Региональный этап — день 1

Условия задач, решения и критерии оценивания. 11 класс

Содержание

11.1. Считаем сверхновые

П.В.Бакланов

Статистика наблюдений сверхновых гласит, что в течение 18 месяцев в 2023–2024 годах было открыто 3156 сверхновых типа Ia и 869 сверхновых типа II. В то же время теоретическое моделирование показывает, что 24% вспышек сверхновых относятся к типу Ia, а 57% вспышек — к типу II. Можно считать, что в пределах одного типа сверхновых их абсолютная звездная величина в максимуме блеска одинакова, сверхновые распределены в пространстве равномерно и изотропно.

Воспользовавшись этими данными, определите, какие сверхновые ярче. На сколько звездных величин абсолютная звездная величина сверхновых подтипа Ia в максимуме блеска отличается от аналогичной величины для сверхновых типа II?

Решение. Значения $p_1 = 24\%$ и $p_2 = 57\%$ дают нам информацию о распределении сверхновых по типам в единице объема. Это условие можно сформулировать следующим образом: число сверхновых i-го типа в некотором объеме Вселенной V_0 равно

$$N_i = p_i \cdot n_0 \cdot V_0,$$

где n_0 — концентрация всех сверхновых в единице объема.

Для наблюдателя на Земле, считающего сверхновые на небе, доступный для наблюдений объем имеет форму шара и равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — предельное расстояние, на котором он способен открыть сверхновую данного типа в ее максимуме блеска. Тогда отношение числа открытых сверхновых разных типов равно

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{p_1 \cdot n_0}{p_2 \cdot n_0}\frac{R_1^3}{R_2^3}. \tag{1}$$

Разумно предположить, что предельная освещенность, создаваемая сверхновой, которую способен зарегистрировать наблюдатель на Земле, не зависит от типа сверхновой. Запишем связь между предельной освещенностью E, светимостью сверхновой L и предельным расстоянием R

$$E = \frac{L}{4\pi R^2}$$

и приравняем освещенности, создаваемые наиболее удаленными сверхновыми каждого типа:

$$\frac{L_1}{4\pi R_1^2} = \frac{L_2}{4\pi R_2^2}.$$

Отсюда получаем, что отношение светимостей сверхновых разных типов будет равно квадрату отношения предельных расстояний, с которых эти сверхновые могут быть обнаружены

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2.$$

Отношение расстояний мы можем получить из выражения (1), тогда

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/3}. \tag{2}$$

Тогда искомая разность абсолютных звездных величин равна:

$$\Delta M = M_1 - M_2 = -2.5\lg\frac{L_1}{L_2} = -\frac{5}{3}\lg\left(\frac{N_1}{N_2}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right).$$

Осталось провести вычисления:

$$\Delta M = -\frac{5}{3}\lg\left(\frac{3156}{869}\cdot\frac{0.57}{0.24}\right) \approx -1^m.6.$$

Таким образом, сверхновые типа Ia ярче сверхновых типа II примерно на $1^m.6$.

Критерии оценивания.

K1. Явно или неявно сделанный вывод о том, что предельная освещенность (видимая звездная величина) при наблюдении сверхновых не зависит от их типа **2**
K2. Получение формулы (1) или ее верного аналога (например, в виде пропорциональности) **4**
K3. Получение формулы (2) или ее верного аналога **4**
K4. Вывод о том, что сверхновые типа Ia ярче **2**
K5. Правильный численный ответ (допустимы значения $|\Delta M| = 1^m.6 \pm 0^m.1$) **4**
Максимальная оценка: **16**

11.2. Зависит от точки зрения

А.В.Веселова

Земляне проводят наблюдения астероида. Известно, что его орбитальный период составляет 8 лет, эксцентриситет орбиты равен 0.4, а ее наклон составляет 40°. Астероид наблюдается в афелии орбиты, расположенном симметрично относительно линии узлов (прямой, являющейся пересечением плоскостей орбит Земли и астероида). Какой может быть наблюдаемая (геоцентрическая) эклиптическая широта астероида в этот момент?

Решение. Поскольку точка афелия симметрична относительно линии узлов, это означает, что в афелии астероид находится не только дальше всего от Солнца, но и дальше всего от плоскости эклиптики. Пусть для определенности астероид находится над плоскостью эклиптики, в противном случае мы получим симметричный с точностью до знака набор ответов.

Определим большую полуось орбиты, а затем поймем, вне или внутри земной орбиты находится проекция афелия на плоскости эклиптики:

$$(T[\text{годы}])^2 \equiv (a[\text{а. е.}])^3 \quad \Rightarrow \quad a \ = 4\,\text{а. е.}$$

Расстояние от Солнца до проекции точки афелия на плоскость эклиптики составит

$$R_\alpha = r_\alpha \cos i = a(1+e)\cos i = 4 \cdot (1+0.4)\cos 40^\circ = 4.3 \text{ а. е.}$$

Следовательно, проекция афелия находится вне орбиты Земли. В таком случае (см. чертеж) максимальное и минимальное значения эклиптической широты будут соответствовать максимальному и минимальному удалению наблюдателя от астероида.

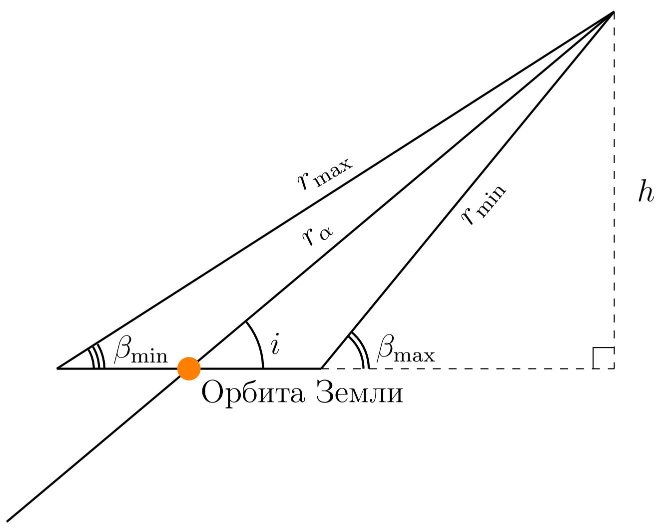

Рис. 1: Чертеж к решению задачи 2.

Максимальное значение эклиптической широты найдем таким образом: определим расстояние от Земли до астероида по теореме косинусов, затем по теореме синусов оценим широту.

$$r_{\min} = \sqrt{r_\alpha^2 + a_\oplus^2 - 2r_\alpha \cdot a_\oplus \cos i} = \sqrt{5.6^2 + 1^2 - 2 \cdot 5.6 \cdot 1 \cdot \cos 40^\circ} = 4.9 \text{ а. е.},$$

$$\frac{\sin(180^\circ - \beta_{\max})}{r_\alpha} = \frac{\sin i}{r_{\min}} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta_{\max} = \frac{r_\alpha}{r_{\min}} \cdot \sin i \quad \Rightarrow \quad \beta_{\max} = 47^\circ.$$

Аналогично определим минимальное значение эклиптической широты:

$$r_{\max} = \sqrt{r_\alpha^2 + a_\oplus^2 - 2r_\alpha \cdot a_\oplus \cos(180^\circ - i)} = \sqrt{5.6^2 + 1^2 - 2 \cdot 5.6 \cdot 1 \cdot \cos 140^\circ} = 6.4\,\text{а. е.},$$

$$\frac{\sin \beta_{\min}}{r_\alpha} = \frac{\sin i}{r_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \sin \beta_{\min} = \frac{r_\alpha}{r_{\max}} \cdot \sin i \quad \Rightarrow \quad \beta_{\min} = 34^\circ.$$

Таким образом, при расположении афелия над плоскостью эклиптики диапазон наблюдаемых эклиптических широт составит $[34^\circ; 47^\circ]$, а с учетом расположения афелия под плоскостью эклиптики диапазон примет вид $[-47^\circ; -34^\circ] \cup [34^\circ; 47^\circ]$.

Критерии оценивания.

К1. Вычисление радиуса орбиты, получение верного ответа **2**
К2. Верное понимание наклона орбиты (угол с центром в Солнце) **1**
К3. Верный расчет (или верная формула) для расстояния от Солнца до астероида в афелии **1**
К4. Верное понимание и указание конфигураций, при которых достигаются наименьшая и наибольшая широты (по модулю или просто положительные) **2**
К5. Геометрические построения и/или верные формулы для получения граничных значений широты **5**
К6. Расчет верных значений максимальной и минимальной широт (по модулю или просто положительных), допустима погрешность $\pm 1^\circ$ .... **1+1**
К7. Указание интервала для широт вместо отдельных граничных значений **1**
К8. Верный учет отрицательных широт (явное указание соответствующего интервала в качестве части ответа) **2**
Максимальная оценка: **16**

11.3. Усыхающий Нептун

П.А. Тараканов

Известно, что Нептун излучает в единицу времени в 2.5 раза больше энергии, чем получает от Солнца. Оцените, на какую величину изменяется радиус Нептуна за один его оборот вокруг Солнца, если известно, что вид зависимости плотности от радиуса у него при этом не изменяется. Радиус Нептуна равен 25 тыс. км, масса — $1.0 \cdot 10^{26}$ кг. Можно считать, что Нептун является абсолютно черным телом, а радиус его орбиты вокруг Солнца равен 30 а.е.

Решение. Поскольку Нептун является планетой (а не звездой и не бурым карликом), то источником дополнительной энергии термоядерный синтез в нем служить не может. Выделение энергии за счет радиоактивного распада тяжелых ядер у планет пренебрежимо мало, и единственным источником дополнительной энергии может являться только постепенное сжатие Нептуна, которое и приводит к изменению его радиуса.

Потенциальная энергия Φ самогравитирующего газового шара может быть выражена как

$$\Phi = -\varkappa \frac{GM^2}{R}, \tag{3}$$

где M — масса шара, R — его радиус, $\varkappa$ — коэффициент, зависящий от распределения плотности внутри шара, во всех «естественных» случаях $\varkappa \approx 1$.

Поскольку сжатие происходит медленно, то в каждый момент времени для Нептуна выполняется вириальное соотношение $2U + \Phi = 0$ (тут U — внутренняя энергия Нептуна) и $U = -\frac{\Phi}{2}$, откуда следует, что только половина выделяющейся при сжатии энергии будет расходоваться на излучение, а вторая половина — на нагрев Нептуна, поскольку и изменения энергий связаны так же, $dU = -\frac{d\Phi}{2}$.

Получим зависимость изменения радиуса от изменения потенциальной энергии, продифференцировав соотношение (3):

$$d\Phi = \varkappa \frac{GM^2}{R^2}\, dR$$

или, считая оба изменения положительными величинами (хотя и потенциальная энергия, и радиус уменьшаются),

$$\Delta\Phi = \varkappa \frac{GM^2}{R^2}\, \Delta R.$$

Заметим, что тот же результат можно получить и путем вычитания друг из друга значений потенциальной энергии для R и $R - \Delta R$, а затем отбрасывания малых членов, но так эффективнее.

По условию энергия ΔE, получаемая Нептуном от Солнца за один его оборот вокруг Солнца, будет связана с $\Delta\Phi$ как

$$(2.5 - 1) \cdot \Delta E = \frac{\Delta\Phi}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi = 3\Delta E.$$

Эта же энергия, поскольку Нептун по условию абсолютно черное тело, может быть выражена как

$$\Delta E = \frac{L_\odot}{4\pi r^2} \cdot \pi R^2 \cdot P,$$

где $L_\odot$ — светимость Солнца, r — радиус орбиты Нептуна, P — орбитальный период Нептуна. Тогда

$$\Delta R = \frac{R^2\, \Delta\Phi}{\varkappa GM^2} = \frac{3L_\odot R^4 P}{4r^2 \varkappa GM^2}.$$

Для вычислений осталось определить некоторые недостающие параметры. Коэффициент $\varkappa$ можно принять равным 1, а орбитальный период Нептуна либо вспомнить (165 лет), либо вычислить из III закона Кеплера как $P = 30^{3/2}$ лет, что составляет $P = 5.2 \cdot 10^9$ с.

Окончательно вычисляем (все величины в СИ)

$$\Delta R = \frac{3 \cdot 3.9 \cdot 10^{26} \cdot (25 \cdot 10^6)^4 \cdot 5.2 \cdot 10^9}{4 \cdot (30 \cdot 1.5 \cdot 10^{11})^2 \cdot 6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{52}} \approx 0.044 \text{ м} \approx 4 \text{ см}.$$

Итого за один оборот вокруг Солнца радиус Нептуна уменьшается примерно на 4 см.

Критерии оценивания.

К1. Утверждение о гравитационном сжатии как источнике энергии **3**
Если участник его использует, но никак не формулирует **2**
К2. Выражение (3), явно записанное или неявно используемое **1**
К3. Связь $\Delta\Phi$ и ΔR, полученная любым способом **2**
К4. Выражение (или вычисление) энергии ΔE **2**
К5. Учет вириального соотношения, достаточен результат **2**
При его отсутствии все остальные части решения оцениваются полным баллом (итоговый ответ при этом должен уменьшиться в 2 раза).
К6. Оценка коэффициента $\varkappa = 1$ **2**
Если участник использует значение для однородного шара $\varkappa = 3/5$ **1**
К7. Знание или вычисление орбитального периода Нептуна **2**
К8. Правильный итоговый ответ (достаточна порядковая точность, $1 \div 10$ см) **2**
Максимальная оценка: **16**

Если в решении явно указано, что радиус Нептуна *увеличивается*, то за все решение выставляется не более **4** баллов.

11.4. Не эта эпоха

В.В.Григорьев

Звезда Завийява (η Девы) на эпоху J2000.0 имеет экваториальные координаты $\alpha = 11^h50^m44^s$, $\delta = +1°45'43''$. Ее собственное движение $\mu = 0''.7886$/год с позиционным углом $\gamma = 110°$ (позиционный угол отсчитывается от направления на Северный полюс мира в сторону увеличения прямого восхождения). Определите экваториальные координаты Завийявы для эпохи J2050.0. Нутацией пренебречь.

Решение. Координаты Завийявы будут изменяться вследствие двух причин: собственного движения (красная стрелка на рисунке ниже), а также прецессии оси вращения Земли, то есть смещения точки весеннего (и осеннего) равноденствия вдоль эклиптики (темно-синяя стрелка, длины стрелок не в масштабе), нутацией по условию мы пренебрегаем. Синей прерывистой линией изображена граница между созвездиями Дева и Лев, тонким пунктиром показана экваториальная сетка на эпоху J2000.0: по вертикали отложено склонение, по горизонтали — прямое восхождение (увеличивающееся справа налево).

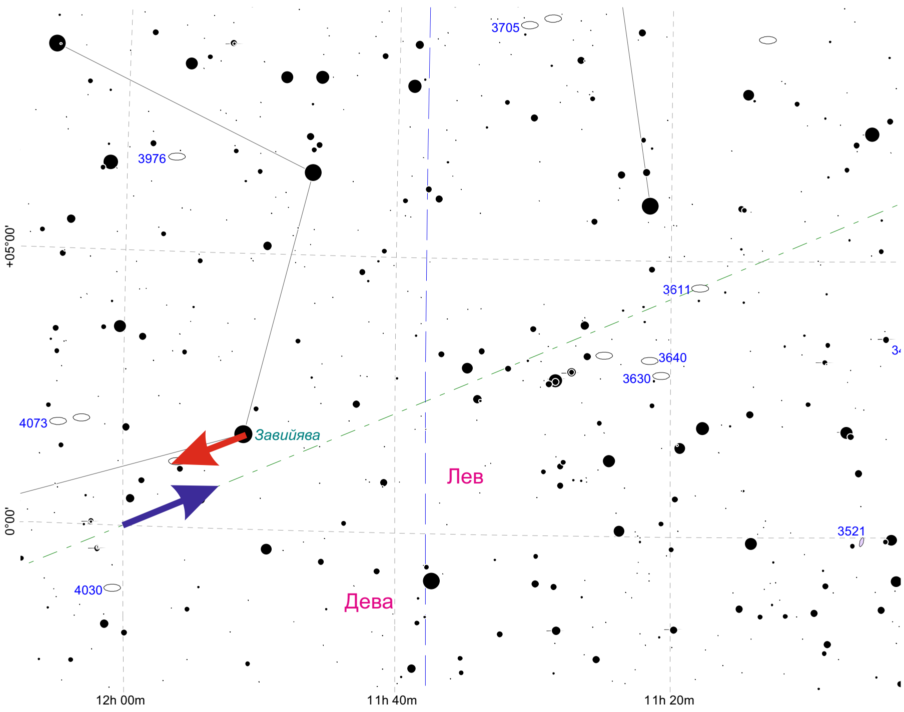

Рис. 2: К решению задачи 4.

Звезда находится практически точно в точке осеннего равноденствия — точке пересечения небесного экватора и эклиптики (штрих-пунктирная зеленая линия), которая движется вдоль эклиптики со скоростью $\zeta = 50''.23$/год за счет прецессии оси вращения Земли (происходит с периодом около 25800 лет, откуда величину ζ можно получить как угол, равный 1/25800 доле угла 360°) в сторону созвездия Льва. Поэтому будем считать, что координаты всех близлежащих звезд будут изменяться согласно этому же закону.

Сначала вычислим компоненты собственного движения. Косинусом склонения в данном случае можно пренебречь, т.к. склонение звезды мало (а косинус очень близок к единице), а собственное движение будет менять лишь доли угловой секунды:

$$\begin{cases} \mu_\alpha = \mu \sin\gamma = 0''.741/\text{год} \\ \mu_\delta = \mu\cos\gamma = -0''.270/\text{год} \end{cases}$$

Теперь займемся прецессией. Она изменяет координаты звезд в обратную сторону, чем, фактически, обеспечивает дополнительное собственное движение Завийявы примерно в ту же сторону, куда направлено и истинное (поскольку перемещение точки осеннего равноденствия происходит в сторону, обратную собственному движению звезды). Скорость изменения координат звезды вследствие прецессии вычисляется так:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_\alpha = \zeta \cos\varepsilon = 46''.085/\text{год} \\ \hat{\mu}_\delta = -\zeta \sin\varepsilon = -19''.980/\text{год} \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon = 23°26'22''$ — наклон небесного экватора к эклиптике на эпоху J2000.0, который указан в справочных данных.

Осталось лишь вычислить новые координаты (α', δ') звезды через $t = 50$ лет после введения эпохи J2000.0, не забыв, что собственное движение по прямому восхождению мы выражали в секундах дуги и соответствующие величины надо перевести в секунды времени:

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + (\hat{\mu}_\alpha + \mu_\alpha)t \\ \delta' = \delta + (\hat{\mu}_\delta + \mu_\delta)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = 11^h50^m44^s + (46''.085 + 0''.741) \cdot 50 \times \left(\frac{1}{15}\right)^{s/''} = 11^h50^m44^s + 156^s \\ \delta' = 1°45'43'' + (-19''.980 - 0''.270) \cdot 50 = 1°45'43'' - 1012''.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = 11^h50^m44^s + 2^m36^s = 11^h53^m20^s \\ \delta' = 1°45'43'' - 16'52''.5 = +1°28'51'' \end{cases}$$

Критерии оценивания.

К1. Понимание необходимости учета прецессии **2**
К2. Вычисление (или знание) значения постоянной прецессии ζ (допустима погрешность $\pm 0''.2$/год) **2**
К3. Правильные абсолютные значения (для соответствующей величины правильно указано не менее 2 значащих цифр) μ_α, μ_δ, $\hat{\mu}_\alpha$, $\hat{\mu}_\delta$ .... **1+1+1+1**
К4. Правильные знаки μ_α, μ_δ, $\hat{\mu}_\alpha$, $\hat{\mu}_\delta$ .... **1+1+1+1**
К5. Правильное итоговое значение α' (допустима погрешность $\pm 5^s$) **2**
К6. Правильное итоговое значение δ' (допустима погрешность $\pm 5''$) **2**
Максимальная оценка: **16**

Если участник в выражениях для μ_α, μ_δ, $\hat{\mu}_\alpha$, $\hat{\mu}_\delta$ меняет местами синусы и косинусы, то в критерии К3 за каждую ошибочную пару выставляется **1** балл вместо **2**, баллы по критериям К5 и К6 не выставляются.

11.5. Спектральный вальс

М.В.Костина

Вам дано изображение газового диска, окружающего сверхмассивную черную дыру в центре галактики, а также два спектра, полученных для областей, отмеченных окружностями на изображении. Попавшая на спектры линия излучения — это линия [OIII] с лабораторной длиной волны 5007 Å, в двух отмеченных областях (№1 и №2) ее длина волны достигает минимального и максимального значений для всего диска. Известно также, что угол между плоскостью диска и лучом зрения близок к 0°.

Зная, что угловые размеры приведенного изображения на небе составляют $5'' \times 5''$, определите массу черной дыры, выразив ее в массах Солнца. Пекулярную скорость галактики можно считать нулевой.

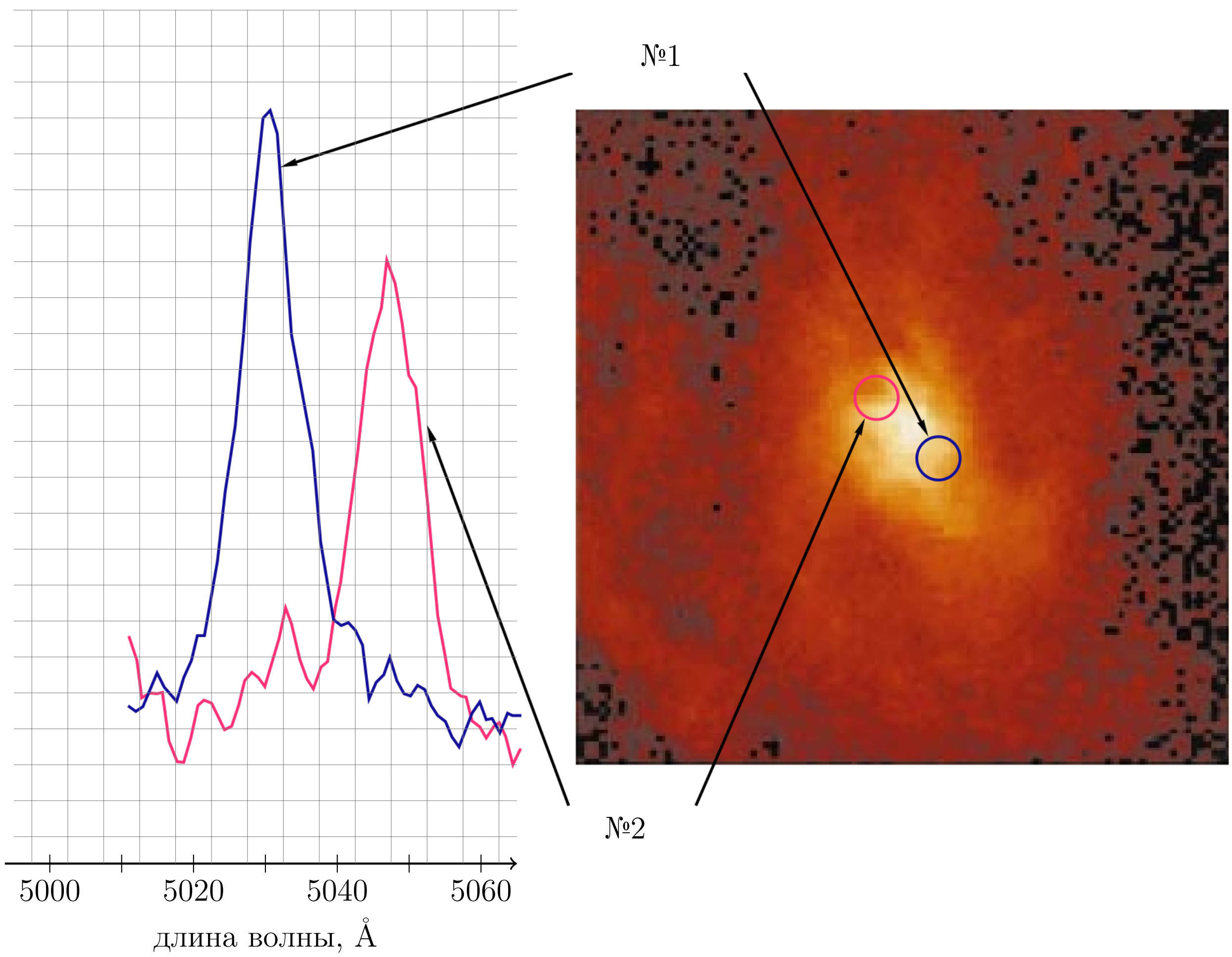

Рис. 3: Изображение к задаче 5.

Решение. Поскольку частицы диска движутся вокруг черной дыры с круговой скоростью

$$v^2 = \frac{GM}{R},$$

то масса центральной черной дыры будет равна

$$M = \frac{v^2 R}{G}.$$

Так как требуется найти массу в массах Солнца — $M_\odot$, то удобнее воспользоваться естественными для этой задачи единицами измерения: $M_\odot$, а.е., год. В этих единицах

$G = 4\pi^2$ а.е.^{3} год$^{-2}$ $M_\odot^{-1}$ (в чем несложно убедиться, записав III закон Кеплера для системы «Солнце–Земля») и

$$M[M_\odot] = \frac{1}{4\pi^2} \cdot v^2[\text{а.е./год}] \cdot R[\text{а.е.}].$$

Нам нужно найти радиус диска R и скорость вращения его частиц на этом радиусе v. Скорость определим по спектру в левой части рисунка. По условию длины волн линий λ_1 и λ_2 соответствуют экстремальным отклонениям лучевой скорости от среднего значения и луч зрения лежит в плоскости диска. Это означает, что мы наблюдаем один край диска, приближающийся к нам с круговой скоростью, а другой — удаляющийся с такой же скоростью (и при этом весь диск как целое также движется относительно нас). Тогда круговой скорости диска будет соответствовать смещение одной из линий, например Δz_2, относительно средней длины волны $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$.

$$v = c\,\Delta z_2 = c\,\frac{\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)/2}{(\lambda_1 + \lambda_2)/2} = c\,\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Если произвести аналогичную выкладку для Δz_1, получится, естественно, такой же по модулю, но отрицательный результат.

По спектру находим $\lambda_1 = 5030$ Å и $\lambda_1 = 5047$ Å. Скорость света в единицах а.е./год равна

$$c = 2\pi \cdot \frac{3 \cdot 10^5 \text{ км/с}}{30 \text{ км/с}} = 6.3 \cdot 10^4 \text{ а.е./год}$$

(поскольку Земля с орбитальной скоростью 30 км/с проходит за год 2π а.е.). Вычисляем круговую скорость для диска:

$$v = 6.3 \cdot 10^4 \cdot \frac{5047 - 5030}{5047 + 5030} \approx 106 \text{ а.е./год}.$$

Угловой радиус диска найдем по правой части рисунка. Определим масштаб изображения. Сторона квадрата равна 83 мм, значит в одном миллиметре $5/83 \approx 0''.06$. Расстояние между областями, для которых получены спектры, на снимке равно 11 мм, следовательно угловое расстояние между ними на небе равно $0''.66$. угловой радиус диска равен половине расстояния между его диаметрально противоположными точками, т.е. $0''.33$.

Для того, чтобы получить радиус в линейных единицах, нужно знать расстояние до галактики. Его можно получить, зная красное смещение z. Так как по условию пекулярная скорость галактики нулевая, то скорость центра диска обусловлена только космологическим расширением, а соответствующее ей красное смещение подчиняется закону Хаббла:

$$cz = Hr,$$

где c — скорость света в км/с, $H \approx 70$ км/с/Мпк — постоянная Хаббла, r — искомое расстояние в Мпк.

Так как линии в спектре расположены симметрично, то средняя длина волны будет соответствовать положению линии в центре диска. Красное смещение этой средней и будет общим космологическим красным смещением галактики. Среднее арифметическое длин волн линий в спектре равно $\lambda = 5038.5$ Å, а лабораторная длина волны $\lambda = 5007$ Å. Следовательно, красное смещение галактики

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{5038.5 - 5007}{5007} \approx 0.0063.$$

Отсюда находим расстояние до нее:

$$r = \frac{cz}{H} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0.0063}{70} \approx 27 \text{ Мпк} = 27 \cdot 10^6 \text{ пк}.$$

Как известно, 1 а.е. с расстояния в 1 пк видна под углом в $1''$, следовательно, $0''.33$, видимым с расстояния в 1 пк, соответствуют 0.33 а.е., а с расстояния в $27 \cdot 10^6$ пк — $0.33 \cdot 27 \cdot 10^6 = 8.9 \cdot 10^6$ а.е. Это и есть искомый радиус диска.

Окончательно находим массу черной дыры:

$$M = \frac{1}{4\pi^2} v^2 \cdot R = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 8.9 \cdot 10^6 \cdot (106)^2 = 2.5 \cdot 10^9 M_\odot.$$

Отметим также, что все промежуточные вычисления можно выполнять и в любой другой системе единиц (в том числе в СИ), а затем перевести в массы Солнца, итоговый результат от этого, естественно, не поменяется.

Критерии оценивания.

K1. Выражение для массы черной дыры через круговую скорость диска **2**

K2. Определение λ_1 и λ_2 по спектру на рисунке .... **1+1**

K3. Вычисление скорости вращения диска **4**

K4. Определение углового радиуса диска по рисунку **2**

Если вместо радиуса определен и дальше используется диаметр, то оценка за этот пункт — **1** балл.

K5. Понимание того, что красное смещение галактики равно смещению для среднего арифметического λ_1 и λ_2 .... **2**

K6. Вычисление расстояния до галактики **3**

K7. Вычисление (любым способом) линейного радиуса диска **2**

K8. Вычисление массы черной дыры **3**

Если ответ для массы дан не в массах Солнца, то оценка снижается на **1** балл.

Максимальная оценка: 20

Региональный этап — день 2

Условия задач, решения и критерии оценивания. 11 класс

Содержание

11.6. Концентрат для Волос

А.В.Веселова

Шаровое скопление состоит по количеству на 60% из звезд массы 0.8 $\mathfrak{M}_\odot$ и на 40% из звезд массы 1 $\mathfrak{M}_\odot$, все звезды находятся на Главной последовательности. Закон распределения концентрации объектов от расстояния задается формулой

$$n(r) = \frac{n_0}{r^2}\,.$$

Известно, что полный радиус скопления составляет 12 пк, а число звезд в скоплении равно 10^5, в любой части скопления соотношение числа звезд двух типов одинаково.

A. Определите n_0, считая единицей расстояния 1 парсек.

B. С какого максимального расстояния можно увидеть такое скопление невооруженным глазом, если наблюдается оно в созвездии Волос Вероники?

C. Представим, что наблюдение скопления на максимальном расстоянии, при котором оно доступно для наблюдений невооруженным глазом, проводится на телескопе с диаметром объектива $D = 15$ см и фокусным расстоянием $F = 1.8$ м. Сколько пикселей будет занимать изображение скопления в фокальной плоскости объектива телескопа, если в ней установлена ПЗС-матрица с пикселями размера 4 мкм × 4 мкм?

Решение.

A. Запишем выражение для полного количества звезд в скоплении:

$$N = \int\limits_0^R 4\pi r^2 \cdot n(r)\,dr = 4\pi \int\limits_0^R \frac{n_0}{r^2} \cdot r^2\,dr = 4\pi n_0 R.$$

Можно также заметить, что если рассмотреть сферические слои фиксированной толщины, то их объемы будут пропорциональны квадрату радиуса. Это означает, что в каждом таком слое количество звезд будет одним и тем же, откуда следует тот же результат (но формально полученный без использования интегрирования).

Отсюда находим n_0:

$$n_0 = \frac{N}{4\pi R} = \frac{10^5}{4\pi \cdot 12\,\text{пк}} = 6.6 \cdot 10^2\ \text{пк}^{-1}.$$

B. Определим светимость скопления как целого, для этого оценим светимость каждой звезды. На главной последовательности светимость звезды связана с ее массой пропорциональностью

$$L \propto \mathfrak{M}^4. \tag{1}$$

Светимость звезды солнечной массы равна светимости Солнца, светимость звезды с массой 0.8 $\mathfrak{M}_\odot$составит $\approx 0.41\ L_\odot$. Тогда полная светимость составит

$$L = 10^5 \cdot (0.6 \cdot 0.41 + 0.4 \cdot 1) \approx 6.5 \cdot 10^4\ L_\odot.$$

Определяем абсолютную болометрическую величину скопления:

$$M = M_\odot - 2.5 \lg \frac{L}{L_\odot} = 4.7 - 2.5 \lg \left(6.5 \cdot 10^4\right) = -7^m.3.$$

Далее определим, с какого расстояния скопление будет видно на пределе видимости невооруженным глазом:

$$m = M - 5 + 5 \lg r \quad \Rightarrow \quad r = 10^{0.2(m-M+5)} = 10^{0.2(6+7.3+5)} = 4.6 \cdot 10^3\,\text{пк}.$$

Шаровое скопление оказывается расположенным в нашей Галактике, причем недалеко от Солнца по галактическим масштабам. При этом оно наблюдается в направлении, практически перпендикулярном диску Галактики, что означает, что межзвездное поглощение света сравнительно мало. Заметим также, что даже в плотных скоплениях звезды не перекрывают друг друга: расстояния между звездами много больше размеров самих звезд, поэтому мы имели право просто складывать светимости звезд друг с другом.

C. Определим угловой размер скопления с полученного в предыдущем пункте расстояния:

$$\alpha = \frac{D}{r} = \frac{2 \cdot 12}{4600} = 5.2 \cdot 10^{-3},$$

полученное значение выражено в радианах. Тогда диаметр изображения в фокальной плоскости составит

$$d = \alpha F = 5.2 \cdot 10^{-3} \cdot 1800 \text{ мм} = 9.4 \text{ мм}.$$

Площадь изображения составит $S = \dfrac{\pi d^2}{4} \approx 69$ мм^2. Площадь каждого пикселя ПЗС-матрицы равна $S_0 = (4 \cdot 10^{-3})^2 = 1.6 \cdot 10^{-5}$ мм^2, тогда количество занимаемых изображением пикселей составит $S/S_0 = 4.3 \cdot 10^6$. Получится весьма подробное изображение, при этом размер дифракционного кружка окажется примерно совпадающим с размером пикселя.

Критерии оценивания.

K1. Пункт **A** **5**

Верное выражение (с интегралом или суммой) для оценки полного количества звезд **3**

Верное вычисление n_0 .... **2**

K2. Пункт **B** **6**

Определение светимости звезды с массой $0.8\,\mathfrak{M}_\odot$, в зависимости (1) допускаются показатели степени от 3 до 4 включительно **2**

Если светимость звезды постулируется без объяснений, но значение верно, выставляется **1** балл.

Определение верного значения полной светимости скопления **1**

Верное обоснованное определение расстояния до звезды, в том числе с возможной промежуточной оценкой абсолютной звездной величины, с пренебрежением поглощением **3**

Если участник учитывает поглощение с коэффициентом $(1 \div 3)^m$/кпк, выставляется **2** балла, поскольку направление в условии задачи свидетельствует о наблюдении перпендикулярно плоскости диска Галактики.

K3. Пункт **C** **5**

Определение (явное или формульное) углового размера скопления исходя из полученного ранее значения расстояния **1**

Верная оценка размера изображения в фокальной плоскости (формула или явный расчет) **2**

Перевод значения в пиксели (формула или явный расчет) **1**

Получение верного ответа в пикселях **1**

Максимальная оценка: **16**

11.7. Водородный фонарь

М.В.Костина

Средняя плотность водорода (в любых видах) в межпланетной среде составляет $2 \cdot 10^{-21}$ кг/м^3. Известно, что 1 км^3 невозбужденного атомарного водорода с концентрацией 1 атом/см^3 излучает всего 3 фотона в секунду. Оцените мощность излучения всего межпланетного невозбужденного атомарного водорода, находящегося в пределах радиуса 40 а.е. от Солнца. Считайте, что массовая доля невозбужденного атомарного водорода составляет 10^{-4} от общей массы водорода.

Решение. Сначала найдем количество атомов невозбужденного атомарного водорода в шаре с указанным радиусом. Его объем

$$V = \frac{4\pi}{3} (40 \cdot 1.5 \cdot 10^{11})^3 = 9 \cdot 10^{38} \text{ м}^3,$$

поэтому содержащаяся в этом объеме полная масса водорода межпланетной среды составляет $1.8 \cdot 10^{18}$ кг, а масса невозбужденного атомарного водорода $M = 1.8 \cdot 10^{14}$ кг.

Теперь рассмотрим 1 км^3 невозбужденного атомарного водорода с концентрацией 1 атом/см^3. В нем содержится 10^{15} атомов, и умножив это число на массу одного атома (которую с достаточной точностью можно считать равной $1.7 \cdot 10^{-27}$ кг), а затем разделив на 3, мы получим массу M_0, испускающую один фотон в секунду:

$$M_0 = 1.7 \cdot 10^{-27} \cdot \frac{10^{15}}{3} = 6 \cdot 10^{-13} \text{ кг}.$$

Таким образом, в интересующем нас шаре всего будет испускаться

$$N = \frac{M}{M_0} = \frac{1.8 \cdot 10^{14}}{6 \cdot 10^{-13}} = 3 \cdot 10^{26} \text{ фотонов в секунду.}$$

Как известно, невозбужденный атом водорода (у которого электрон находится на первой орбитали) может излучать только радиоизлучение на длине волны $\lambda = 21$ см. Энергия одного фотона с такой длиной волны равна

$$\varepsilon = h\nu = h\,\frac{c}{\lambda} = 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{21 \cdot 10^{-2}} = 0.95 \cdot 10^{-24} \text{ Дж}.$$

Таким образом, общая испускаемая в единицу времени энергия будет равна

$$P = N \cdot \varepsilon = 3 \cdot 10^{26} \cdot 0.95 \cdot 10^{-24} = 3 \cdot 10^2 \text{ Вт}.$$

Критерии оценивания.

К1.	Вычисление объема, заключенного в пределах 40 а.е.	**3**
К2.	Вычисление количества фотонов, излучаемых этим объемом	**3**
К3.	Указание на то, что нейтральный водород излучает в линии 21 см	**3**
К4.	Вычисление энергии одного фотона	**4**
К5.	Итоговый ответ	**3**
	Максимальная оценка:	**16**

Вычислительная ошибка, допущенная в любом из пунктов, снижает балл за него на **1**, но не снижает оценку за последующие пункты. Участник может не вычислять явно промежуточные результаты и использовать в последующем решении соответствующие формульные выражения.

При ошибке в формулах для вычисления на некотором этапе этот этап полностью не засчитывается, но все последующие оцениваются полностью.

11.8. Еще одна точка зрения

А.В.Веселова

Астероид движется в плоскости эклиптики по эллиптической орбите с большой полуосью $a = 3$ а. е. и эксцентриситетом $e = 0.4$.

A. Как для гелиоцентрического наблюдателя зависит мгновенное собственное движение астероида от расстояния до астероида?

B. В каких пределах для гелиоцентрического наблюдателя меняется собственное движение (выраженное в угловых секундах в секунду времени)?

C. Представим, что неподвижный относительно Солнца наблюдатель долгое время находится вблизи перигелия орбиты астероида. Какое собственное движение будет для него иметь астероид в тот момент, когда пройдет ровно четверть длины орбиты от перицентра?

Решение.

A. Собственное движение связано с компонентой скорости объекта, перпендикулярной лучу зрения. Эту компоненту мы можем определить из II закона Кеплера (на самом деле из закона сохранения момента импульса):

$$vr \sin\alpha = \sqrt{GM_\odot a(1-e^2)},$$

здесь v — скорость астероида на расстоянии r от Солнца, α — угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и вектором скорости $\vec{v}$. При этом $v\sin\alpha$ — это и есть перпендикулярная лучу зрения (для гелиоцентрического наблюдателя) компонента скорости $v_\perp$.

Собственное движение показывает угловой сдвиг объекта на небе за единицу времени Δt, тогда выражение для собственного движения примет вид

$$\mu\,[\text{рад}] = \frac{v_\perp \Delta t}{r} = \frac{\sqrt{GM_\odot a(1-e^2)}\Delta t}{r^2}\,.$$

Итого, мгновенное собственное движение обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца до астероида.

B. Из полученной выше формулы следует, что граничные значения собственного движения достигаются в перигелии и афелии. Вычислим их.

$$\frac{\mu_\pi}{\Delta t} = \frac{v_\pi}{r_\pi} = \frac{\sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\cdot\frac{1+e}{1-e}}}{a(1-e)} = 9.7\cdot 10^{-8}\ \text{рад/с} = 0''.02/\text{с}.$$

$$\frac{\mu_\alpha}{\Delta t} = \frac{v_\alpha}{r_\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\cdot\frac{1-e}{1+e}}}{a(1+e)} = 1.8\cdot 10^{-8}\ \text{рад/с} = 0''.004/\text{с}.$$

C. Астероид находится в четверти орбиты от перицентра, то есть в вершине малой оси. В этом случае касательная к эллипсу (и, следовательно, вектор скорости) направлен параллельно большой оси эллипса. Нужно найти скорость в этой точке и определить ее проекцию на перпендикуляр к лучу зрения наблюдателя.

Расстояние от фокуса до вершины малой оси равно в точности большой полуоси эллипса. Полную скорость определим из интеграла энергий:

$$v = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}} = 1.7\cdot 10^4\ \text{м/с}\,.$$

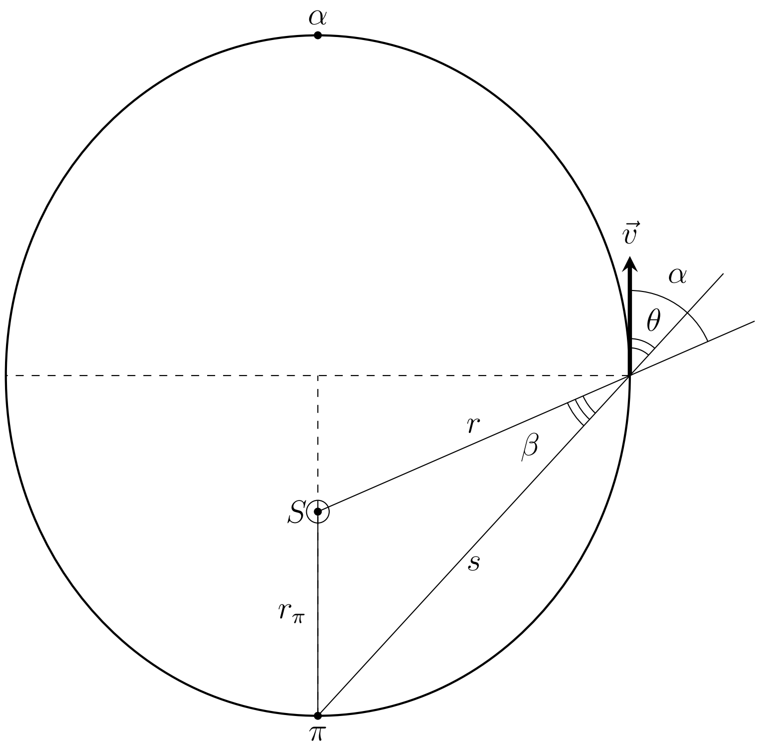

Рис. 1: К решению задачи 8.

Можно сразу использовать готовый факт о совпадении скорости в вершине малой оси со скоростью на круговой орбите радиуса a.

Величина малой полуоси связана с большой полуосью и эксцентриситетом формулой $b = a\sqrt{1-e^2}$, тогда расстояние от перицентра до вершины малой полуоси составит

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2 - e^2} = 6.1 \cdot 10^{11} \text{ м.}$$

Угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и вектором скорости $\vec{v}$ оценим из закона сохранения момента импульса:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{GM_\odot a(1-e^2)}}{vr} = \frac{\sqrt{GM_\odot a(1-e^2)}}{\sqrt{\dfrac{GM_\odot}{a}} \cdot a} = \sqrt{1-e^2}, \quad \alpha \approx 66^\circ.$$

Угол между лучом зрения наблюдателя равен $\theta = \alpha - \beta$, где угол β определяется из треугольника «Солнце — наблюдатель — астероид»:

$$\cos\beta = \frac{r^2 + s^2 - r_\pi^2}{2rs} = \frac{a^2 + a^2(2-e^2) - a^2(1-e)^2}{2a^2\sqrt{2-e^2}} = \frac{1 + e - e^2}{\sqrt{2-e^2}}, \quad \beta \approx 24^\circ.$$

Рассчитываем угол θ: $\theta = 66^\circ - 24^\circ = 42^\circ$. Тогда мгновенное собственное движение астероида для наблюдателя составит

$$\mu = \frac{v\sin\theta}{s} \approx 4 \cdot 10^{-3}{}''/\text{с}.$$

Критерии оценивания.

K1. Пункт **A** **6**

Указание на связь собственного движения с компонентой скорости, перпендикулярной лучу зрения (формульное или словесное) **2**

Физически верная модель связи собственного движения с параметрами орбиты и Солнца, в том числе через II закон Кеплера или интеграл площадей **3**

Получение итогового верного соотношения $\mu \propto 1/r^2$ **1**

K2. Пункт **B** **4**

Явное или формульное указание на точки орбиты, в которых достигаются граничные значения собственного движения **2**

Вычисление верных итоговых значений в указанных в условии единицах измерения .... **1+1**

K3. Пункт **C** **6**

Указание на то, что объект находится в вершине малой оси (графическое или словесное) **1**

Верная обоснованная оценка расстояния до наблюдателя (в а.е. или иных осмысленных единицах, или же верная формульная запись) **2**

Верный расчет угловых характеристик, необходимых для проецирования скорости на картинную плоскость **2**

Верная итоговая оценка собственного движения (с учетом погрешностей засчитываются ответы в интервале от 3.5 до 4.5 миллисекунд дуги в год при верном ходе решения) **1**

Максимальная оценка: **16**

11.9. С Новым годом!

П.А. Тараканов

Изображенный на новогодней открытке Дед Мороз проводит наблюдения в 00^h00^m истинного солнечного времени 1 января 2026 года. Определите примерные широту места наблюдения и координаты (прямое восхождение и склонение) наблюдаемого объекта, если известно, что наблюдения ведутся в России. В каком созвездии находится наблюдаемый объект?

Рис. 2: Рисунок к задаче 9.

Решение. Прежде всего обратим внимание на монтировку телескопа. Она очевидно несимметрична относительно вертикальной оси, а это означает, что она экваториальная: одна из осей позволяет вращать телескоп вокруг оси мира, вторая — наводить его на объекты, находящиеся на разных склонениях.

Далее учтем, что в таком случае одна из осей телескопа (нарисованная красным на рисунке ниже) — это ось мира, и в направлении, заданном красной стрелкой, находится Северный полюс мира (поскольку наблюдения, по условию, проводятся в России — т.е. в Северном полушарии). Азимут полюса равен 180°, а телескоп наведен на объект с азимутом 0°, т.е. находящийся в верхней кульминации.

Отсюда можно сделать два важных вывода. Во-первых, мы можем либо непосредственно измерить склонение δ объекта на картинке (это угол между зеленой линией, задающей направление на объект, и синей линией, задающей положение небесного экватора), либо измерить отдельно широту наблюдения φ и высоту в верхней кульминации $h_{\text{ВК}}$, после чего вычислить склонение, воспользовавшись соотношением $h_{\text{ВК}} = 90° - \varphi + \delta$. Во-вторых, в этой ситуации прямое восхождение объекта α совпадает со звездным временем s, поскольку часовой угол наблюдаемого объекта равен 0°. Для нахождения углов можно сделать дополнительные построения на картинке, аналогичные изображенным выше, а затем воспользоваться несколькими различными вариантами действий. Если в наличии имеется транспортир — просто измерить нужные углы. Если транспортира нет — построить прямоугольные треугольники, включающие требуемые углы (например, треугольник со стороной, проведенной красной штриховой линией), а затем измерить их стороны линейкой и по полученному таким образом синусу, косинусу или тангенсу

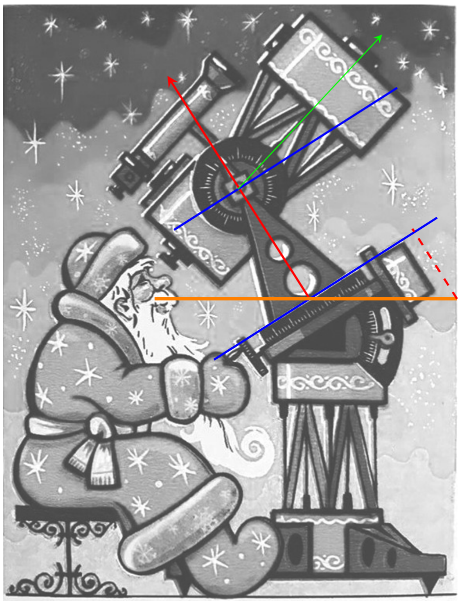

Рис. 3: Рисунок к решению задачи 9.

угла найти угол. Точность в любом случае будет не очень высокой, однако с погрешностью $3° \div 5°$ результат получить несложно.

В результате будет найдено следующее:

- Высота полюса мира над горизонтом (угол между красной и оранжевой линиями) составляет 58°, и он равен широте (северной) места наблюдения. Таким образом, $\varphi = +58°$ (возможно, Дед Мороз устроился с телескопом в гостях у Снегурочки в Костроме).
- Угол между направлением на объект и небесным экватором (между зеленой и синей линиями) составляет 14°, таким образом, склонение объекта равно $\delta = +14°$ (оно положительное, поскольку объект находится над экватором).

Теперь определимся с прямым восхождением. Поскольку наблюдения проводятся в истинную солнечную полночь, то звездное время и прямое восхождение наблюдаемого объекта отличаются от прямого восхождения Солнца $\alpha_\odot$ равно на 12^h. Оценить прямое восхождение Солнца 1 января можно, считая, что в день весеннего равноденствия оно равно 0^h, а далее в течение года равномерно увеличивается. Тогда каждый месяц оно становится больше на 2^h, в день зимнего солнцестояния равно 18^h, а за оставшуюся треть месяца достигает значения $\alpha_\odot = 18^h40^m$. Можно также вспомнить, что Фридрих Бессель предлагал в качестве начала года использовать момент, когда прямое восхождение Солнца оказывается в точности равным 18^h40^m, получившийся так называемый «Бесселев Новый год» отстоит от обычного по всемирному времени не более чем на половину суток. В любом случае мы приходим к выводу, что прямое восхождение наблюдаемого объекта примерно $\alpha = 6^h40^m$.

Осталось ответить на вопрос про созвездие. Тут можно ориентироваться на то, что в новогоднюю ночь в истинную полночь практически в верхней кульминации находится Сириус, и искать созвездие, находящееся симметрично относительно него от экватора. Это Близнецы, хотя низкая точность определения склонения в принципе позволяет предположить еще один вариант: Единорог (а при более заметной ошибке определения прямого восхождения еще и Орион).

Критерии оценивания.

К1. Явный или неявный вывод об экваториальной монтировке **2**
К2. Вывод о наблюдении объекта в верхней кульминации **3**
К3. Определение широты любым способом **3**

Баллы по этому критерию не выставляются, если указана южная/отрицательная широта или утверждается, что возможны два ответа — для Северного и Южного полушарий.

К4. Определение склонения любым способом **3**
К5. Определение прямого восхождения любым способом **3**

Ответ должен лежать в пределах от 6^h30^m до 6^h50^m, иначе баллы по этому критерию не выставляются.

К6. Созвездие Близнецы **2**

Если в качестве ответа указаны Единорог или Орион — **1** балл.

Максимальная оценка: **16**

Численные значения для широты и склонения могут отличаться на $3°$ в любую сторону. При погрешности более $3°$ (но не более $6°$) оценка за соответствующий критерий снижается на **1** балл. При погрешности более $6°$ оценка за критерий равна **0** баллов.

11.10. Сверхновая задача

М.В.Костина

У источника повторных быстрых радиовсплесков обнаружено рекордно быстрое уменьшение меры дисперсии DM. Считается, что это связано с расширением остатка вспышки сверхновой и, тем самым, уменьшением плотности этого остатка.

Можно считать, что остаток сверхновой полностью ионизован и находится на стадии свободного расширения. Тогда изменение со временем меры дисперсии из-за расширения остатка можно выразить так:

$$\mathrm{DM} = 260\ \text{пк/см}^3 \left(\frac{M}{10M_\odot}\right)^2 \left(\frac{E_0}{10^{44}\ \text{Дж}}\right)^{-1} \times \left(\frac{t}{100\ \text{лет}}\right)^{-2},$$

где M — масса выброса, E_0 — энергия взрыва, а t — время, прошедшее с момента вспышки.

Измерения меры дисперсии для этого источника приведены на рисунке.

A. Определите по графику скорость изменения меры дисперсии.
B. Определите возраст остатка сверхновой в годах.
C. Определите скорость расширения оболочки сверхновой, считая ее постоянной. Примите $E_0 = 2 \cdot 10^{44}$ Дж.
D. Определите радиус остатка в данный момент в парсеках.

На графике приведены данные, относящиеся только к остатку вспышки сверхновой, все другие факторы, вносящие вклад в наблюдаемое значение DM, вычтены.

На рисунке показана эволюция меры дисперсии примерно за 3 года наблюдений, начиная от некоторого момента в недавнем прошлом. По оси абсцисс отложены непрерывные отсчеты времени в сутках. По оси ординат — мера дисперсии DM. Горизонтальная жирная линия отмечает среднее значение меры дисперсии на показанном промежутке. Также на графике проведена пунктирная линия, соответствующая наилучшей линейной модели для определения скорости уменьшения DM на данном промежутке времени.

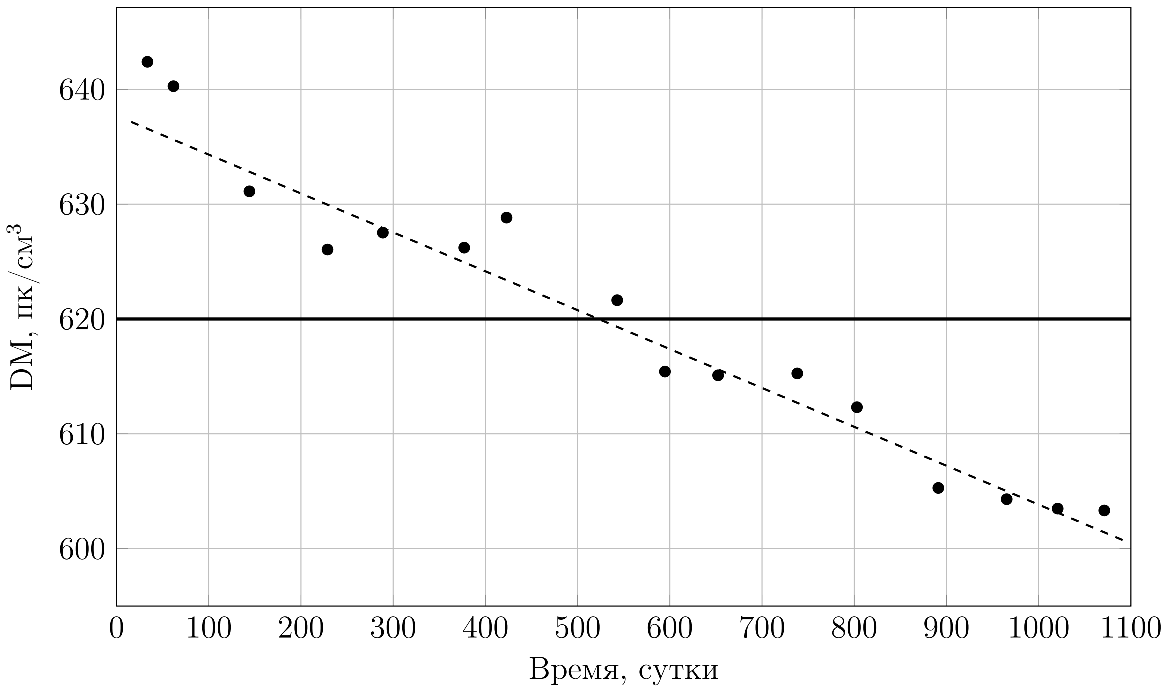

Рис. 4: Рисунок к задаче 10.

Для справки. Мера дисперсии DM — это характеристика среды, через которую проходит излучение, определяющая разное время прихода сигналов к наблюдателю на разных частотах. Мера дисперсии равна полному числу электронов на луче зрения в столбе сечением 1 см^2 и измеряется в астрономии в единицах пк/см^3:

$$\mathrm{DM}\ [\text{пк/см}^3] = \langle n_\mathrm{e} \rangle\, r,$$

где $\langle n_\mathrm{e} \rangle$ — средняя концентрация электронов на луче зрения и r — расстояние до источника.

Решение.

A. По графику измеряем скорость изменения меры дисперсии, которая составит -12.4 пк/см^3 в год.

B. Мера дисперсии зависит только от времени, так как остальные величины в формуле константы. Эта зависимость нелинейная. Но у нас есть мгновенная скорость изменения DM и значение ее самой в настоящий момент. Мгновенная скорость — это производная DM по времени. Тогда можно продифференцировать зависимость DM от времени:

$$\frac{d\,\mathrm{DM}}{dt} = -2t^{-2-1} = -\frac{2\cdot\mathrm{DM}}{t}.$$

Таким образом, возраст остатка находим так:

$$t = \left| -\frac{2\cdot\mathrm{DM}}{d\,\mathrm{DM}/dt} \right| = \frac{2\cdot 620}{12.4} = 100 \text{ лет.}$$

C. Энергия взрыва E_0 идет на разгон оболочки массы M до скорости v:

$$E_0 = \frac{Mv^2}{2}. \tag{2}$$

Получив возраст остатка, можно найти комбинацию

$$\left(\frac{M}{10M_\odot}\right)^2 \left(\frac{E_0}{10^{44}\ \text{Дж}}\right)^{-1} = 620\ \text{пк/см}^3/260\ \text{пк/см}^3 = 2.4.$$

Масса выброса нам неизвестна, поэтому ее нужно выразить из полученной комбинации через энергию:

$$\frac{M}{10M_\odot} = \left(2.4\cdot\frac{E_0}{10^{44}\ \text{Дж}}\right)^{1/2}, \tag{3}$$

$$M = 2\cdot 10^{31}\ \text{кг} \left(2.4\cdot\frac{E_0}{10^{44}\ \text{Дж}}\right)^{1/2} = 3.1\cdot 10^9 \sqrt{E_0[\text{Дж}]}\ \text{кг}.$$

Найдем скорость:

$$v = \sqrt{\frac{2E_0}{M}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{E_0}}{3.1\cdot 10^9}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2\cdot 10^{44}}}{3.1\cdot 10^9}} = 3\cdot 10^6\ \text{м/с} =$$

$$= 3\cdot 10^3\ \text{км/с} = \frac{3\cdot 10^3}{30}\cdot 2\cdot\pi\ \text{а.е./год} \approx 6\cdot 10^2\ \text{а.е./год}.$$

D. Осталось определить радиус:

$$R = vt = 6 \cdot 10^2 \text{ а.е./год} \cdot 100 = 6 \cdot 10^4 \text{ а.е.} \approx 0.3 \text{ пк.}$$

Критерии оценивания.

K1. Пункт **A**: измерение скорости изменения DM по графику **3**

Если погрешность определения скорости больше 0.4 пк/см^3 в год, оценка за этот пункт снижается на **1** балл.

K2. Пункт **B** **5**

Дифференцирование DM по времени **3**

Вычисление возраста остатка **2**

Если ответ для возраста дан не в годах, оценка снижается до **1** балла при правильном численном значении.

K3. Пункт **C** **9**

Явное утверждение о том, что энергия E_0 является кинетической энергией оболочки, или неявное использование этого утверждения (например, в виде формулы (2)) **2**

Получение выражения, связывающего массу оболочки и E_0 ((3) или аналогичного) **4**

Вычисление скорости **3**

K4. Пункт **D**: вычисление радиуса **3**

Если ответ для радиуса дан не в парсеках, оценка снижается до **1** балла при правильном численном значении.

Максимальная оценка: **20**