(О) Доказано, что при $k = 50$ требуемая вершина найдётся всегда .... 6 баллов

Частичные продвижения в оценке (суммирующиеся с баллами за пример) оцениваются так.

(Л1) Сформулирована и доказана лемма 1 .... 0 баллов

(Л1$'$) Если лемма 1 используется без доказательства .... баллы не снимаются

(Л2) Сформулирована и доказана лемма 2 .... 1 балл

(И1) Выбраны две вершины v и w, соединённые красным ребром, но имеющие общего соседа (по синим рёбрам), и замечено, что из такого общего соседа идёт красное ребро в вершину из $N(v) \cup N(w)$ .... 1 балл

(И2) В $N(v)$ выбрана вершина w, из которой идёт наибольшее число красных рёбер в $N(v)$ .... 1 балл

Баллы за (И1) и (И2) не складываются друг с другом, но складываются с баллом за (Л2).

10 класс

10.6. На окружности отмечено 16 точек, которые делят окружность на 16 равных дуг. Петя расставил в этих точках (в некотором порядке) 16 последовательных натуральных чисел. Далее для каждой пары диаметрально противоположных точек Петя вычислил сумму чисел в этих точках. Могло ли оказаться, что полученные 8 сумм представляют собой 8 последовательных натуральных чисел?

Ответ: не могло.

Решение.

Предположим противное: для некоторого набора расставленных чисел $n, n+1, \ldots, n+15$ наши суммы в парах равны $s, s+1, \ldots, s+7$ (здесь n и s — некоторые натуральные числа). Тогда сумма S всех чисел с одной стороны равна $S = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+15) = 16n + 15 \cdot 8$, а с другой стороны, она равна $S = s + (s+1) + (s+2) + \ldots + (s+7) = 8s + 7 \cdot 4$. Из первого равенства видим, что S делится на 8, а из второго — что не делится на 8. Противоречие.

(A) Общая сумма приравнена к сумме чисел в парах .... 2 балла

10.7. На координатной плоскости проведена прямая $ax + by + c = 0$, где a, b, c — некоторые положительные числа. Известно, что эта прямая касается окружности $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что если взять три отрезка с длинами a, b, c, то из них можно сложить прямоугольный треугольник.

Решение 1. Достаточно доказать, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Так как прямая и окружность имеют единственную общую точку, система уравнений $ax + by + c = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ имеет единственное решение.

Выразим $by = -ax - c$ и подставим в уравнение окружности $b^2(x^2 + y^2) = b^2$. Получим $b^2x^2 + (ax+c)^2 - b^2 = 0 \iff (a^2+b^2)x^2 + 2ac\,x + (c^2 - b^2) = 0$. Это квадратное уравнение должно иметь единственный корень, значит дискриминант должен обращаться в 0.

Имеем $D/4 = (ac)^2 - (a^2+b^2)(c^2-b^2) = 0 \iff b^2(a^2+b^2-c^2) = 0$, откуда $a^2+b^2-c^2 = 0$, что и требуется.

Решение 2. Прямая касается окружности $x^2 + y^2 = 1$, если расстояние от центра $(0;0)$ до этой прямой равно 1. По формуле расстояния от точки до прямой получаем, что $1 = \left|\frac{a\cdot 0 + b\cdot 0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$, откуда $\sqrt{a^2+b^2} = |c|$ или $a^2 + b^2 = c^2$.

Замечание. Есть и другие подходы к решению. Например, подставляя $x = 0$ и $y = 0$ в уравнение прямой, понимаем, что наша прямая пересекает оси координат в точках $A(-\frac{c}{a}, 0)$ и $B(0, -\frac{c}{b})$. Значит, мы знаем катеты прямоугольного треугольника OAB, а кроме того, из касания следует, что высота OH этого треугольника равна 1. Составив уравнение, связывающее величины OA, OB, OH (скажем, выразив площадь двумя способами: $OA \cdot OB = \sqrt{OA^2 + OB^2} \cdot OH$), получаем нужное нам соотношение $a^2 + b^2 = c^2$.

(A) Верно записано условие касания (через дискриминант квадратного уравнения или через формулу расстояния от точки до прямой и т.д.) .... 3 балла

(B) Замечено, что для решения нужно доказать равенство $c^2 = a^2 + b^2$ .... баллы не добавляются

10.8. В конференции участвуют 2026 математиков, у каждого из которых есть некоторое количество друзей (возможно, ни одного) среди остальных. Дружба взаимна. Известно, что выполняется условие: если двое математиков дружат, то количества друзей у них отличаются ровно на 1. Найдите наибольшее возможное количество пар друзей.

Ответ: $1013 \cdot 1012$.

Решение. Положим $k = 1013$. Поставим в соответствие каждому математику вершину, и соединим ребром вершины, соответствующие друзьям. Мы получили граф, обладающий таким свойством: степени любых двух соседних (т.е. соединенных ребром) вершин отличаются ровно на 1. Пусть V и E — множества вершин и рёбер этого графа, тогда $|V| = 2k$. Нам нужно найти максимальное $|E|$ (т. е. максимальное количество рёбер в таком графе).

Пример. Пусть одна вершина не соединена ни с какой другой. Остальные вершины разобьём на множества X и Y размера k и $k-1$ соответственно, и соединим ребром каждую вершину из X с каждой вершиной из Y. Тогда условие выполняется, поскольку степень каждой вершины из X равна $k-1$, а степень каждой вершины из Y равна k. При этом всего проведено $k(k-1)$ рёбер.

Оценка. Докажем, что $|E| \leqslant k(k-1)$. Обозначим через X_i множество вершин степени i. По условию, ребро может соединять только две вершины из X_{i-1} и X_i (при некотором i). Пусть m — максимальная степень вершины (т.е. $|X_m| > 0$ и $|X_{m+1}| = |X_{m+2}| = \ldots = 0$).

1) Если $m \leqslant k-1$, то степень каждой вершины в графе не больше $k-1$, поэтому $2|E| \leqslant (k-1) \cdot |V| = (k-1) \cdot (2k)$, откуда $|E| \leqslant k(k-1)$.

2) Пусть $m \geqslant k+1$. Возьмем вершину $A \in X_m$. Она соединена с m вершинами, каждая из которых лежит в X_{m-1}. Отсюда $|X_{m-1}| \geqslant m$. Возьмем вершину $B \in X_{m-1}$. Она соединена с $m-1$ вершинами (каждая из которых лежит в X_m или в X_{m-2}). Значит, $|V| \geqslant |X_{m-1}| + |X_m| + |X_{m-2}| \geqslant m + m - 1 \geqslant k + 1 + k > 2k = |V|$ — противоречие.

3) Остается рассмотреть случай $m = k$. Каждое ребро соединяет вершину из множества $Y = X_k \cup X_{k-2} \cup X_{k-4} \cup \ldots$ с вершиной из множества $Z = X_{k-1} \cup X_{k-3} \cup X_{k-5} \cup \ldots$. Поэтому $|E|$ равно количеству ребер, исходящих из Y, следовательно, $|E| \leqslant k \cdot |Y|$. А также $|E|$ равно количеству ребер, исходящих из Z, откуда $|E| \leqslant (k-1) \cdot |Z|$.

Если $|Y| \leqslant k-1$, то в силу первого неравенства $|E| \leqslant k \cdot |Y| \leqslant k(k-1)$. Иначе $|Y| \geqslant k$, но тогда $|Z| \leqslant k$, и в силу второго неравенства, $|E| \leqslant (k-1) \cdot |Z| \leqslant (k-1) \cdot k$.

Итак, во всех случаях доказана оценка $|E| \leqslant (k-1)k$.

Замечание. В оценке случай 1 может быть разобран так же, как случай 3.

(Z) Только верный ответ. .... баллы не добавляются
(Y) Переформулировка на языке графов. .... баллы не добавляются
(A) Приведен верный пример с $k(k-1)$ ребрами. .... 2 балла
(B) Полностью доказана оценка $|E| \leqslant k(k-1)$. .... 5 баллов
(B1) В оценке разобран случай $m \leqslant k-1$. .... 1 балл
(B2) В оценке разобран случай $m \geqslant k+1$. .... 1 балл
(B3) В оценке разобран случай $m = k$. .... 2 балла

В случае не полностью доказанной части «Оценка» баллы за частичные продвижения (B1), (B2), (B3) суммируются. Набранные баллы по частям (A) («Пример») и (B) («Оценка») суммируются.

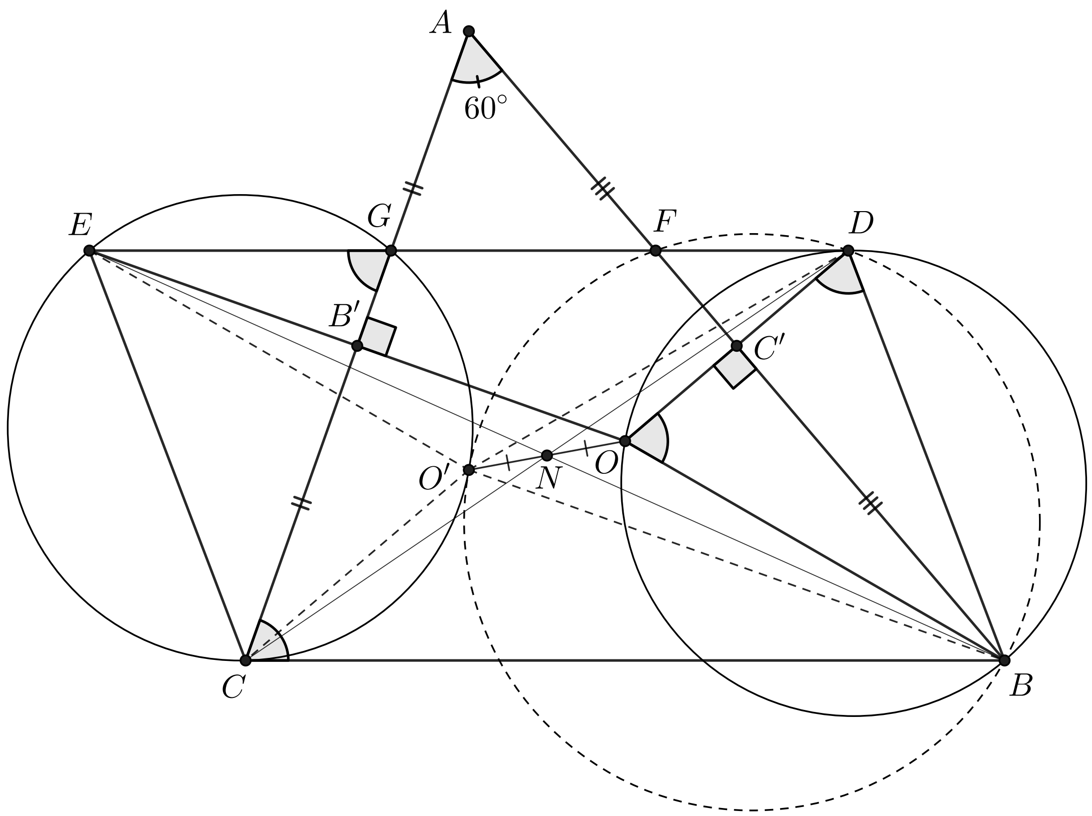
10.9. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 60^\circ$. Точки D и E симметричны его центру описанной окружности O относительно сторон AB и AC соответственно. Прямая DE пересекает отрезки AB и AC в точках F и G соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BDF и CEG касаются.

Решение. Пусть B' и C' — середины AC и AB. Тогда $B'C'$ — средняя линия в треугольнике ODE, поэтому $DE \parallel B'C' \parallel BC$ и $DE = 2B'C' = BC$. Значит, $CEDB$ — параллелограмм.

Далее, $\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOA = \angle BCA = \angle CGE$. Тем самым дуги BOD и CGE равны по величине и построены на противоположных сторонах параллелограмма $CEDB$ внутрь него. Следовательно, эти дуги симметричны относительно центра параллелограмма N. Значит, дуга CGE проходит через точку O', симметричную точке O относительно N, Аналогично, O' лежит на окружности (BDF).

Остается доказать касание окружностей. Для этого достаточно установить равенство $\angle DO'E = \angle DBO' + \angle O'CE$ (тогда касательная m, проведенная к $(BDFO')$ в точке O' будет составлять с $O'E$ угол равный $\angle O'CE$, а значит, m будет являться и касательной к $(CGEO')$).

Используя симметрию относительно N и относительно прямых AB и AC, получаем $\angle DO'E = \angle COB = 120^\circ$, а также $\angle DBO' = \angle CEO = \angle EOC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC$ и аналогично $\angle O'CE = \angle BCA$. Видим, что $\angle DBO' + \angle O'CE = \angle ABC + \angle BCA = 120^\circ = \angle DO'E$. Тем самым доказательство завершено.



Замечание. Можно решить задачу, используя другие описания точки касания. Например, определим O' как вторую точку пересечения окружностей (BOC) и (FOG). Тогда из счета углов (с использованием вписанных четырехугольников) можно получить $\angle GO'C + \angle GOC = 180^\circ$, значит окружности $(GO'C)$ и (GOC) симметричны относительно GC, т.е. окружность $(GO'C)$ совпадает с нашей окружностью (GEC). Аналогично $(FO'B)$ совпадает с окружностью (FDB).

Далее $\angle CO'B = \angle COB = 120^\circ$, а $\angle CGO' + \angle O'FB = \angle CGO' + \angle O'GO - \angle O'FO + {} + \angle O'FB = \angle CGO + \angle OFB = \angle EGC + \angle BFD = \angle BCA + \angle ABC = 120^\circ$. Получили равенство $\angle CO'B = \angle CGO' + \angle O'FB$, которое доказывает касание наших окружностей (CGO') и (BFO').

Также можно доказать, что наша точка касания O' на самом деле является ортоцентром треугольника ABC.

(A) Найдено (и обосновано) одно из перечисленных в решении и замечании описание общей точки окружностей BDF и CEG (но касание не доказано). .... 3 балла

10.10. Дан многочлен f третьей степени с целыми коэффициентами, причём старший коэффициент f равен 1 или -1. Известно, что f имеет три различных корня, каждый из которых равен квадрату натурального числа. Докажите, что в последовательности значений $|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$, ... встретится квадрат натурального числа.

Решение. Из условия следует, что $f(x) = \pm(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)$, где a, b, c — натуральные числа. Далее, не умаляя общности, считаем, что $a \leqslant b \leqslant c$.

Положим $n = ac+bc-ab$. Очевидно, n — натуральное (так как $n > bc-ab = b(c-a) \geqslant 0$). Тогда $n-a^2 = ac+bc-ab-a^2 = (a+b)(c-a)$, $n-b^2 = ac+bc-ab-b^2 = (a+b)(c-b)$, $n-c^2 = ac+bc-ab-c^2 = (a-c)(c-b)$. Тогда $f(n) = \mp(a+b)^2(c-a)^2(c-b)^2$, что нам и подходит.

(A) За переформулировку без многочлена (в терминах выражения $(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)$) .... баллы не начисляются

(B) За нахождение значений 0 (в точках $x = a^2$, $x = b^2$, $x = c^2$) ... баллы не начисляются

(C) Отмечено, что $|f(0)|$ — точный квадрат .... баллы не начисляются

(D) Отмечено, что $|f(-ab-bc-ca)|$ — квадрат натурального числа. .... 2 балла

(E) Верно найдено нужное целое значение n, но не доказано, что оно положительно .... снимается 1 балл

11 класс

11.6. Существуют ли такие составные натуральные числа $m > n > 1$, что у чисел m, n, $m+n$ и $m-n$ наибольший делитель, отличный от самого числа, одинаковый?

Ответ: Существуют.

Решение. Положим $m = 22$, $n = 55$. Тогда $m + n = 77$ и $m - n = 33$, у каждого из четырёх чисел наибольший делитель, отличный от самого числа, равен 11.

Замечание. Несложно показать, что все примеры имеют вид $n = 2A, m = 5A$, где $A > 1$ — натуральное число, не кратное 2, 3, 5 и 7.

(A) Отсутствие обоснования верного примера .... баллы не снимаются

(A1) Арифметические ошибки при вычислении верного примера, не влияющие на суть решения .... баллы не снимаются

(B) Приведён верный пример, а также ещё и хотя бы один неверный пример, про который ошибочно утверждается, что этот пример правильный .... 4 балла

(Z) Нет верного примера .... 0 баллов

11.7. По кругу расставили 2026 попарно различных иррациональных чисел и для каждой пары стоящих рядом чисел a и b вычислили значение выражения $\dfrac{ab}{a-b}$. Может ли ровно одно из 2026 полученных значений быть иррациональным?

Ответ: Не может.

Решение 1. Заметим, что для ненулевых $a \neq b$ число

$$f(a,b) = \frac{ab}{a-b}$$

рационально в том и только в том случае, когда рационально обратное число $\frac{a-b}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$. Обозначим числа, расставленные по кругу, через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $n = 2026$ и предположим, что рациональные значения были получены для всех пар, кроме пары a_n, a_1. Тогда, в силу сказанного выше, числа $\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3}, \ldots, \dfrac{1}{a_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}$ — все рациональные. Следовательно, их сумма $\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_n}$ — тоже рациональное число, а это означает, что число $f(a_n, a_1)$ также рационально, противоречие.

Решение 2. Как и в первом решении, положим $f(a,b) = \frac{ab}{a-b}$. Покажем, что если числа $f(a,b) = x$ и $f(b,c) = y$ рациональны, то число $f(a,c)$ тоже рационально. Мы знаем, что $ab = ax - bx$ и $bc = by - cy$, откуда $a = \frac{bx}{x-b}$ и $c = \frac{by}{y+b}$. Отметим, что знаменатели отличны от нуля, поскольку числа x и y рациональны, а число b иррационально, а также $x \neq -y$, поскольку $a \neq c$. Таким образом

$$f(a,c) = \frac{\frac{bx}{x-b} \cdot \frac{by}{y+b}}{\frac{bx}{x-b} - \frac{by}{y+b}} = \frac{b^2xy}{bx(y+b) - by(x-b)} = \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{Q}.$$

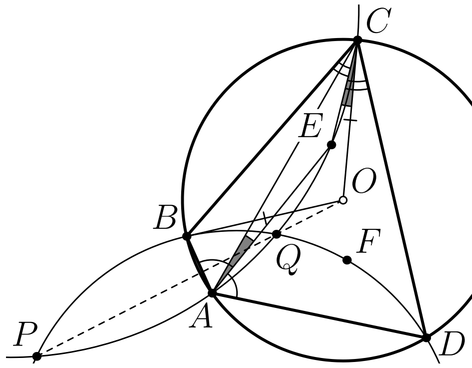
Перейдём к решению задачи. Обозначим числа, расставленные по кругу, через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n = 2026$. Пусть числа $f(a_i, a_{i+1})$ рациональны при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Поскольку $f(a_1, a_2) \in \mathbb{Q}$ и $f(a_2, a_3) \in \mathbb{Q}$, то $f(a_1, a_3) \in \mathbb{Q}$. Так как ещё и $f(a_3, a_4) \in \mathbb{Q}$, получаем, что $f(a_1, a_4) \in \mathbb{Q}$. Продолжая это рассуждение, мы получаем, что все числа $f(a_1, a_i)$ рациональны, в частности, число $f(a_1, a_n)$, противоречие.

(A) В решениях, аналогичных приведённым выше, отсутствуют пояснения о том, что знаменатели отличны от нуля ($ab \neq 0$ в первом решении и $b - x \neq 0$, $x + y \neq 0$ во втором решении) .... баллы не снимаются

(B) Промежуточные вычисления содержат деление на выражение, которое может быть равно нулю .... не более 4 баллов

11.8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке E, а биссектрисы углов B и D — в точке F, причём точки O, E и F лежат внутри четырёхугольника. Описанные окружности треугольников ACE и BDF пересекаются в точках P и Q. Докажите, что точки O, P и Q лежат на одной прямой.

Решение. Можно считать, что точка E лежит в той же полуплоскости относительно прямой AC, что и точка D. Пусть углы BAD и BOC равны соответственно 2α и 2β. Тогда вписанный угол CAB равен β. Значит, $\angle EAC = \angle EAB - \angle CAB = \alpha - \beta$. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\angle BCE = 90^\circ - \alpha$. Из равнобедренного треугольника BOC находим $\angle BCO = 90^\circ - \beta$. Поэтому $\angle ECO = \angle BCO - \angle BCE = \alpha - \beta$, следовательно $\angle EAC = \angle ECO$, то есть окружность (ACE) касается прямой OC. Аналогично, окружность (BDF) касается прямой OB. Таким образом, степени точки O относительно этих окружностей равны OC^2 и OB^2 соответственно. Значит, точка O лежит на их радикальной оси, то есть прямой PQ.



Комментарии.

1. Поскольку $\angle EAC = \alpha - \beta$, то в разбираемом расположении точек $\alpha > \beta$. Поэтому $\angle BCO = 90^\circ - \beta > 90^\circ - \alpha = \angle BCE$, то есть точка O лежит внутри угла DCE, и вычисление $\angle ECO = \angle BCO - \angle BCE = \alpha - \beta$ корректно.

2. Можно показать, что на прямой PQ также лежит и точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

3. Хорошо известно, что внутренние биссектрисы четырёхугольника $ABCD$ образуют четырёхугольник, вписанный в окружность. Аналогичное верно и для внешних биссектрис четырёхугольника. Тогда можно показать, что центры получившихся окружностей лежат на прямой PQ, кроме того, это верно не только для вписанных четырёхугольников $ABCD$, а для любых выпуклых.

4. Как обычно, через (XYZ) обозначается описанная окружность треугольника XYZ.

(A) Требуемое в задаче переформулировано в терминах равенства степеней точки O относительно окружностей (ACE) и (BDF) .... баллы не начисляются

(B) Заявлено, что прямая OC касается окружности (ACE) .... 1 балл

(C) Доказано, что прямая OC касается окружности (ACE) .... 3 балла

(C′) Указано, что касание следует из подсчёта углов, но сам подсчёт углов не приведён .... 0 баллов

(C1) Доказано равенство углов EAC и ECO или иное равенство углов, из которого следует касание (C), но вывод про касание не сделан .... 1 балл

(C0) Подсчеты углов без дальнейших продвижений .... 0 баллов

(D) Из утверждения (B) и аналогичного ему для окружности (BDF) выведено решение задачи .... 2 балла

(M) Доказано, что степени точки O относительно окружностей (ACE) и (BDF) равны, но вывод о коллинеарности точек O, P, Q отсутствует .... снимается 1 балл

Штраф (M) применяется при отсутствии вывода о том, что точки O, P, Q лежат на одной прямой в полном решении или в частичном продвижении (D). Например, в работе сказано, что степени точки O относительно окружностей равны, это и требовалось доказать, однако нигде не указывалось, что такое равенство степеней равносильно требуемому в задаче или что PQ — радикальная ось двух окружностей.

С другой стороны, если без дополнительных пояснений утверждается, что из равенства степеней точки O относительно окружностей следует, что точки O, P, Q лежат на одной прямой, баллы НЕ снимаются.

(X) Доказано, что точка пересечения AC и BD лежит на PQ .... 0 баллов

(G) Нет объяснений о расположении точек O, E, F (например, как в пункте 1 замечания) .... баллы не снимаются

Баллы за части (A), (B), (C) суммируются.

11.9. Даны натуральные числа $n > k \geqslant 2$. В клетчатом квадрате $n \times n$ закрашено несколько клеток. В каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одна закрашенная клетка, причём в каждом ряду (строке или столбце) закрашенные клетки идут подряд. Известно, что нет целиком закрашенного квадрата $k \times k$. Какое наибольшее число клеток может быть закрашено?

Ответ: $2n(k-1)-(k-1)^2$.

Решение. *Пример.* Закрасим верхние $k-1$ строку и левый $k-1$ столбец. Тогда будет закрашено ровно $2n(k-1)-(k-1)^2$ клеток в соответствии с условием задачи.

Оценка. Пусть закрашенных клеток не меньше, чем $2n(k-1)-(k-1)^2+1$. Покажем, что есть полностью закрашенный квадрат $k \times k$. Отметим в каждой строке $k-1$ самых левых закрашенных клеток. Если в какой-то из строк закрашено меньшее число клеток, отмечаем все закрашенные клетки этой строки. Таким образом, отмечено не более $n(k-1)$ закрашенных клеток, причем в первых $k-1$ столбцах отмечены все закрашенные клетки.

Тогда закрашенных, но не отмеченных клеток не меньше, чем

$$2n(k-1)-(k-1)^2+1-n(k-1)=(n-k+1)(k-1)+1.$$

Следовательно, в каком-то из оставшихся $n-k+1$ столбцов есть хотя бы k закрашенных не отмеченных клеток. Выберем в таком столбце верхнюю и нижнюю из таких клеток, обозначим их через A и B соответственно.

Рассмотрим клетчатый прямоугольник, у которого горизонтальная сторона равна k, правая верхняя угловая клетка — клетка A, правая нижняя угловая клетка — клетка B. Тогда вертикальная сторона такого прямоугольника ℓ не меньше, чем k. Пусть A_1 — его верхняя левая угловая клетка. Тогда A_1 лежит в одной строке с клеткой A, причём клетка A закрашена и не отмечена. Значит, $k-1$ клетка в этой строке левее клетки A закрашены, поэтому обязательно закрашена клетка A_1. Аналогично, и нижняя угловая клетка рассмотренного прямоугольника $k \times \ell$ закрашена, следовательно, этот прямоугольник закрашен целиком. Поскольку $\ell \geqslant k$, мы можем выделить и целиком закрашенный квадрат $k \times k$, что и требовалось.

(A) Ответ и пример $2n(k-1)-(k-1)^2$ закрашенных клеток, удовлетворяющий условию задачи .... 2 балла

(AM) Ошибка в подсчёте ответа. В частности, если в качестве ответа указано число, отличающееся от верного ответа на 1 .... снимается 1 балл за часть (A)

(B) Оценка, то есть доказательство, что если закрашены хотя бы $2n(k-1)-(k-1)^2+1$ клеток, то можно найти закрашенный целиком квадрат $k \times k$ .... 5 баллов

(B0) Сведение к случаю, когда в каждом ряду закрашена хотя бы $k-1$ клетка .. 0 баллов

(B1) Закрашенные клетки разбиты на две группы, отмеченные и не отмеченные, как в приведённом решении .... 1 балл

(BM) Оценка доказывается в предположении, что в каждой строке отмечена ровно $k-1$ клетка (и сведение к этому случаю отсутствует) .... снимается 1 балл за часть (B)

(B2) Доказано, что в каком-то столбце есть хотя бы k закрашенных не отмеченных клеток, если всего закрашено хотя бы $2n(k-1)-(k-1)^2+1$ клеток .... 1 балл

(B3) Доказано, что существует полностью закрашенный квадрат $k \times k$, у которого найденный в (B2) столбец — крайний правый .... 3 балла

(B3a) Доказано, что не отмеченные закрашенные клетки в каждой вертикали идут подряд .... 1 балл

(B3b) Утверждение (B3) сформулировано, но не доказано. Например, без доказательства используется (B3a) .... 1 балл

Продвижения (B3), (B3a), (B3b) не суммируются. Остальные продвижения (и штрафы) по оценке суммируются между собой и суммируются с баллами за пример.

11.10. Пусть a, b, c — положительные числа, причём $a+b+c=3$. Докажите, что

$$\frac{a}{b^4+2b}+\frac{b}{c^4+2c}+\frac{c}{a^4+2a}\geqslant 1.$$

Решение 1. Заметим, что

$$\frac{a}{b^4+2b}=\frac{a}{b}-\frac{2ab^2}{b^3+2}\geqslant \frac{a}{b}-\frac{2ab^2}{3b}=\frac{a}{b}-\frac{2}{3}ab. \quad (\star)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $b^3+2=b^3+1+1\geqslant 3\sqrt[3]{b^3\cdot 1\cdot 1}=3b$. Оценим две другие дроби аналогично. По неравенству о средних

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3.$$

Кроме того, из неравенства Коши мы получаем, что

$$3(ab+bc+ca)=ab+bc+ca+2ab+2bc+2ac\leqslant$$
$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2=9,$$

Поэтому $ab+bc+ca\leqslant 3$. Собирая все оценки вместе, получаем требуемое неравенство:

$$\frac{a}{b^4+2b}+\frac{b}{c^4+2c}+\frac{c}{a^4+2a}\geqslant \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{2}{3}\left(ab+bc+ca\right)\geqslant 3-\frac{2}{3}\cdot 3=1.$$

Решение 2. По неравенству о средних: $3=a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, поэтому $abc\leqslant 1$. Тогда заметим, что

$$\frac{a}{b^4+2b}\geqslant \frac{a}{\frac{b^4}{abc}+2b}=\frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{b}{c}+2\cdot\frac{a}{b}}=T. \quad (\star\star)$$

Положим $\frac{a}{b}=x$, $\frac{b}{c}=y$, $\frac{c}{a}=z$, отметим, что $xyz=1$. В новых обозначениях

$$T=\frac{x^2}{y+2x}.$$

Оценивая аналогично два других слагаемых, нам остаётся доказать, что

$$\frac{x^2}{2x+y}+\frac{y^2}{2y+z}+\frac{z^2}{2z+x}\geqslant 1. \quad (\star\star\star)$$

Заметим, что по неравенству о средних $x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}=3$. Наконец, применим к сумме дробей неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$\frac{x^2}{2x+y}+\frac{y^2}{2y+z}+\frac{z^2}{2z+x}\geqslant \frac{(x+y+z)^2}{2x+y+2y+z+2z+x}=\frac{x+y+z}{3}\geqslant 1.$$

Критерии оценивания для решения 1. Решение разбивается на 3 части:

(A) — оценка $(\star)$;

(B) — оценка выражения $a/b+b/c+c/a$ и сведение к неравенству $ab+bc+ca\leqslant 3$;

(C) — доказательство неравенства $ab+bc+ca \leqslant 3$.

Продвижения за части (A), (B), (C) суммируются. Баллы внутри каждой из частей друг с другом не суммируются.

(A) Доказана оценка $(\star)$ .... 3 балла

(A1) Сформулирована оценка $(\star)$ .... 1 балл

(A2) Приведён рабочий план доказательства оценки $(\star)$ с ошибками в переходах или без достаточных обоснований некоторых неравенств .... 2 балла

Примеры применения критерия (A2).

- *При доказательстве оценки* $(\star)$ *неравенство* $2ab^2/(b^3+2) \leqslant 2ab^2/(3b)$ *не поясняется или доказывается неверно.*
- *Неравенство* $b^3+2 \geqslant 3b$ *при* $b>0$ *используется без доказательства.*

(B) Задача сведена к доказательству неравенства $ab+bc+ca \leqslant 3$ .... 2 балла

(B0) После оценки $(\star)$ без дополнительных пояснений утверждается, что достаточно доказать неравенство $ab+bc+ca \leqslant 3$ .... 0 баллов

(B1) Неравенство $a/b+b/c+c/a \geqslant 3$ при $a,b,c>0$ используется без доказательства или формулируется как известный факт .... баллы не снимаются

(B2) После оценки $(\star)$ указано, что $a/b+b/c+c/a \geqslant 3$, при этом отсутствует вывод, что теперь достаточно доказать неравенство $ab+bc+ca \leqslant 3$ .... 1 балл

(C) После оценки $(\star)$ доказано неравенство $ab+bc+ca \leqslant 3$ .... 2 балла

Примеры применения критерия (C).

- *Неравенство* $ab+bc+ca \leqslant 3$ *использовано без обоснования или сформулировано как известный факт — ставится 0 баллов.*
- *Неравенство* $ab+bc+ca \leqslant 3$ *доказано с неточностями или пробелами в обоснованиях — ставится не более 1 балла.*
- *Неравенство* $ab+bc+ca \leqslant 3$ *доказано, но в работе нет оценки* $(\star)$ *— ставится 0 баллов.*

Критерии оценивания для решения 2.

(P) Доказана оценка $(\star\star)$ .... 2 балла

(Q) После замены переменных задача сведена к неравенству $(\star\star\star)$ .... 2 балла

(R) Доказательство неравенства $(\star\star\star)$ .... 3 балла

(Z) Доказано, что $abc \leqslant 1$ .... 0 баллов

(Z$'$) Сформулировано, что $abc \leqslant 1$ и далее используется без дополнительных пояснений .... баллы не снимаются

(M1) Используется, что $abc \leqslant 1$, но этот факт даже не формулируется ... снимается 1 балл

(M2) Неравенство доказано при условии $abc=1$, а не $a+b+c=3$ ...... снимается 2 балла

Продвижения по частям (P), (Q), (R) суммируются друг с другом и со штрафами (M). При этом сами штрафы (M1) и (M2) не суммируются.