XVIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

6. *Как разрезать квадрат на 12 треугольников, площади которых относятся как 1 : 2 : 3 :…: 11 : 12?* (И. Рубанов)

Решение. Заметим, что числа от 1 до 12 можно сгруппировать в 6 пар, сумма чисел в каждой из которых равна 13: 1, 12; 2, 11; 3, 10; 4, 9; 5, 8; 6, 7. Возьмем квадрат $ABCD$ со стороной $13\times3 = 39$ и разделим его сторону AB на отрезки длиной 1, 12, 2, 11, 3, 10, а сторону AD — на отрезки длиной 4, 9, 5, 8, 6, 7. Соединив вершину C с вершиной A и точками деления на сторонах AB и AD, получим искомые треугольники: их высоты, опущенные из вершины C, равны стороне квадрата, поэтому их площади относятся как длины отрезков, на которые разделены отрезки AB и AD.

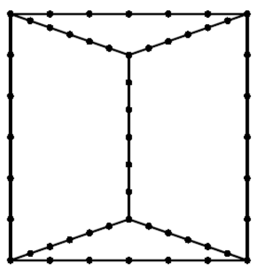
Критерии оценки. Схемы разрезания без пояснений, достаточных для проверки правильности разрезания, *не засчитываются*.

7. *У Васи есть банки с синей, жёлтой и зелёной красками. Он хочет покрасить каждое натуральное число от 100 до 1000000 включительно одной из этих красок так, чтобы каждые три попарно взаимно простых числа были одного цвета. Докажите, что Васе придётся покрасить все числа одним цветом. Напомним, что три числа* попарно взаимно просты*, если у каждых двух из них наибольший общий делитель равен 1.* (С. Берлов, в редакции А. Голованова)

Первое решение. Будем для краткости называть числа, большие 100 и меньшие 1000000, *хорошими*. Возьмем хорошие простые числа 101, 103 и 107. Так как они попарно взаимно просты, то должны быть покрашены в один цвет (пусть синий). Заменяя одно из них на всевозможные другие хорошие простые числа, убеждаемся, что все хорошие простые числа покрашены в синий цвет. Возьмем произвольное хорошее число n. Оно не делится хотя бы на одно из чисел 101, 103 и 107 (обозначим его через k), так как $101\times103\times107 > 1000000$ и, по той же причине, хотя бы на одно из трех следующих за ними хороших простых чисел (обозначим его через m). Тогда числа n, k, m попарно взаимно просты, и так как числа k и m синие, число n тоже должно быть синим. **Второе решение**. Любая тройка вида $(2n–1, 2n, 2n+1)$ состоит из попрано взаимно простых чисел. Поэтому в любой такой тройке все числа должны быть одного цвета. Покроем все числа от 101 до 999999 тройками такого вида: (101, 102, 103), (103, 104, 105), …, (999997, 999998, 999999). Так как любые две соседние тройки имеют общий элемент, все эти числа должны быть одного цвета (пусть синего). Числа 100 и 1000000 тоже синие, так как они входят в тройки (100, 101, 103) и (1000000, 101, 103), в которых есть синие числа.

Критерии оценки. *Не требуем*: доказательства простоты используемых в решениях простых чисел; доказательства существования трех простых чисел, больших 103. Но если одно из чисел, используемых как простые, на самом деле составное — *снимается 1 балл*. Доказано только, что все простые числа покрашены в один цвет — *2 балла*. Без доказательства используется утверждение, что любые *два* взаимно простых числа одноцветны — *не более 2 баллов*.

8. *На рисунке изображён автодром; точки — это перекрёстки, отрезки — дороги. Каждый отрезок между соседними точками машина проезжает ровно за минуту. Приехав на перекрёсток, машина немедленно уезжает с него по любой дороге, кроме той, по которой она приехала. Сначала несколько машин расположены на перекрёстках, затем они одновременно начинают двигаться по указанным правилам. При каком наибольшем количестве машин может случиться, что они смогут неограниченно долго ездить, никогда не встречаясь (ни на перекрёстках, ни на дорогах)?* (И. Богданов)



Ответ. 36 машин. **Решение**. <u>Пример</u>. Запустим одностороннее движение 36 машин по верхнему и нижнему треугольникам. <u>Оценка</u>. Каждая машина не реже одного раза в 6 минут будет оказываться на одном из шести перекрестков, где сходятся три дороги. Значит, за любые 6 минут подряд каждая машина побывает на одном из таких перекрестков, и потому машин не больше, чем $6\cdot6 = 36$.

Критерии оценки. Только ответ — *0 баллов*. Только ответ с примером — *1 балл*.

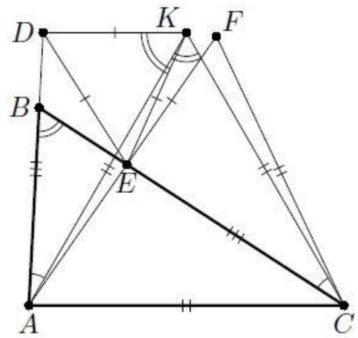
9. *Для каких натуральных n найдутся такие целые числа a, b, c, d, большие, чем 10^{2026}, что $a^2+b^2 = c^2+d^2$ и $a+b–c–d = n$?* (С. Суровцев)

Ответ. Для всех четных n, и только для них. **Решение**. Так как для любого целого k числа $–k$ и k^2 имеют ту же четность, что и k, число $a+b–c–d$ имеет ту же четность, что и $a^2+b^2 + c^2+d^2 = 2(a^2+b^2)$. Значит, число n должно быть четным.

Пусть n четно. Положив $x = a–c$, $y=a+c$, $z = d–b$, $t = d+b$, перепишем условие в виде $xy = zt$ и $x–z = n$. Примем за x любое четное число, большее, чем $2n+10^{2026}$, и положим $z = x–n$, $y = 2z$, $t = 2x$. Легко видеть, что все условия задачи выполнены.

Критерии оценки. Только ответ — *0 баллов*. Только доказана четность числа n — *1 балл*. Выражение условия задачи через разности (см. решение выше) без дальнейшего содержательного продвижения — *2 балла*. Баллы по двум предыдущим критериям *суммируются*.

10. *Дан треугольник ABC, в котором ∠B = 60°. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка D, а на стороне BC — точка E, причем AD = CE. На продолжении отрезка AE за точку E нашлась такая точка F, что AC = CF и DE = EF. Найдите углы треугольника DEF (укажите все возможные варианты).* (М. Федотова, в редакции А. Кузнецова)



Ответ. Все углы по 60°. **Решение**. Из условия следует, что $AB < AD = CE < CB$. Значит, $\angle ACB < \angle CAB$. Поэтому $\angle ACB < 60°$ — иначе сумма углов треугольника ABC была бы больше 180°. Построим на отрезке AC равносторонний треугольник ACK так, что точки K и B лежат с одной стороны от прямой AC. Так как $\angle ACB < 60°$, точки F и K лежат с одной стороны от прямой BC.

Поскольку $\angle KCA+\angle KAC = 120° = \angle BCA+\angle BAC$, получаем, что

$$\angle KCE = \angle KCA–\angle BCA = \angle BAC–\angle KAC = \angle DAK.$$

Поскольку $KA = KC$ и $DA = EC$, треугольники KCE и KAD равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $KE = KD$ и $\angle EKC = \angle DKA$. Значит,

$$\angle DKE = \angle DKC–\angle EKC = \angle DKC–\angle DKA = \angle AKC = 60°,$$

и треугольник DEK также равносторонний. Но тогда $EK = ED = EF$ и $CK = CA = CF$, то есть треугольники ECF и ECK равны по трём сторонам. Поскольку K и F лежат по одну сторону от BC, отсюда следует, что точки K и F совпадают, и треугольник DEF равносторонний, то есть его углы равны 60°.

Замечание. Ради наглядности на чертеже не соблюдены некоторые пропорции.

Критерии оценки. Введена точка K, дальнейшего содержательного продвижения нет — *2 балла*. Решение требует разбора двух аналогичных случаев, из которых разобран только один — *минус 1 балл*.