XVIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *В каждом столбце таблицы 10×10 записаны сверху вниз в порядке возрастания степени двойки: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Как пройти из какой-либо клетки верхней строки таблицы в какую-либо клетку нижней, сдвигаясь на каждом ходу на клетку вправо или на клетку вниз, чтобы сумма чисел во всех пройденных клетках равнялась 2026? Достаточно найти один пример.* (И. Рубанов)

1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
2	**2**	**2**	2	2	2	2	2	2	2
4	4	**4**	**4**	**4**	4	4	4	4	4
8	8	8	8	**8**	8	8	8	8	8
16	16	16	16	**16**	16	16	16	16	16
32	32	32	32	**32**	**32**	32	32	32	32
64	64	64	64	64	**64**	**64**	64	64	64
128	128	128	128	128	128	**128**	**128**	128	128
256	256	256	256	256	256	256	**256**	**256**	256
512	512	512	512	512	512	512	512	**512**	**512**

Решение. Возможный путь показан на рисунке крупными жирными цифрами. Его поиски облегчаются, если предварительно представить число 2026 в виде суммы степеней двойки: $2026 = 2+8+32+64+128+256+512+1024$.

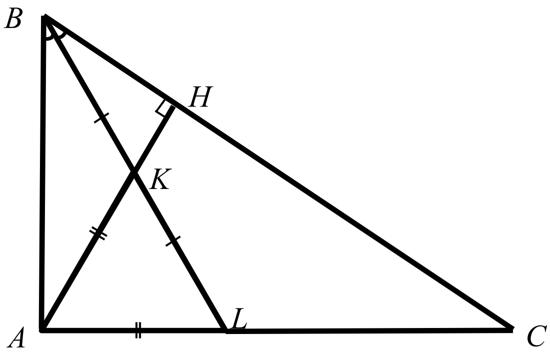
Критерии оценки. Есть верный пример — *7 баллов*, нет верного примера — *0 баллов*.

2. *Числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2 > (a+b)^2$ и $b^2+c^2 > (b+c)^2$. Что больше: c^4+a^4 или $(a+c)^4$?* (А. Кузнецов, И. Рубанов)

Ответ. $(a+c)^4$. **Решение**. $a^2+b^2 > (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow ab < 0$. Аналогично $bc < 0$. Таким образом, числа a и b имеют разные знаки, числа c и b — тоже. Значит, числа a и c имеют один знак, то есть $ac > 0$. Следовательно, $(a+c)^4 - (a^4+c^4) = 4a^3c+6a^2c^2+4ac^3 = ac(4a^2+6ac+4c^2) > 0$, откуда $(a+c)^4 > a^4+c^4$.

Критерии оценки. Найден знак хотя бы одного из произведений ab или bc без дальнейшего содержательного продвижения — *2 балла*. Любые алгебраические преобразования, не приведшие к продвижению в сравнении $(a+c)^4$ и a^4+c^4, *не оцениваются*.

3. *В треугольнике ABC точка K — середина биссектрисы BL. Известно, что AK = AL и AK ⊥ BC. Найдите величину угла ABC.* (П. Кожевников)



Ответ. 60°. **Решение**. Положим $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. Пусть прямые AK и BC пересекаются в точке H. Из треугольника ABH $\angle BAH = 90°-2\beta$. Из треугольника AKB

$$\angle AKB = 180°-\angle ABK-\angle BAH = 90°+\beta.$$

Далее,

$$\angle ALK = \angle ALB = \angle LCB+\angle LBC = \beta+2\gamma$$

и $\angle AKL = 180°-\angle AKB = 90°-\beta$. Так как по условию $AK = AL$, углы ALK и AKL равны, то есть $\beta+2\gamma = 90°-\beta$, откуда $2\beta+2\gamma = 90°$ и $\angle BAC = 180°-(2\beta+2\gamma) = 90°$. Таким образом, AK — медиана треугольника BAL, проведенная из вершины его прямого угла, откуда $AL = AK = KL$. Значит, $\angle ALB = 60°$, откуда $\beta = \angle ABL = 30°$ и $\angle ABC = 2\beta = 60°$.

Критерии оценки. Только ответ — *0 баллов*. Доказано, что угол A — прямой, дальнейшего содержательного продвижения нет — *3 балла*. Любые вычисления с углами, не приведшие к нахождению числового значения величины никакого угла, *не оцениваются*.

4. *В электронную таблицу, где две строки и n столбцов, в произвольном порядке записаны все натуральные числа от 1 до 2n (в каждой клетке — одно число). В полдень каждого дня компьютер случайным образом выбирает столбец, где число из верхней строки больше числа из нижней, и меняет эти два числа местами, а затем случайным образом переставляет числа в верхней строке. В момент, когда в каждом столбце верхнее число оказывается меньше нижнего, процесс заканчивается. Докажите, что такой процесс не может происходить дольше, чем n^2 дней.* (Р. Баринов, М. Магин)

Первое решение. Заметим, что разность суммы чисел в верхней строке таблицы и суммы чисел в ее нижней строке не больше, чем $(2n+(2n-1)+\ldots+(n+1))-(n+(n-1)+\ldots+1) = n^2$ и не меньше, чем $-n^2$. Каждая перемена компьютером мест двух чисел в столбце уменьшает эту разность минимум на 2. Поэтому таких перемен не может произойти больше, чем $(n^2-(-n^2))/2 = n^2$. **Второе решение**. Назовем пару чисел (a, b) *плохой*, если число a стоит в верхнем ряду, число b — в нижнем (не обязательно в той же колонке, что и a), и $a > b$. Пусть компьютер поменял в какой-то колонке местами числа x и y, где $x > y$. После этого исчезнет плохая пара (x, y). Так как вниз пошло большее число, там, где образовалась плохая пара с x снизу, была плохая пара и с y снизу, а там, где образовалась плохая пара с y сверху, была и плохая пара с x сверху. Значит, число плохих пар за одну перестановку чисел в столбце уменьшается хотя бы на 1. От перестановки чисел в строке оно не меняется. Так как число плохих пар изначально не больше общего количества пар (a, b), где число a стоит в верхнем ряду, а число b — в нижнем, равного n^2, перестановок чисел в столбцах будет сделано не более, чем n^2.

Критерии оценки. Предварительных критериев нет.

5. *Существует ли такое натуральное число n, что для каких-то трёх его делителей a, b, c, больших 1, произведение $(a–1)(b–1)(c–1)$ делится на n^2?* (Р. Ишкуватов)

Ответ. Не существует. **Решение**. Допустим, такое n существует. Так как числа a и $a–1$ взаимно просты, произведение $(b–1)(c–1)$ должно делиться на a^2, откуда $a^2 \le (b–1)(c–1)$. Аналогично $b^2 \le (a–1)(c–1)$, $c^2 \le (a–1)(b–1)$. Перемножив три полученных неравенства, получаем невозможное неравенство $a^2b^2c^2 \le (a–1)^2(b–1)^2(c–1)^2$.

Критерии оценки. Предварительных критериев нет.