Материалы для проведения регионального этапа

LII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2025–2026 учебный год

Первый день

2–3 февраля 2026 года

Москва, 2026

Сборник содержит материалы для проведения III этапа LII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2025–2026 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2025–2026 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **2 февраля 2026 г.** (I тур) и **3 февраля 2026 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2025–2026 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

9 класс

9.1. Числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2<(a-b)^2$ и $b^2+c^2<(b-c)^2$. Докажите, что $a^4+c^4<$ $<(a+c)^4$.

Решение. По условию, $a^2+b^2<(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, поэтому $ab<0$. Аналогично, $bc<0$. Таким образом, числа a и b разных знаков, и числа b и c также разных знаков. Поэтому числа a и c одного знака и, значит, $ac>0$. Следовательно, $(a+c)^4-(a^4+$ $+c^4)=4a^3c+6a^2c^2+4ac^3>0$, поскольку каждое слагаемое положительно. Отсюда $(a+c)^4>a^4+c^4$.

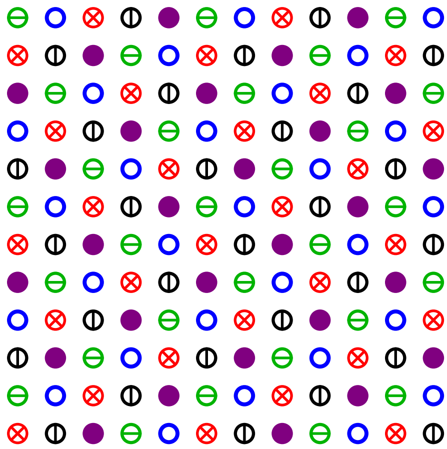
($\star$) Разбор лишь частных случаев, навример, конкретных значений a, b и c . . . . . . 0 баллов

9.2. В клетчатом квадрате 11×11 отметили все 144 вершины клеток. Затем отмеченные точки раскрасили в пять цветов. При каком наибольшем d могло оказаться, что расстояние между любыми двумя одноцветными отмеченными точками не меньше d?

Ответ: $d=\sqrt{5}$.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим в нашем квадрате любые две клетки, имеющие общую сторону. У них всего 6 вершин; расстояние между любыми двумя из них не превосходит $\sqrt{5}$. Но какие-то из этих двух точек имеют один и тот же цвет, так что в любом случае найдутся две одноцветных точки на расстоянии, не большем $\sqrt{5}$.

Пример. На самом деле, можно раскрасить не только данные 144 точки, но и все вершины клеток бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы расстояния между одноцветными точками было не меньше $\sqrt{5}$. Пример такой раскраски приведён на рисунке ниже (она переходит в себя при сдвиге на 5 вдоль любой из координатных осей). В этой раскраске одним цветом окрашены все точки с целыми координатами (x,y), для которых число $2x+y$ даёт фиксированный остаток при делении на 5.



Замечание. Как ни странно, существуют и другие способы доказать оценку. Например, можно заметить, что точек одного из цветов не меньше 29; однако все точки нетрудно разбить даже на 24 группы, в каждой из которых точки удалены друг от друга не более чем на $\sqrt{5}$ (например, это можно сделать так, чтобы в каждой группе точки были вершинами двух клеток, имеющих общее ребро). Значит, в одной из групп окажутся две точки нашего цвета, и расстояние между ними будет не больше $\sqrt{5}$.

(О) Доказательство того, что $d\leqslant\sqrt{5}$ . . . . 4 балла

(О$'$) Неточная оценка — доказательство того, что d не превышает некоторой константы c, которая не меньше $\sqrt{5}$ . . . . не оценивается

(П) Пример раскраски точек, для которой $d=\sqrt{5}$ . . . . 3 балла

При верном примере проверка того, что он подходит, не требуется!

(П$'$) Неоптимальный пример, в котором достигается лишь некоторое значение $d<\sqrt{5}$ . . . . не оценивается

9.3. Петя и Вася играют в игру. В начале игры на столе лежат 1000 куч, состоящих из 1, 2, 3, 4, …, 999, 1000 спичек соответственно. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из мальчиков своим ходом может взять любое ненулевое количество спичек из кучи с наибольшим количеством спичек (ровно из одной из таких куч, если их несколько). Выигрывает тот, кто заберёт последнюю спичку. Кто из мальчиков может играть так, чтобы гарантированно выиграть?

Ответ: Петя.

Решение 1. Опишем стратегию, позволяющую Пете гарантированно забрать последнюю спичку. Для этого он на каждом ходе будет делать так, чтобы количество куч, содержащих максимальное количество спичек, было чётным (такие позиции будем называть *правильными*).

Докажем, что (1) перед каждым ходом Пети позиция будет неправильной, и (2) он всегда сможет сделать ход, добившись правильной позиции. На первом ходе Пете достаточно взять 1 спичку (из кучи с 1000 спичками), добившись правильной позиции.

Далее, если перед ходом Васи позиция правильная, то после его хода хотя бы одна из наибольших куч останется нетронутой, то есть наибольшее число спичек в куче не изменится. При этом их количество уменьшится ровно на 1, то есть позиция перед ходом Пети станет неправильной.

Пусть теперь перед ходом Пети позиция неправильная, причём в ней ровно a кучек, содержащих максимальное количество спичек (число a нечётно). Если $a > 1$, то Петя, например, забирает полностью одну из максимальных кучек, и позиция становится правильной (в ней $a - 1$ максимальная кучка).

Если же $a = 1$, то пусть k — число спичек в следующей за максимальной по величине непустой кучке, и пусть кучек, содержащих k спичек, ровно b (если других непустых кучек нет, то $b = 0$). Если число b чётно, то Петя просто заберёт наибольшую кучку (в частности, если других кучек нет, то Петя заберёт последнюю спичку). Если же b нечётно, то Петя забирает столько спичек, чтобы в кучке осталось k спичек, и таких кучек станет $b + 1$; во всех случаях позиция снова станет правильной.

Итак, Петя всегда сможет поддерживать описанные свойства — в частности, Вася никогда не сможет забрать последнюю спичку (в правильной ситуации это невозможно). Так как число спичек уменьшается, это рано или поздно сделает Петя и выиграет.

Решение 2. Заметим, что игра закончится не более чем за 1000^2 ходов. Тогда у одного из мальчиков обязательно есть выигрышная стратегия. Предположим, что её нет у Пети; тогда она есть у Васи.

Пусть Петя первым ходом возьмёт 1 спичку (из кучи с 1000 спичками), а в ответ Вася (по своей стратегии) возьмёт некоторое количество n спичек из кучи с 999 спичками. По нашему предположению, в получившейся позиции выигрывает Вася, то есть игрок, ходящий вторым.

Но этой же позиции мог добиться Петя, взяв на первом ходе $n + 1$ спичку из кучи с 1000 спичками. Действуя по той же стратегии, он гарантированно выиграет. Полученное противоречие означает, что у Васи нет выигрышной стратегии, а значит, она есть у Пети.

Комментарий. Метод, описанный во втором решении, называется *передачей хода.*

Критерии оценивания для решения 1.

(О) Только ответ .... 0 баллов

(1) Сформулировано понятие правильной позиции и заявлено, что Пете достаточно добиваться правильной позиции на каждом ходе .... 2 балла

(Х) Замечено, что при каждом ходе число наибольших куч уменьшается на 1, если оно было больше 1 .... 1 балл

(2В) Сформулировано и доказано, что при ходе Васи из правильной позиции получается неправильная .... 1 балл

(3П) Сформулировано и доказано, что Петя может получить правильную позицию из неправильной, **если** $a > 1$ .... 1 балл

Если в решении содержится стратегия для случая (3П), однако ***явно не указано****, что она работает только в случае $a > 1$, баллы по критерию (3П)* ***не начисляются.***

(4П) Сформулировано и доказано, что Петя может получить правильную позицию, если $a = 1$ ... 3 балла

Баллы за продвижения (1), (2В), (3П), (4П) суммируются. Баллы за (X) не суммируются с баллами за (2В) и (3П), но суммируются с баллами за (1) и (4П).

Критерии оценивания для решения 2.

(Z) Не поясняется, почему хотя бы у одного из игроков есть выигрышная позиция или без объяснения используется существование структуры выигрышных и проигрышных позиций ... баллы не снимаются

9.4. Существует ли такое натуральное число n, что для каких-то трёх его делителей a, b, c, больших 1, произведение $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на n^2?

Ответ: не существует.

Решение 1. Предположим, что такие n, a, b и c нашлись.

Не умаляя общности, считаем, что $a \leqslant b \leqslant c$. Так как c — делитель числа n, то n^2 делится на c^2. Следовательно, $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на c^2. А поскольку НОД$(c-1, c) = 1$, получаем, что $(a-1)(b-1)$ делится на c^2.

Однако $0 < (a-1)(b-1) < ab \leqslant c \cdot c = c^2$ (в силу $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$), что противоречит делимости $(a-1)(b-1)$ на c^2.

Решение 2. Предположим, что такие n, a, b и c нашлись.

Рассмотрим какой-то простой делитель p числа n. Предположим, что его степень вхождения в n равна α (то есть $\nu_p(n) = \alpha$). Если все числа a, b и c делятся на p, то числа $a-1$, $b-1$, $c-1$ не делятся на p, но тогда и их произведение не делится на p, и следовательно, оно не может делиться и на n^2 — противоречие.

Значит, среди трёх чисел a, b и c на p может делиться не более двух, в разложение каждого из которых p входит не более, чем в степени α (поскольку a, b, c — делители n). Тогда p входит в разложение числа abc в степени не более 2α (то есть $\nu_p(abc) \leqslant 2\alpha$).

Видим, что для каждого простого делителя числа n степень его вхождения в abc не более чем степень его вхождения в n^2 ($\nu_p(abc) \leqslant 2\alpha = \nu_p(n^2)$). А других простых делителей у abc нет. Следовательно, $n^2 \,\vdots\, abc$, откуда $n^2 \geqslant abc$.

Поэтому $0 < (a-1)(b-1)(c-1) < abc \leqslant n^2$, что противоречит делимости $(a-1)(b-1)(c-1)$ на n^2.

(A) Из условия выведено, что $(a-1)(b-1)$ делится на c^2 (или аналогичная делимость) ... 3 балла

(B) Доказано, что НОД$(a, b, c) = 1$ ... баллы не добавляются

(C) Доказано, что $\nu_p(abc) \leqslant \nu_p(n^2)$ ... 3 балла

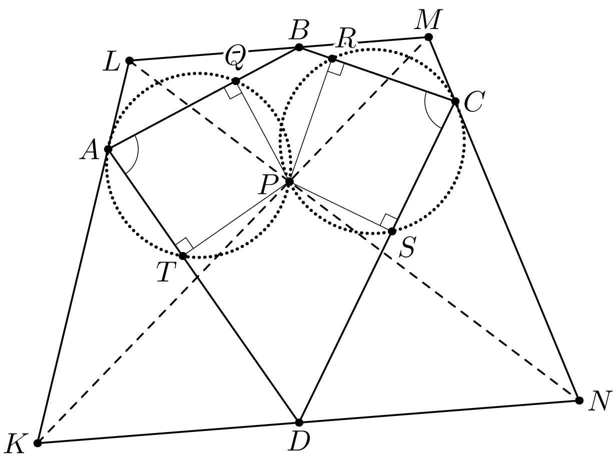
Баллы за продвижения (A) и (C) НЕ суммируются.

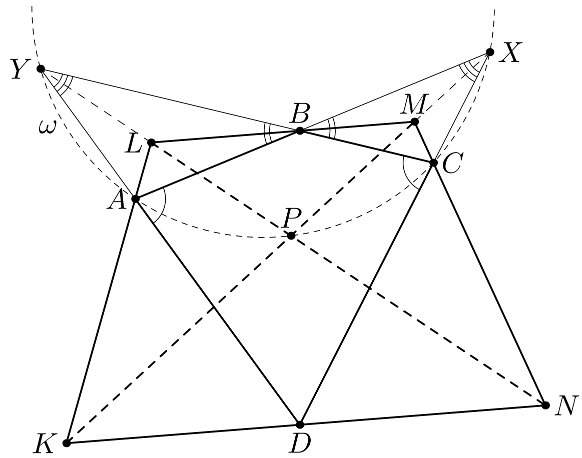
9.5. Выпуклые четырёхугольники $ABCD$ и $KLMN$ расположены так, что прямые KL, LM, MN и NK являются биссектрисами внешних углов A, B, C и D четырёхугольника $ABCD$ соответственно. При этом $ABCD$ не является параллелограммом. Диагонали четырёхугольника $KLMN$ пересекаются в точке P. Докажите, что если $\angle BAD = \angle BCD < 90^\circ$, то $PA = PC$.

Решение 1. Опустим из точки P перпендикуляры PQ, PR, PS и PT на прямые AB, BC, CD и DA соответственно. Заметим, что точка K равноудалена от прямых AB, AD и CD. Аналогично, точка M также равноудалена от AB и CD, и обе точки K и M лежат в том угле между этими прямыми, в котором находится четырёхугольник $ABCD$. Значит, все точки отрезка KM также равноудалены от этих прямых — в частности, точка P, то есть $PQ = PS$, Аналогично, $PR = PT$, и P лежит в том же угле между прямыми BC и AD — то есть P находится внутри четырёхугольника $ABCD$.

Значит, точки Q и T лежат на лучах AB и AD соответственно (а точки R и S — на лучах CB и CD соответственно), так что $\angle QPT = 180^\circ - \angle QAT = 180^\circ - \angle SCR = \angle SPR$, поэтому треугольники QPT и SPR равны по двум сторонам и углу между ними. Наконец, четырёхугольники $AQPT$ и $CSPR$ вписаны в окружности с диаметрами AP и CP соответственно (из прямых углов при вершинах Q, T, R и S). Из равенства треугольников

QPT и SPR следует, что эти окружности равны, а значит, равны из диаметры, что и требовалось доказать.





Решение 2. Если углы B и D четырёхугольника $ABCD$ также равны, то он — параллелограмм, что по условию не так. Пусть без ограничения общности $\angle B > \angle D$. Тогда $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C > 180^\circ$; это означает, что лучи AB и DC пересекаются в некоторой точке X, а лучи DA и CB — в некоторой точке Y. Теперь треугольники BXC и BYA подобны по двум углам, следовательно, $\angle BXC = \angle BYA$, поэтому четырёхугольник $AYXC$ вписанный в некоторую окружность ω.

Точка M — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника BXC, а точка K — это точка пересечения биссектрис внешних углов XAD и XDA треугольника ADX; значит, они обе лежат на биссектрисе угла AXC. Аналогично, LN — это биссектриса угла AYC, а тогда P — это точка пересечения этих биссектрис. Но обе этих биссектрисы проходят через середину дуги AC окружности ω, не содержащей точек X и Y; значит, P и есть эта середина дуги. Тогда хорды AP и PC, стягивающие равные дуги, равны.

Замечание. Утверждение задачи остаётся верным, если $ABCD$ — параллелограмм (в этом случае P — центр симметрии этого параллелограмма).

Замечание. Заметим, что четырёхугольник $KLMN$ является трапецией ($KN \parallel LM$). Поэтому факт из задачи можно переформулировать следующим образом.

Пусть по бильярдному столу в форме трапеции катается шар, отражаясь последовательно от четырёх сторон в одних и тех же четырёх точках. Тогда точки отражения от боковых сторон трапеции равноудалены от точки пересечения её диагоналей.

(1) Замечено только, что точка K лежит на биссектрисе угла между прямыми AB и CD (или аналогичные утверждения) .... 1 балл

(2) Показано, что точка P лежит на биссектрисе угла между AB и CD . 2 балла вместо 1

(3) Замечено, что точки A, C, X и Y лежат на одной окружности .... 2 балла

Баллы, упомянутые выше, не складываются друг с другом.

($\star$) В работе может отсутствовать обоснование того, что конфигурация выглядит именно так, как в работе. Если при этом используются **верные** (и нетрудно обосновываемые) сведения о расположении точек .... баллы не снимаются

К таким сведениям относятся, в частности, следующие:

- *точки A, B, C, D лежат на сторонах $KLMN$;*
- *точка P лежит внутри четырёхугольника $ABCD$;*
- *точки K и M лежат на* ***одной и той же*** *биссектрисе угла между прямыми AB и CD (если уже обосновано, что каждая из них лежит на биссектрисе);*
- *точки Q и T (из первого решения) лежат на лучах AB и AD соответственно;*
- *точки X и Y (из второго решения) лежат по одну сторону от прямой AC;*
- *у четырёхугольника $ABCD$ нет параллельных сторон.*

10 класс

10.1. Даны 6 последовательных натуральных чисел. Докажите, что их можно обозначить (в некотором порядке) буквами a, b, c, d, e, f так, чтобы число $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{d}{e+f}$ было натуральным.

Решение 1. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ — данные натуральные числа. Положим $a=n+1$, $b=n$, $c=n+2$, $d=n+4$, $e=n+3$, $f=n+5$. Тогда $\frac{a}{b+c}=\frac{n+1}{2n+2}=\frac{1}{2}$ и аналогично $\frac{d}{e+f}=\frac{1}{2}$. Видим, что сумма наших дробей равна 1.

Решение 2. Пусть $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ — данные натуральные числа. Положим $a=n$, $b=n+1$, $c=n+4$, $d=n+5$, $e=n+2$, $f=n+3$. Тогда $\frac{a}{b+c}+\frac{d}{e+f}=\frac{n}{2n+5}+\frac{n+5}{2n+5}=1$.

Замечание. Помимо варианта из решения 2 подходят также и другие варианты, в которых пары b и c, e и f, a и d симметричны относительно середины отрезка $[n, n+5]$; в таком случае $b+c=e+f=a+d$, и наша сумма дробей равна 1.

(A) Предъявлено обозначение чисел, которое работает (даже без явного вычисления $\frac{a}{b+c}+$ $+\frac{d}{e+f}$) .... 7 баллов

(B) Приведены частные примеры, но не ясно, как они обобщаются для произвольного n .... 3 балла

10.2. У Даши и у Саши есть по доске 9×9. Даша укладывает на свою доску 40 не перекрывающихся плиток 1×2 (так, что плитки занимают 80 клеток, а одна клетка остается не покрытой). Пусть у нее есть D способов сделать это. Саша красит на своей доске 41 единичных отрезков-границ между соседними клетками, так, чтобы для каждой клетки доски хотя бы одна ее сторона была покрашена. Пусть у Саши S способов сделать это. Докажите, что $S \leqslant 2D$.

Решение. Рассмотрим одну из S Сашиных покрасок. В ней каждый из 41 покрашенных отрезков принадлежит двум клеткам. Поскольку на доске всего $81=2\cdot 41-1$ клеток, видим, что у всех клеток, кроме некоторой одной клетки K, покрашена ровно одна сторона, а у клетки K покрашены две стороны. Пусть в клетке K покрашены стороны a и b, где a — граница между клетками K и A, а b — граница между клетками K и B.

Сопоставим этой Сашиной покраске две Дашиных укладки следующим образом. Первая укладка такая: забудем про отрезок a и положим 40 доминошек 1×2, у которых средними линиями служат все покрашенные Сашей отрезки, кроме a. (Понятно, что доминошки не перекрываются, так как иначе, если две доминошки имели бы общую клетку, то у этой клетки нашлись бы две покрашенные стороны.) Аналогично забудем про отрезок b и получим вторую Дашину укладку.

С другой стороны, при указанном сопоставлении конкретная Дашина укладка сопоставлена не более чем четырем Сашины покраскам, так как в такой Сашиной покраске обязательно покрашены 40 единичных отрезков — средних линий Дашиных доминошек, а кроме того, покрашена одна из сторон клетки, не покрытой Дашиными доминошками (а таких сторон — 2, 3 или 4).

Итак, каждой из S Сашиных покрасок поставлено в соответствие ровно две из D Дашиных укладок, а каждая из D укладок соответствует не более чем четырем Сашиным покраскам. Отсюда $2S \leqslant 4D$, и мы получили $S \leqslant 2D$, что и требовалось.

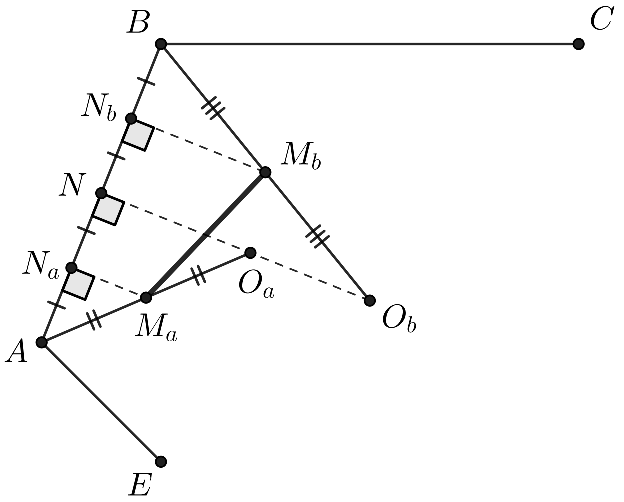
(A) Предъявлено соответствие «покраска → укладка» либо «укладка → покраска» из решения .... 4 балла

Если в работе имеется верное соответствие, за пробелы в доказательстве того, что каждой покраске соответствуют ровно две укладки, а каждой укладке — не более четырех покрасок, может быть снято до 3 баллов (в зависимости от величины пробела), т.е. такая работа оценивается в 4 — 7 баллов.

10.3. Периметр выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равен 2. Пусть O_a, O_b, O_c, O_d, O_e — центры описанных окружностей треугольников EAB, ABC, BCD, CDE, DEA соответственно. Пусть M_a, M_b, M_c, M_d, M_e — середины отрезков AO_a, BO_b, CO_c, DO_d, EO_e соответственно. Докажите, что

$$M_aM_b + M_bM_c + M_cM_d + M_dM_e + M_eM_a \geqslant 1.$$

Решение. Достаточно доказать, что $M_aM_b \geqslant \frac{1}{2}AB$. Действительно, тогда сложив это неравенство и четыре аналогичных (для сторон BC, CD, DE, EA), получим (с учетом $AB + BC + CD + DE + EA = 2$) требуемое неравенство.



Заметим, что O_a лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, иначе говоря, проекция точки O_a на прямую AB совпадает с серединой N отрезка AB. Тогда проекция точки M_a на прямую AB совпадает с серединой N_a отрезка AN. Аналогично, проекция точки M_b на прямую AB совпадает с серединой N_b отрезка BN. Так как длина отрезка не меньше длины его проекции, имеем $M_aM_b \geqslant N_aN_b = \frac{1}{2}AB$. Это мы и хотели установить.

(A) Заявлено (но не доказано или доказано неверно), что $M_aM_b \geqslant \frac{1}{2}AB$ (или аналогичное неравенство) .... 3 балла

(B) Правильно описана проекция точки M_a на AB .... 2 балла

Баллы за продвижения (A) и (B) суммируются.

10.4. Существует ли такое натуральное число n, что для каких-то трёх его делителей a, b, c, больших 1, произведение $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на n^2?

Ответ: не существует.

Решение 1. Предположим, что такие n, a, b и c нашлись.

Не умаляя общности, считаем, что $a \leqslant b \leqslant c$. Так как c — делитель числа n, то n^2 делится на c^2. Следовательно, $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на c^2. А поскольку НОД$(c-1, c) = 1$, получаем, что $(a-1)(b-1)$ делится на c^2.

Однако $0 < (a-1)(b-1) < ab \leqslant c \cdot c = c^2$ (в силу $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$), что противоречит делимости $(a-1)(b-1)$ на c^2.

Решение 2. Предположим, что такие n, a, b и c нашлись.

Рассмотрим какой-то простой делитель p числа n. Предположим, что его степень вхождения в n равна α (то есть $\nu_p(n) = \alpha$). Если все числа a, b и c делятся на p, то числа $a-1$, $b-1$, $c-1$ не делятся на p, но тогда и их произведение не делится на p, и следовательно, оно не может делиться и на n^2 — противоречие.

Значит, среди трёх чисел a, b и c на p может делиться не более двух, в разложение каждого из которых p входит не более, чем в степени α (поскольку a, b, c — делители n). Тогда p входит в разложение числа abc в степени не более 2α (то есть $\nu_p(abc) \leqslant 2\alpha$).

Видим, что для каждого простого делителя числа n степень его вхождения в abc не более чем степень его вхождения в n^2 ($\nu_p(abc) \leqslant 2\alpha = \nu_p(n^2)$). А других простых делителей у abc нет. Следовательно, $n^2 \vdots abc$, откуда $n^2 \geqslant abc$.

Поэтому $0 < (a-1)(b-1)(c-1) < abc \leqslant n^2$, что противоречит делимости $(a-1)(b-1)(c-1)$ на n^2.

(A) Из условия выведено, что $(a-1)(b-1)$ делится на c^2 (или аналогичная делимость) . . . . 3 балла

(B) Доказано, что НОД$(a,b,c)=1$ . . . . баллы не добавляются

(C) Доказано, что $\nu_p(abc) \leqslant \nu_p(n^2)$ . . . . 3 балла

Баллы за продвижения (A) и (C) НЕ суммируются.

10.5. В Средиземье 1000 графств, в одном из которых находится волшебное Кольцо. Раз в день Маг может выбрать любое подмножество графств, и получить от волшебного Камня ответ, есть ли Кольцо в одном из этих графств. Камень может ошибиться, но никогда не ошибается два дня подряд. Маг может совершать данное действие некоторое количество дней, после чего он должен отправить гонцов в некоторые k графств, в одном из которых наверняка находится Кольцо. При каком наименьшем k Маг может это сделать?

Ответ: 2.

Решение. *Оценка.* Покажем, что при $k=1$ Маг не сможет гарантированно найти Кольцо.

Назовём одно из графств без Кольца лжеграфством. Пусть Камень отвечает на нечётных вопросах так, будто Кольцо в истинном графстве, а на чётных — будто оно во лжеграфстве. Тогда какие бы графства Маг ни загадывал, будут возможны две ситуации: Кольцо в истинном графстве или во лжеграфстве. Действительно, в первом случае Камень отвечает верно по крайней мере на нечётных вопросах, во втором — на чётных. Поэтому Маг не сможет отличить эти ситуации ни за какое количество вопросов.

Пример. Покажем, как Маг может гарантированно разыскать Кольцо при $k=2$. Выберем какие-то два графства A и B: первое и второе. Зададим подряд вопросы про A, B, B, A.

1. Если Камень на первые два вопроса ответил соответственно «да» и «нет», то т.к. среди этих ответов был хотя бы один верный, в графстве B гарантированно нет Кольца.

2. Если он ответил «нет» и «да», в A нет Кольца.

3. Если Камень на первые два вопроса ответил «да» и «да», то т.к. среди этих ответов был хотя бы один верный, Маг сразу отправит гонцов в A и B.

4. Если Камень на первые два вопроса ответил «нет» и «нет», смотрим на третий вопрос. Если ответ «нет», то поскольку среди второго и третьего ответов был хотя бы один верный, в B графстве нет Кольца.

Если же ответ на третий вопрос — «да», смотрим на четвертый вопрос. Если ответ «да», получаем с двумя последними вопросами такую же ситуацию, как в случае 3. Если ответ «нет», получаем ситуацию из случая 1.

В результате таких действий с двумя графствами A и B Маг либо немедленно найдет Кольцо, либо сможет понять про одно из них, что в нём кольца нет. Тем самым, задача сведена к той же задаче с меньшим числом графств. Повторяя такие действия, Маг добьётся требуемого.

(Z) Только ответ (без обоснований или с неверным обоснованием) . . . . 0 баллов

(A) Доказано только, что при $k=1$ гарантированно отыскать графство с Кольцом не удастся . . . . 1 балл

(B) Приведён и обоснован верный алгоритм для $k=2$, как Магу выиграть . . . . . . 5 баллов

(За пробелы в обосновании алгоритма баллы за часть (B) могут быть снижены.)

(C) Приведён алгоритм, как Магу выиграть, для некоторого $k>2$ баллы не добавляются

11 класс

11.1. Даны 6 последовательных натуральных чисел. Докажите, что их можно обозначить (в некотором порядке) a, b, c, d, e, f так, чтобы число $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{d}{e+f}$ было натуральным.

Решение 1. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ — данные натуральные числа. Положим $a=n+1$, $b=n$, $c=n+2$, $d=n+4$, $e=n+3$, $f=n+5$. Тогда $\frac{a}{b+c}=\frac{n+1}{2n+2}=\frac{1}{2}$ и аналогично $\frac{d}{e+f}=\frac{1}{2}$. Видим, что сумма наших дробей равна 1.

Решение 2. Пусть $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ — данные натуральные числа. Положим $a=n$, $b=n+1$, $c=n+4$, $d=n+5$, $e=n+2$, $f=n+3$. Тогда $\frac{a}{b+c}+\frac{d}{e+f}=\frac{n}{2n+5}+\frac{n+5}{2n+5}=1$.

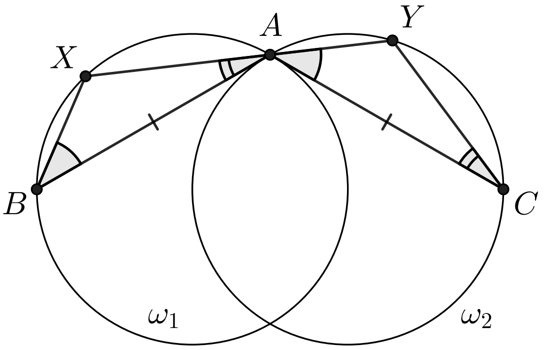
Замечание. Помимо варианта из решения 2 подходят также и другие варианты, в которых пары b и c, e и f, a и d симметричны относительно середины отрезка $[n, n+5]$; в таком случае $b+c=e+f=a+d$, и наша сумма дробей равна 1.

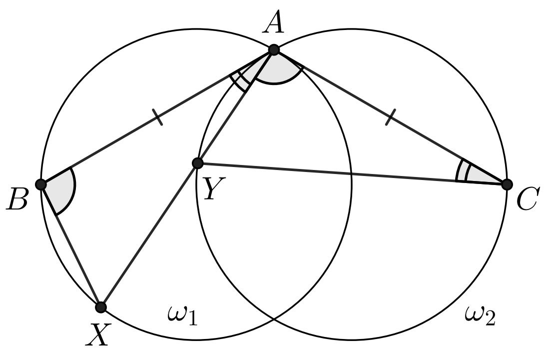
(A) Предъявлено обозначение чисел, которое работает (даже без явного вычисления $\frac{a}{b+c}+$ $+\frac{d}{e+f}$) .... 7 баллов

(B) Приведены частные примеры, но не ясно, как они обобщаются для произвольного n .... 3 балла

11.2. Две равные окружности ω_1 и ω_2 проходят через точку A. На окружности ω_1 отмечена точка B так, что прямая AB касается окружности ω_2. На окружности ω_2 отмечена точка C так, что прямая AC касается окружности ω_1. Прямая, проходящая через точку A, повторно пересекает окружность ω_1 в точке X и окружность ω_2 в точке Y. Докажите, что один из отрезков BX, CY и XY равен сумме двух других.

Решение. Поскольку окружности равны, то при симметрии, переводящей одну из них в другую, касательная AB переходит в касательную AC. Отсюда следует, что $AB=AC$.





Предположим, что точка A лежит на отрезке XY, то есть прямая ℓ не проходит внутри угла BAC. Поскольку прямая AB касается ω_2, то $\angle BAX=\angle ACY$. Поскольку прямая AC касается ω_1, то $\angle ABX=\angle CAY$. Таким образом, треугольники ABX и CAY равны, поэтому $BX=AY$ и $AX=CY$. В этом случае $XY=AX+AY=BX+CY$.

Теперь разберем оставшийся случай. Пусть точка Y лежит на отрезке AX. Снова, используя касание, получаем равенства углов $\angle ABX=\angle YAC$ и $\angle BAX=\angle YCA$, откуда также равны треугольники ABX и CAY. На этот раз $XY=AX-AY=CY-BX$, поэтому $CY=BX+XY$, что и требовалось. Случай, когда точка X лежит на отрезке AY разбирается аналогично.

(A) Разобран случай, когда точка A лежит на отрезке XY .... 3 балла

(B) Разобран случай, когда точка A лежит на продолжении отрезка XY .... 4 балла

(C) Разобран один из случаев, сказано о существовании второго случая. При этом никак не указывается, что некоторые равенства будут выглядеть по-другому .... 1 балл за неразобранный случай

Продвижение (C) суммируется с баллами за разобранный случай (A) или (B).

11.3. Петя и Вася играют в игру. В начале игры на столе лежат 1000 куч, состоящих из 1, 2, 3, 4, …, 999, 1000 спичек соответственно. Ребята ходят по очереди, начинает Петя.

Каждый из мальчиков своим ходом может взять любое ненулевое количество спичек из кучи с наибольшим количеством спичек (ровно из одной из таких куч, если их несколько). Выигрывает тот, кто заберёт последнюю спичку. Кто из мальчиков может играть так, чтобы гарантированно выиграть?

Ответ: Петя.

Решение 1. Опишем стратегию, позволяющую Пете гарантированно забрать последнюю спичку. Для этого он на каждом ходе будет делать так, чтобы количество куч, содержащих максимальное количество спичек, было чётным (такие позиции будем называть *правильными*).

Докажем, что (1) перед каждым ходом Пети позиция будет неправильной, и (2) он всегда сможет сделать ход, добившись правильной позиции. На первом ходе Пете достаточно взять 1 спичку (из кучи с 1000 спичками), добившись правильной позиции.

Далее, если перед ходом Васи позиция правильная, то после его хода хотя бы одна из наибольших куч останется нетронутой, то есть наибольшее число спичек в куче не изменится. При этом их количество уменьшится ровно на 1, то есть позиция перед ходом Пети станет неправильной.

Пусть теперь перед ходом Пети позиция неправильная, причём в ней ровно a кучек, содержащих максимальное количество спичек (число a нечётно). Если $a > 1$, то Петя, например, забирает полностью одну из максимальных кучек, и позиция становится правильной (в ней $a - 1$ максимальная кучка).

Если же $a = 1$, то пусть k — число спичек в следующей за максимальной по величине непустой кучке, и пусть кучек, содержащих k спичек, ровно b (если других непустых кучек нет, то $b = 0$). Если число b чётно, то Петя просто заберёт наибольшую кучку (в частности, если других кучек нет, то Петя заберёт последнюю спичку). Если же b нечётно, то Петя забирает столько спичек, чтобы в кучке осталось k спичек, и таких кучек станет $b + 1$; во всех случаях позиция снова станет правильной.

Итак, Петя всегда сможет поддерживать описанные свойства — в частности, Вася никогда не сможет забрать последнюю спичку (в правильной ситуации это невозможно). Так как число спичек уменьшается, это рано или поздно сделает Петя и выиграет.

Решение 2. Заметим, что игра закончится не более чем за 1000^2 ходов. Тогда у одного из мальчиков обязательно есть выигрышная стратегия. Предположим, что её нет у Пети; тогда она есть у Васи.

Пусть Петя первым ходом возьмёт 1 спичку (из кучи с 1000 спичками), а в ответ Вася (по своей стратегии) возьмёт некоторое количество n спичек из кучи с 999 спичками. По нашему предположению, в получившейся позиции выигрывает Вася, то есть игрок, ходящий вторым.

Но этой же позиции мог добиться Петя, взяв на первом ходе $n + 1$ спичку из кучи с 1000 спичками. Действуя по той же стратегии, он гарантированно выиграет. Полученное противоречие означает, что у Васи нет выигрышной стратегии, а значит, она есть у Пети.

Комментарий. Метод, описанный во втором решении, называется *передачей хода.*

Критерии оценивания для решения 1.

(О) Только ответ .... 0 баллов

(1) Сформулировано понятие правильной позиции и заявлено, что Пете достаточно добиваться правильной позиции на каждом ходе .... 2 балла

(Х) Замечено, что при каждом ходе число наибольших куч уменьшается на 1, если оно было больше 1 .... 1 балл

(2В) Сформулировано и доказано, что при ходе Васи из правильной позиции получается неправильная .... 1 балл

(3П) Сформулировано и доказано, что Петя может получить правильную позицию из неправильной, **если** $a > 1$ .... 1 балл

Если в решении содержится стратегия для случая (3П), однако ***явно не указано****, что она работает только в случае $a > 1$, баллы по критерию (3П)* ***не начисляются.***

(4П) Сформулировано и доказано, что Петя может получить правильную позицию, если $a = 1$ .... 3 балла

Баллы за продвижения (1), (2В), (3П), (4П) суммируются. Баллы за (X) не суммируются с баллами за (2В) и (3П), но суммируются с баллами за (1) и (4П).

Критерии оценивания для решения 2.

(Z) Не поясняется, почему хотя бы у одного из игроков есть выигрышная позиция или без объяснения используется существование структуры выигрышных и проигрышных позиций .... баллы не снимаются

11.4. Две бесконечные последовательности $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ натуральных чисел таковы, что при любых различных натуральных m и k число $a_m - b_k$ делится на $m-k$. Обязательно ли $a_n = b_n$ при всех натуральных n?

Ответ: Обязательно.

Решение. Зафиксируем натуральное число n и покажем, что $a_n = b_n$. Пусть M — натуральное число, большее a_n и b_n. Из условия задачи следует, что числа $a_n - b_{n+M}$, $a_{n+2M} - b_{n+M}$ и $a_{n+2M} - b_n$ кратны M. Значит, число $(a_n - b_{n+M}) - (a_{n+2M} - b_{n+M}) + (a_{n+2M} - b_{n+M}) = a_n - b_n$ тоже делится на M. Однако, поскольку $a_n < M$ и $b_n < M$, это возможно лишь в случае $a_n = b_n$, что и требовалось.

(A) Доказано, что числа a_n и b_n дают одинаковый остаток от деления на любое натуральное число M .... не менее 5 баллов.

11.5. Некоторые рёбра выпуклого многогранника удалось покрасить в красный цвет так, что в каждую вершину входит ровно два красных ребра, причём эти ребра лежат в одной грани. Кроме того, в каждой грани оказалось не более двух красных ребер. Сколько вершин может быть в таком многограннике?

Ответ: Ответ: любое чётное число вершин, большее 2.

Решение. Поскольку из каждой вершины исходит ровно два красных ребра, то красные рёбра образуют несколько непересекающихся циклических маршрутов по вершинам многогранника. Рассмотрим один такой цикл из красных рёбер, он делит поверхность многогранника на две части, покрасим одну из таких частей в синий цвет, другую в зелёный. Пусть A — одна из вершин циклического маршрута. Исходящие из неё красные рёбра лежат в одной грани по условию задачи. Покрасим вершину A в тот цвет, в который покрашена эта грань. Таким образом мы получим, что в циклическом маршруте синие и зелёные вершины чередуются, поэтому вершин в нем чётное число. Следовательно, и общее количество вершин в многограннике чётно.

Теперь приведём пример для чётного числа вершин. Для 4 вершин подойдет тетраэдр $ABCD$, в котором красным покрашены ребра AB, BC, CD, DA. Пусть $n \geqslant 3$. Рассмотрим правильную $2n$-угольную призму $A_1A_2 \ldots A_{2n}B_1B_2 \ldots B_{2n}$ и соответствующую $2n$-вершинную антипризму, образованную вершинами A_i, где $i = 1, 3, \ldots, 2n-1$, и вершинами B_j, где $j = 2, 4, \ldots n$. Под условие подойдёт покраска в красный цвет рёбер, по которым граничат «боковые» треугольные грани: $A_1B_2, B_2A_3, \ldots, B_{2n}A_1$. Таким образом, в каждой треугольной грани будет окрашено два ребра, а в двух n-угольных гранях не будет красных рёбер.

(A) Верный ответ и пример для 4 вершин .... 1 балл

(A0) Только ответ или только пример для 4 вершин .... 0 баллов

(B) Пример для чётного числа вершин, большего либо равного 6 .... 3 балла

(C) Доказательство, что количество вершин чётно .... 3 балла

(X) В ответе ошибочно указано, что подходят все чётные числа .... баллы не снимаются

Продвижение (A) оценивается в 1 балл даже при наличии неточности (X). Баллы за части (A), (B), (C) суммируются.