Региональный этап. День 1

Условия, решения и схема оценивания. 10 класс

Содержание

10.1. Радуга

В. Б. Игнатьев

Наблюдатель на поверхности Земли 1 октября видит радугу, пересекающую горизонт в точках с азимутами 51° и 129°. Определите широту наблюдателя и среднее солнечное время в момент наблюдения. Первичное (наиболее яркое) кольцо радуги находится на удалении 138° от Солнца, свет от которого преломляется в капельках воды.

Уравнением времени и рефракцией пренебречь. Осеннее равноденствие в этом году наступило 23 сентября.

Решение.

Азимут центра радуги можно определить как среднее арифметическое азимутов точек пересечения радугой горизонта. Получается значение 90 градусов. В центре круга радуги находится противосолнечная точка, которая, следовательно, находится на первом вертикале. Значение азимута в 90 градусов говорит нам про направление на запад, значит, Солнце находится на первом вертикале над или под точкой востока. Угловой радиус радуги – 42 градуса.

Нарисуем схему, поясняющую происходящее в задаче.

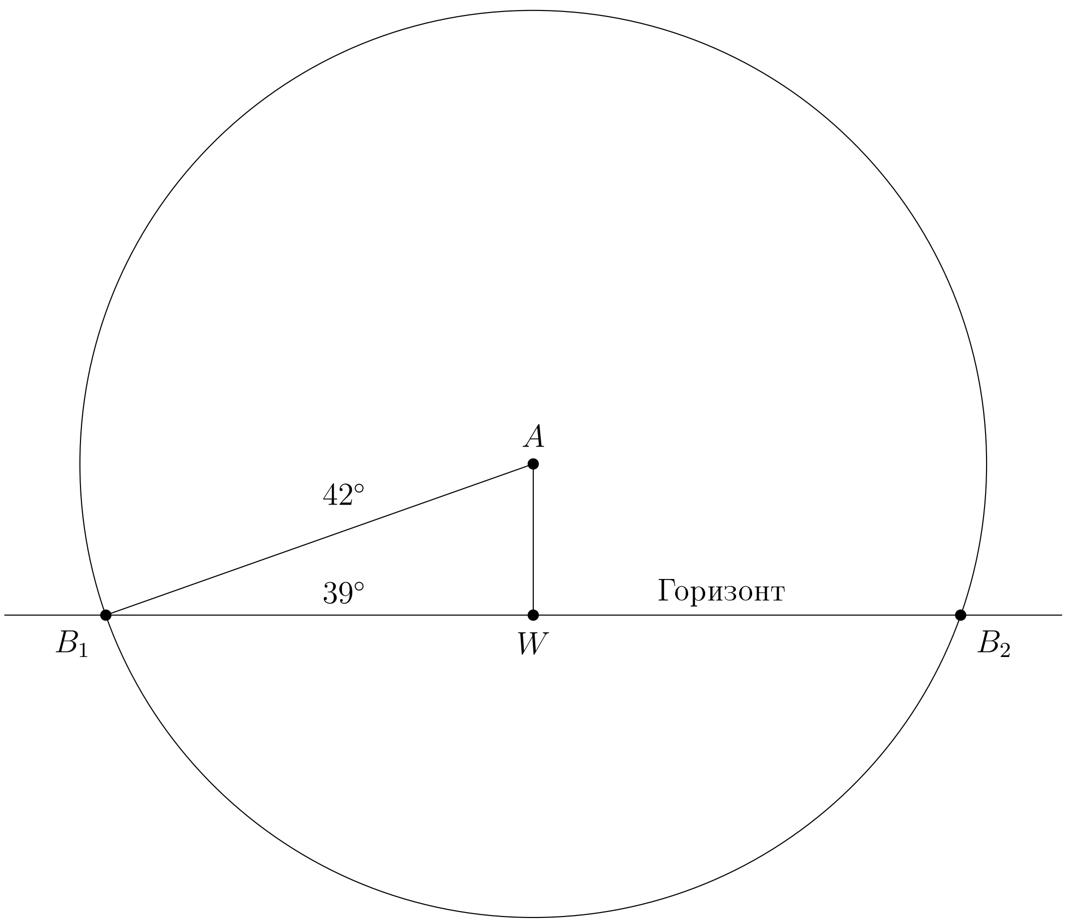


Рис. 1: Плоское приближение. Вид на запад. Вариант 1.

Из плоского приближения по построению определяем, на какой высоте $h_{\odot}$ находится центр

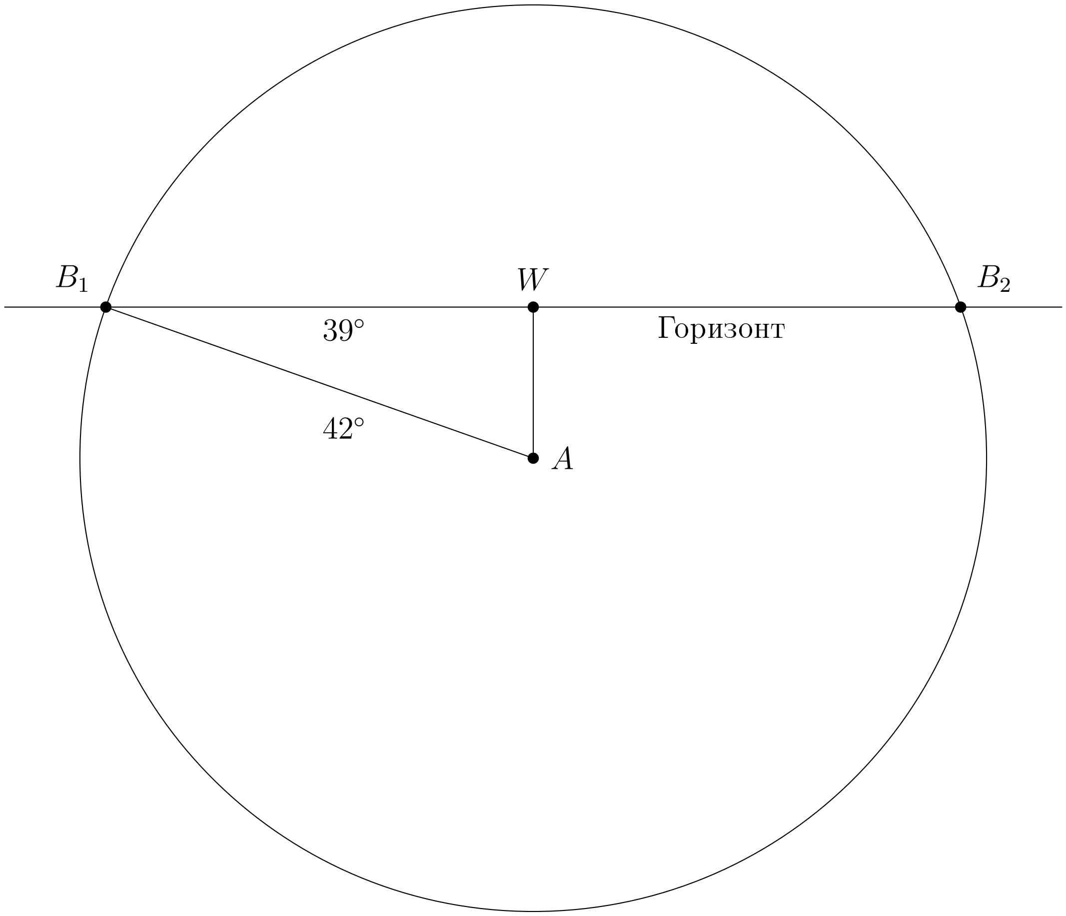


Рис. 2: Вариант 2. Антисолнечная точка находится под горизонтом

радуги:

$$h_{\odot} = \sqrt{42^2 - 39^2} = 15.6^\circ$$

Сразу стоит отметить, что из двух описанных выше вариантов остается только один. Солнце должно быть над горизонтом, а противосолнечная точка – под горизонтом, поскольку, если Солнце находится под горизонтом на высоте -15.6°, в месте наблюдения уже наступили астрономические сумерки, и радугу не будет видно.

Теперь определим значение склонения Солнца 1 октября. Снова воспользуемся плоским приближением, только теперь для окрестностей точки пересечения небесного экватора и эклиптики. С момента осеннего равноденствия прошло $31 - 23 = 8$ дней. За это время Солнце сместилось по эклиптике на угол l:

$$l = \frac{360}{365}N = \frac{360}{365} \cdot 8 = 7.9^\circ$$ [1]

Поскольку дело происходит вблизи точки равноденствия, можем воспользоваться формулой

$$\delta = -l \cdot \sin\varepsilon = -3.15^\circ$$

[1] Решение с ответом 8 градусов засчитывается в полном объеме

Знак «минус» возникает, поскольку после осеннего равноденствия склонение Солнца становится отрицательным.

Участник мог определить склонение Солнца, воспользовавшись формулами сферической тригонометрии:

$$\sin\delta = -\sin\varepsilon \cdot \sin l = -3.15^\circ$$

Если участник верно воспользовался этими формулами и получил правильный ответ, то этот блок решения засчитывается полностью. В случае ошибки в записи формулы или в вычислениях данный пункт не засчитывается.

Следующий шаг – определим широту места наблюдения. Снова воспользуемся плоским приближением. Нарисуем горизонт в окрестностях точки востока. Стоит сразу отметить, что широта места наблюдения отрицательная (южная), поскольку в северном полушарии 1 октября Солнце было бы под точкой востока, а не над ней.

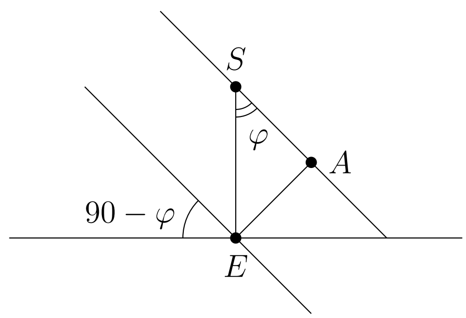


Рис. 3: Плоское приближение. Определение широты и часового угла.

На рисунке горизонтальная линия – это горизонт, точка E – точка востока, точка S – положение Солнца. Наклонная линия, проходящая через точку востока (E) – небесный экватор, отрезок ES – высота Солнца, отрезок EA – модуль склонения Солнца. Из рисунка следует, что

$$\sin\varphi = \frac{3.15^\circ}{15.6^\circ} \qquad \to \qquad \varphi = 11.6^\circ \text{ ю.ш.}$$

Теперь перейдем к определению **местного солнечного времени**:

$$t^* = SA = \sqrt{15.6^2 - 3.15^2} = 15.3^\circ = 1^h 1^m 7^s$$

Здесь мы сразу перевели полученный угол из угловой меры во временную. Если бы Солнце находилось в точке A, часовой угол был бы равен -6^h, и местное время было бы $T = 12^h - 6^h$. Но точка S ближе к меридиану на угол t^*, поэтому местное солнечное время равно

$$T = 12^h - 6^h + t^* = 7^h 1^m 1^s. \approx 7^h 1^m$$

Ответ. $\varphi = 11.6^\circ$ ю.ш., $T = 7^h 1^m$

Критерии оценивания. **16**

К1. Работа с радугой **5**

Определение азимута противосолнечной точки 2

Определение азимута Солнца 1

Определение высоты Солнца 2

К2. Выбор варианта, в котором Солнце находится над горизонтом **2**

Выбор варианта должен быть обоснован в решении в явном виде

К3. Прямое указание, что широта наблюдения южная **2**

В решении должно быть приведено обоснование в явном виде. При наличии в ответе значений в обоих полушариях за данный пункт ставится 0 баллов.

К4. Определение величины широты места наблюдения. Требуемая точность ответа $\pm 2^\circ$ . . . **2**

К5. Определение местного солнечного времени **5**

Диапазон допустимых ответов $T \in [6^h 50^m; 7^h 15^m]$. За пределами этого диапазона оценка за критерий строго 0 баллов. Если участник ошибся с выбором точки востока/запада или с южным/северным полушарием, оценка за данный этап – 0 баллов. Если участник посчитал, что возможны два варианта, и получил решения и для северного и для южного полушария, то за критерий 3 ставится 0 баллов, а критерий 5 оценивается по решению для южного полушария.

10.2. Главный пояс астероидов

В. Б. Игнатьев

Общая масса главного пояса астероидов составляет 4% массы Луны. При этом десять самых массивных тел ГПА составляют около 55% от всей массы пояса. Предположим, что практически вся оставшаяся масса находится в астероидах, размер которых превышает 1 км. Средний радиус таких астероидов примем за 5 км. Считая, что все астероиды обращаются вокруг Солнца в одной плоскости и равномерно распределены внутри кольца с внутренним радиусом 2.1 а.е и внешним радиусом 3.3 а.е., определите характерное расстояние между такими астероидами.

Астероиды можно считать сферическими. Средняя плотность астероидов в главном поясе $\rho = 2\,500$ кг/м^3.

Решение.

Сначала определим суммарную массу рассматриваемых астероидов. Она составляет 45% от массы всего главного пояса, которая в свою очередь, в 25 раз меньше массы Луны.

$$M = 0.45 \cdot 0.04 \cdot M_{☾} = 1.33 \cdot 10^{21} \text{ кг}$$

Теперь оценим массу одного астероида:

$$M_1 = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 = 2500 \text{ кг/м}^3 \ \frac{4\pi}{3} (5 \cdot 10^3 \text{ м})^3 = 1.3 \cdot 10^{15} \text{ кг}$$

Зная массу всех рассматриваемых астероидов и массу одного астероида, можно определить количество астероидов:

$$N = \frac{M}{M_1} = \frac{1.33 \cdot 10^{21}}{1.3 \cdot 10^{15}} = 10^6 \text{ штук.}$$

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи, а именно оценить характерное расстояние между астероидами, если они распределены равномерно.

По условию задачи все астероиды находятся внутри кольца в одной плоскости, причем распределены в этом кольце равномерно. Тогда отношение площади всего кольца к числу астероидов даст нам площадь области кольца, «занятой» одним астероидом. Если мы посчитаем эту область кольцом, то диаметр этого кольца и будет являться характерным расстоянием между астероидами.

С одной стороны, площадь всего кольца астероидов равна

$$S = \pi R^2_{\text{внеш}} - \pi R^2_{\text{внут}} = \pi(3.3^2 - 2.1^2) = 20.35 \text{ а.е.}^2$$

С другой стороны,

$$S = N \cdot S_1 = N \frac{\pi}{4} D^2$$

где D – характерное расстояние между астероидами. Выразим величину D.

$$D = \sqrt{\frac{4S}{\pi N}}$$

Подставим значения:

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot 20.35 \text{ а.е.}^2}{\pi 10^6}} = 5.12 \cdot 10^{-3} \text{ а.е.}$$

Переведем из астрономических единиц в километры:

$$D = 5.12 \cdot 10^{-3} \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ км} \approx 7.6 \cdot 10^5 \text{ км}.$$

Возможны также другие оценки формы этой области (например, можно взять ее квадратной, и принять за характерное расстояние длину стороны этого квадрата). Найдем значение расстояния для такой формы области:

$$S = N \cdot S_1 = N D_{sq}^2$$

где D_{sq} – характерное расстояние между астероидами. Выразим величину D_{sq}.

$$D_{sq} = \sqrt{\frac{S}{N}}$$

Подставим значения:

$$D_{sq} = \sqrt{\frac{20.35 \text{ а.е.}^2}{10^6}} = 4.51 \cdot 10^{-3} \text{ а.е.}$$

Переведем из астрономических единиц в километры:

$$D_{sq} = 4.51 \cdot 10^{-3} \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ км} \approx 6.8 \cdot 10^5 \text{ км}.$$

Ответ: $7.6 \cdot 10^5$ км или $6.8 \cdot 10^5$ км.

Критерии оценивания. **16**

К1. Определение суммарной массы исследуемых астероидов 4

К2. Определение числа астероидов 4

Если на этом этапе участник перепутал радиус астероида с его диаметром, то максимальная оценка за этот пункт – 1 балл, при прочих верных расчетах. Остальные пункты оцениваются, исходя из полученных участником величин.

К3. Использование плоской (двумерной) модели для вычисления характерной площади . . . 2

Участник может решать задачу и в трехмерной модели, в которой толщина кольца по вертикальной оси равна характерному диаметру астероида.

К4. Определение площади главного пояса астероидов 2

Если участник использовал только один из двух заданных в условии радиусов или считал пояс квадратным, за данный этап ставится 0 баллов

К5. Опредение характерного расстояния (в любой из описанных выше моделей) 4

Данный балл ставится только при наличии верного численного ответа. Арифметическая ошибка в данном пункте, в том числе при переводе из одних единиц в другие, снижает оценку на 3 балла.

10.3. Кратные орбиты

В. Б. Игнатьев, А. Ф. Шишкина

Астероид двигается по круговой орбите вокруг Солнца. В некоторой точке орбиты вследствие взрыва он разделяется на два осколка, один из которых продолжает двигаться в том же направлении, что и исходный астероид. При этом орбитальный период первого осколка становится в два раза больше орбитального периода исходного астероида, а второй осколок переходит на орбиту с периодом обращения, в два раза меньшим периода исходного астероида.

Определите отношение масс осколков.

Решение. Точка, в которой произошел взрыв астероида и разлет двух осколков, является перицентром орбиты первого осколка и апоцентром орбиты второго осколка.

Рассмотрим осколок, который продолжил двигаться в том же направлении по орбите с большим периодом. После разлета этот осколок стал двигаться быстрее, а точка разлета стала перицентром его орбиты. Запишем скорость в перицентре

$$V_p = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e_1}{1-e_1}} = \sqrt{\frac{GM}{q}(1+e_1)} = V_0\sqrt{1+e_1}$$

V_0 – это скорость осколка на начальной круговой орбите, а e_1 – эксцентриситет орбиты, на которую перешел осколок.

Период новой орбиты стал в 2 раза больше, значит, полуось новой орбиты стала больше в $2^{2/3}$ раза. Для исходной орбиты астероида удаление астероида от Солнца было равно полуоси его орбиты a_0, а после разлета это же расстояние стало перицентрическим расстоянием новой орбиты q. Выразим отсюда e_1.

$$a_0 = q = a_1(1-e_1) \qquad \rightarrow \qquad e_1 = 1 - \frac{a_0}{a_1} = 1 - 2^{-2/3} = 1 - k_1,$$

здесь мы ввели обозначение $k_1 = 2^{-2/3}$.

Теперь рассмотрим второй осколок. Он замедляется, следовательно, будет находится в апоцентре своей орбиты. Проведем аналогичные рассуждения.

$$V_a = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e_2}{1+e_2}} = \sqrt{\frac{GM}{Q}(1-e_2)} = V_0\sqrt{1-e_2}$$

$$a_0 = Q = a_2(1+e_2) \qquad \rightarrow \qquad e_2 = \frac{Q}{q_2} - 1 = 2^{2/3} - 1 = k_2 - 1$$

здесь мы обозначили $k_2 = 2^{2/3}$

Теперь запишем **закон сохранения импульса**. Мы можем это сделать в системе отчета центрального тела (Солнца), а можем перейти в систему отчета астероида, который распадается. Обозначим за m_1 и m_2 массы соответствующих осколков.

$$(m_1 + m_2) \cdot V_0 = m_1 V_p + m_2 V_a$$

$$m_1(V_0 - V_p) = -m_2(V_0 - V_a)$$

Избавимся от скоростей осколков в перицентре и апоцентре их орбит, выразив их через скорость астероида на круговой орбите и эксцентриситеты орбит осколков.

$$m_1V_0(\sqrt{1+e_1} - 1) = m_2V_0(1 - \sqrt{1-e_2})$$

Запишем выражение для отношения масс осколков:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - \sqrt{1-e_2}}{\sqrt{1+e_1} - 1}$$

Подставим e_1 и e_2 в записанное выражение:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - \sqrt{2-k_2}}{\sqrt{2-k_1} - 1} = \frac{1 - \sqrt{2-2^{2/3}}}{\sqrt{2-2^{-2/3}} - 1} = 2.1$$

Существует и **второй вариант**, который может реализоваться в этой задаче. Второй осколок может полететь по эллиптической орбите уже в обратную сторону. При этом его скорость будет направлена строго против направления скорости исходного астероида, поскольку первый осколок по условию сохраняет направление своего движения. Запишем закон сохранения импульса в этом случае.

$$(m_1 + m_2) \cdot V_0 = m_1V_p - m_2V_a$$
$$m_1(V_p - V_0) = m_2(V_0 + V_a)$$
$$m_1V_0(\sqrt{1+e_1} - 1) = m_2V_0(1 + \sqrt{1-e_2})$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \sqrt{2-k_2}}{\sqrt{2-k_1} - 1} = \frac{1 + \sqrt{2-2^{2/3}}}{\sqrt{2-2^{-2/3}} - 1} = 9.63$$

Ответ: Отношение масс осколков – 2.1 или 9.6

Критерии оценивания. **16**

К1. Анализ орбиты первого осколка. Нахождение эксцентриситета **3**

К2. Анализ орбиты второго осколка. Нахождение эксцентриситета **3**

Участник может определить численное значение эксцентриситетов (0.37 и 0.59), а может оставить в виде формулы для подстановки на финальном этапе задачи. При правильной записи формул или верных численных значениях пункты 1 и 2 оцениваются полностью.

К3. Верная запись и применение закона сохранения импульса. Случай 1 . . . . **2**

По данному критерию баллы ставятся только в том случае, если участник корректно записал закон сохранения импульса в любой из систем отчета.

К4. Получение выражения для отношения масс. Случай 1 . . . . **2**

К5. Верная запись и применение закона сохранения импульса. Случай 2 . . . . **2**

По данному критерию баллы ставятся только в том случае, если участник корректно записал закон сохранения импульса в любой из систем отчета.

К6. Получение выражения для отношения масс. случай 2 . . . . **2**

К7. Запись финального ответа с двумя вариантами **2**

Рассмотрение только одного из вариантов может быть оценено максимум в 10 баллов, по критериям №№5 – 7 в этом случае ставится 0 баллов.

10.4. Подобрать окуляр

В. Б. Игнатьев

У двойной системы, состоящей из одинаковых звезд, суммарный блеск равен 13.5^m, а угловое расстояние между компонентами $1.0''$. Проводятся визуальные наблюдения этой системы в телескоп с диаметром $D = 20$ сантиметров и относительным отверстием $1/5$. Определите диапазон увеличений, при которых звезду видно глазом в окуляр телескопа.

Разрешающая способность глаза $1'$. Предельная звездная величина для глаза 6^m. Влиянием атмосферы пренебречь.

Решение.

Рассмотрим **разрешающую способность** нашей оптической системы. Она зависит от диаметра объектива телескопа, от качества атмосферы и от разрешающей способности глаза.

Дифракционный предел телескопа

$$\theta_1 = \frac{1.22\lambda}{D} = 0.7'',$$

и это меньше, чем угловое разделение между звездами, поэтому двойная система в принципе может быть разрешена, то есть наблюдатель теоретически сможет увидеть две компоненты по отдельности.

Атмосферным размытием мы пренебрегаем по условию задачи.

Третий действующий фактор – разрешающая способность глаза и увеличение телескопа:

$$\theta_3 = \frac{60''}{\Gamma}$$

Угловое разделение между компонентами составляет $1.0''$, что заметно больше дифракционного предела объектива. Рассмотрим вариант расчёта, при котором самая худшая разрешающая способность определяет разрешаюшую способность всей системы:

$$1.0'' = \frac{60''}{\Gamma_0}$$

отсюда получаем коэффициент увеличения $\Gamma_0 = 60$ крат. При увеличении, большем, чем 60, система видна как две отдельные звезды; при увеличении меньше Γ_0 наблюдатель будет видеть двойную звезду единым объектом.

Теперь рассмотрим **проницающую способность** телескопа. С одной стороны, при увеличении, большем, чем равнозрачковое, проницающая способность определяется только диаметром телескопа:

$$m_T = 6^m + 5\lg\frac{D}{d_{\text{гл}}} = 6^m + 5\lg\frac{200}{6} = 13.6^m.$$

В случае, если увеличение меньше, чем равнозрачковое

$$m_{T1} = 6^m + 5\lg\Gamma.$$

Равнозрачковое увеличение для данного телескопа

$$\Gamma_R = \frac{F}{f} = \frac{D}{d_{\text{гл}}} = \frac{200}{6} = 33^x.$$

По условию задачи, двойная система состоит из двух одинаковых звезд, а ее суммарный блеск равен 13.5^m. Отметим, что суммарная звездная величина близка к предельной проницающей способности телескопа, но визуально систему в целом наблюдателю будет видно.

В случае, если наблюдатель сможет разрешить систему, для него звездная величина каждой компоненты будет равна

$$m_{1,2} = 13.6 + 2.5 \lg 2 = 14.35^m.$$

Это больше, чем предельная проницающая способность телескопа. Отсюда делаем вывод, что при увеличении, большем Γ_0, наблюдатель не увидит ни звезду целиком, ни отдельные компоненты. Получаем ограничение на увеличение «сверху».

Определим нижнюю границу доступных нам увеличений оптической системы. При уменьшении коэффициента увеличения от величины $\Gamma_0 = 60$ до величины $\Gamma_R = 33$ ситуация не будет меняться. Действительно, проницающая способность определяется только диаметром объектива (который постоянен), а в этих условиях двойная система видна как одна звезда.

При коэффициенте увеличения, меньшем, чем Γ_R, проницающая способность будет равна

$$m_{T1} = 6^m + 5 \lg \Gamma.$$

Подставим суммарную звездную величину двойной звезды и определим нижнюю границу доступных увеличений:

$$13.5 = 6 + 5 \lg \Gamma$$

Отсюда нижний предел коэффициента увеличения равен $\Gamma = 32$ крат.

Ответ $[32; 60]$

Примечание. Участник может решать задачу в более сложной модели. Можно учитывать разрешающую способность телескопа, как независимый источник погрешности наблюдений, тогда разрешающие способности объектива, атмосферы и глаза складываются как независимые ошибки, то есть квадратично:

$$\theta_{\Sigma} = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_a^2 + \theta_3^2}$$

Влиянием атмосферы по условию задачи мы пренебрегаем, тогда

$$\theta_{\Sigma} = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_3^2},$$

и условие на максимальное увеличение, при котором система способна разрешаться глазом, будет выглядеть следующим образом:

$$\theta_a = \sqrt{\theta_{\Sigma}^2 - \theta_1^2} = \frac{60''}{\Gamma_0}$$

Отсюда

$$\Gamma_0 = \frac{60''}{\sqrt{\theta_{\Sigma}^2 - \theta_1^2}} = \frac{60''}{\sqrt{1^2 - 0.7^2}} = 84$$

Оба варианта решения являются корректными и оцениваются в полном объеме.

Финальный ответ $[32; 60]$ или $[32; 84]$

Критерии оценивания. **16**

K1. Определена разрешающая способность объектива **2**

K2. Определено увеличение, при котором система будут разрешена **4**

Запись выражения для разрешающей способности телескопа и глаза 2

Определение величины увеличения (60 или 84, в зависимости от модели) 2

K3. Проведена проверка, что звезду в принципе можно увидеть **2**

K4. Определены звездные величины компонент, явно сказано, что они ненаблюдаемы **2**

K5. Определено, что максимальное увеличение – Γ_0 .... **2**

Без проверки критерия 3 и критерия 4 максимальная оценка за данный пункт – 1 балл.

K6. Запись формулы предельной звездной величины для неравнозрачкового увеличения **1**

Данный критерий оценивается только при использовании формулы в решении. Просто записанная формула без подстановок значений и выводов не оценивается.

K7. Определение минимального коэффициента увеличения **2**

K8. Финальный ответ задачи $[32; 60]$ или $[32; 84]$ **1**

10.5. Вдали от Солнца

В. Б. Игнатьев

Вам предоставлен негатив нарисованного художественного изображения карликовой планеты – Эриды. На каком расстоянии от Эриды находился бы космический аппарат, если бы он мог видеть такую же картину?

Радиус Эриды – 1150 км.

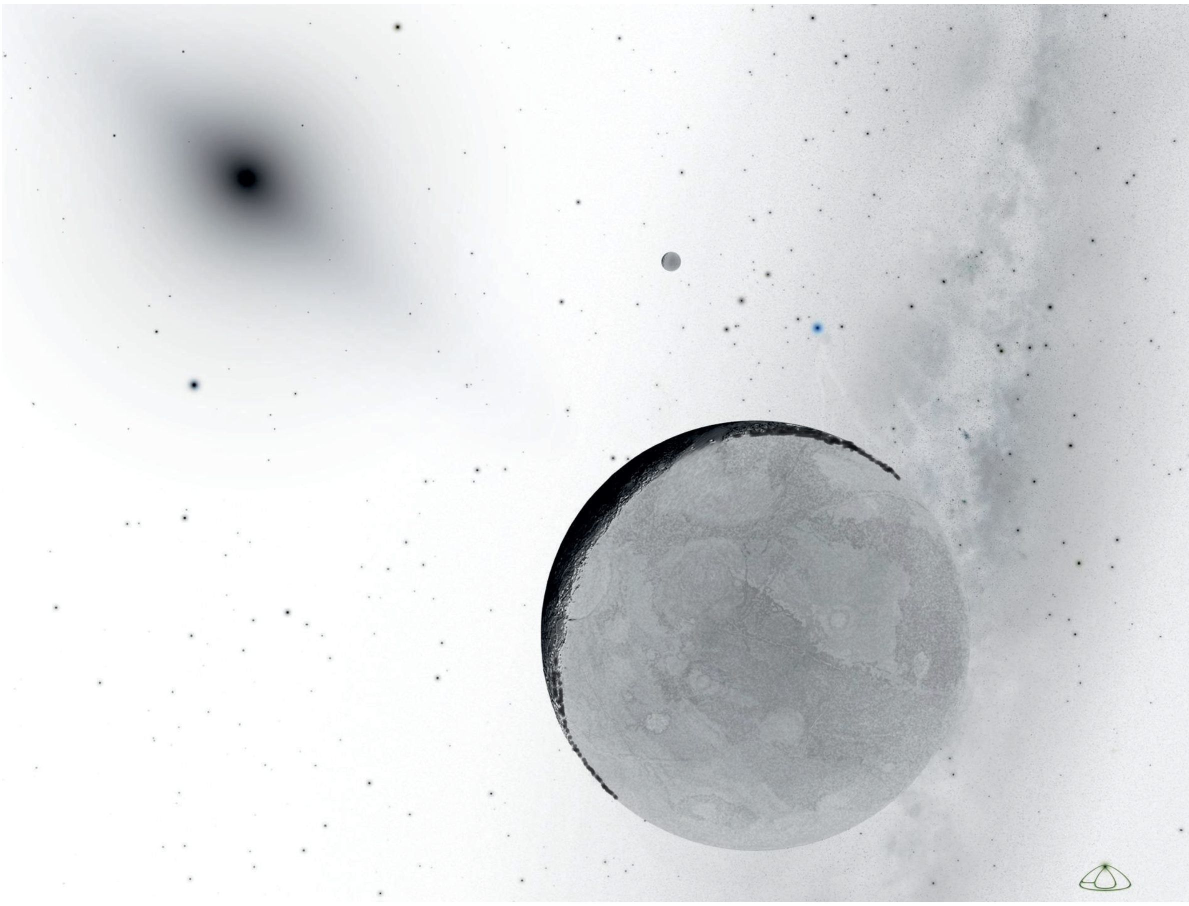


Рис. 4: Изображение к задаче 10.5

Решение. Сначала разберемся, какие данные могут быть получены из анализа кадра. На изображении есть Солнце, есть карликовая планета, у которой виден серп. Напомним, что изображение негативное, то есть наиболее темные области кадра являются наиболее яркими или освещенными в реальности.

Определим центр карликовой планеты на изображении. Это можно сделать несколькими альтернативными способами – например, можно провести две хорды окружности и построить их серединные перпендикуляры, тогда пересечение этих перпендикуляров определит положение центра окружности. Для повышения точности построений рекомендуется, чтобы таких перпендикуляров было три или больше.

Альтернативный метод – построить две параллельные хорды, тогда линия, соединяющая середины этих хорд, будет проходить через центр окружности или эллипса. Если использовать 3 семейства параллельных хорд, то можно определить центр с достаточно хорошей точностью.

Преимущество второго метода в том, что для него не нужно построение перпендикуляра с использованием циркуля.

Существует и третий метод — можно провести линию через края «рожек» серпа. Если мы видим весь серп целиком, то эта линия будет диаметром и будет проходить через центр планеты. Однако, у этого метода есть ограничения. Если наблюдатель находится слишком близко к объекту, то не весь серп может быть виден, и тогда метод не сработает. Но в данном случае точность определения центра этим методом будет вполне приемлемая. Впрочем, это связано это с тем, что мы работаем с художественным изображением.

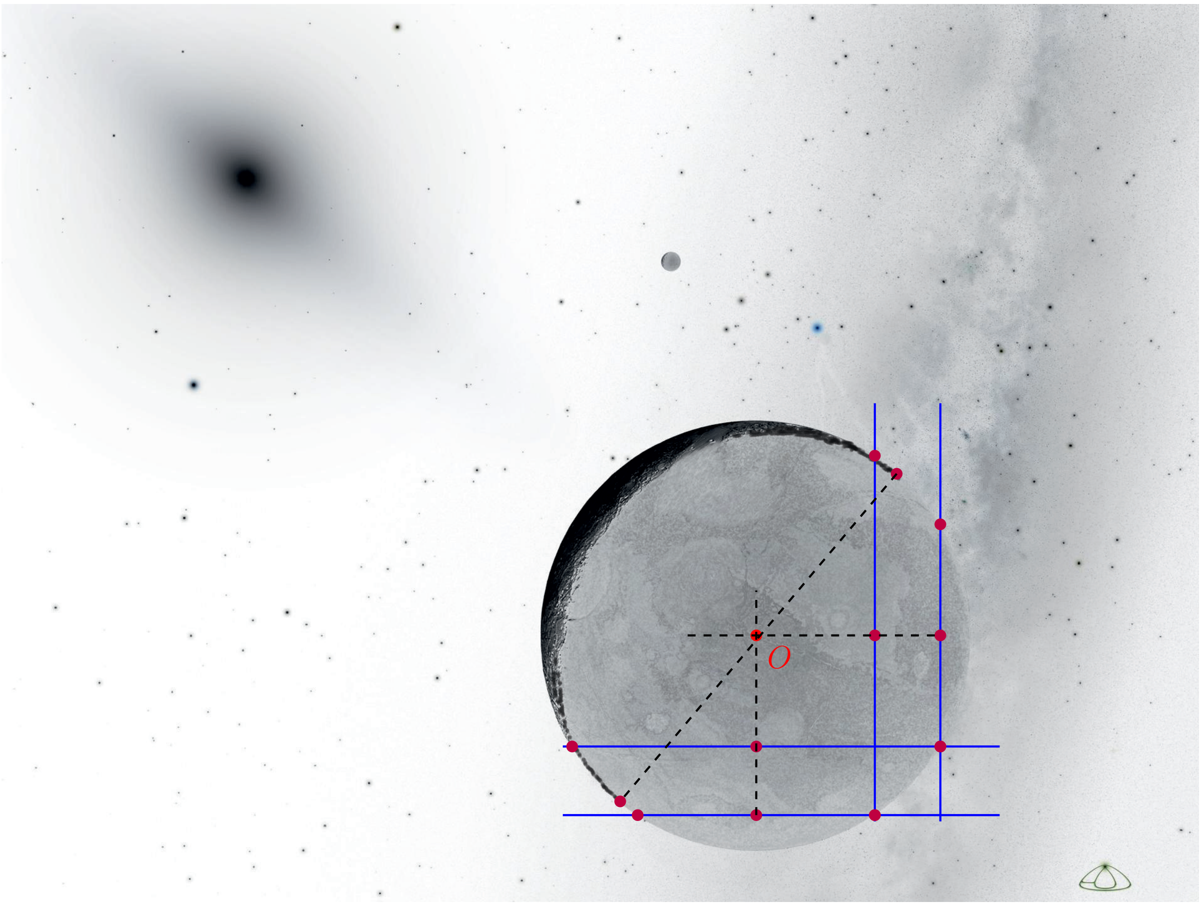


Рис. 5: Построение двух семейств параллельных хорд. Нахождение центра окружности.

Теперь проведем линию, соединяющую центр Солнца (точка S) и центр карликовой планеты (точка O). Построение показано на рис. 6.

Эта линия пересекает освещенный серп планеты. В направлении на Солнце видимая толщина серпа будет максимальной, и, измерив толщину серпа, можно получить значение фазы планеты.

Линейная фаза объекта рассчитывается как доля освещенного диаметра

$$\Phi = \frac{l}{D} = \frac{3.5\text{ мм}}{54\text{ мм}} = 0.065^{2}$$

[2]Поскольку величина видимой освещенной стороны мала, то у участников могу быть близкие, но другие численные значения

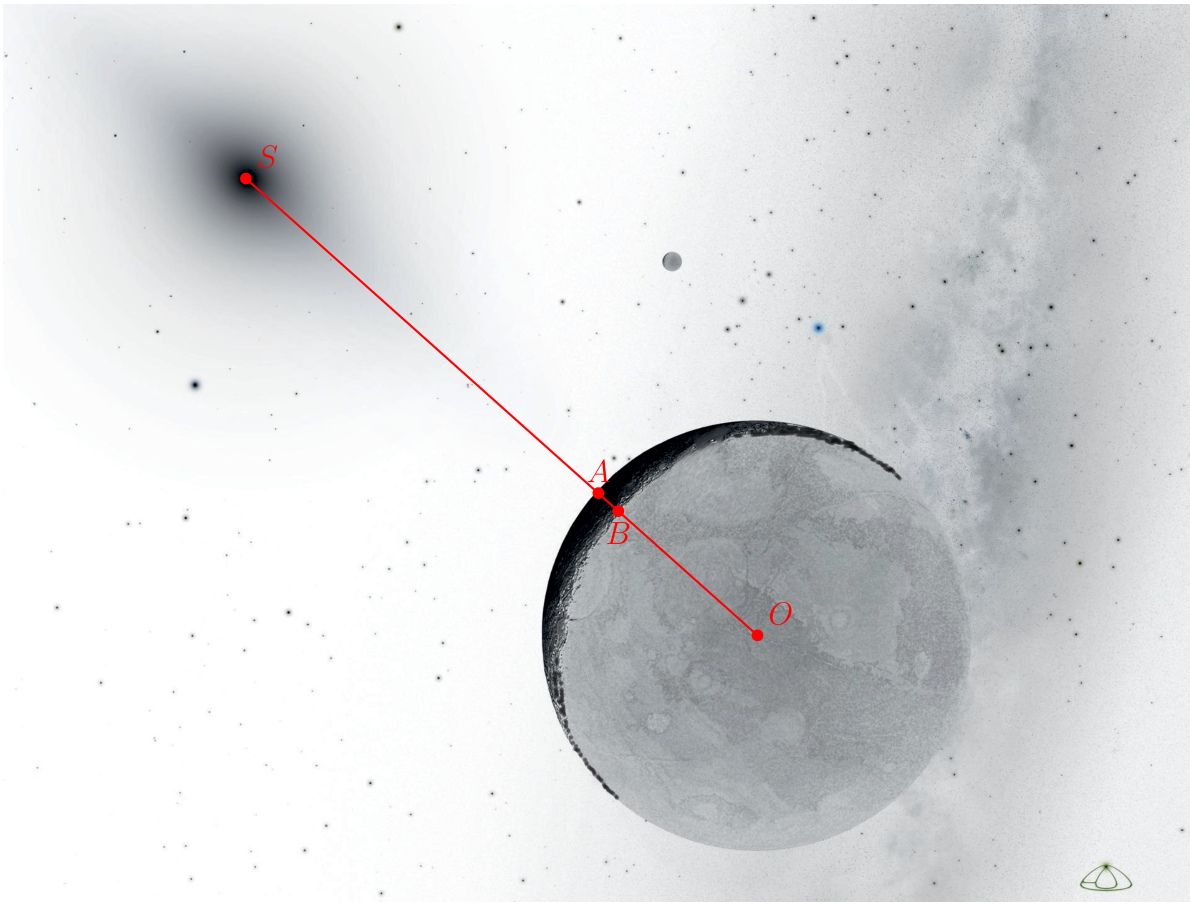


Рис. 6: Изображение к задаче

Зная фазу объекта, мы можем получить значения фазового угла φ – угла треугольника «Солнце – Объект – Наблюдатель» с вершиной в Объекте:

$$\Phi = \frac{1 + \cos\varphi}{2}$$

$$\cos\varphi = 2\Phi - 1 \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 150^\circ$$

Обратим внимание, что фазовый угол в данном случае является тупым, то есть больше, чем 90°. Поскольку Солнце находится крайне далеко от объекта и наблюдателя, в рассматриваемом треугольнике «Солнце – Объект – Наблюдатель» величина угла с вершиной в Солнце крайне мала, и при суммировании этим углом можно пренебречь. Следовательно, можно найти угловое расстояние между Солнцем и центром карликовой планеты с точки зрения наблюдателя. Обозначим этот угол l

$$l = 180^\circ - \varphi = 30^\circ$$

Теперь у нас есть ключ к определению масштаба изображения в угловой мере – мы можем сравнить расстояние OS и расстояние OA, и получить угловой размер Эриды.

Измеряем при помощи линейки указанные величины. Расстояние $OS = 88$ мм, $OA = 27$ мм (у участников могут получиться другие значения; это определяется форматом печати заданий).

Тогда угловой радиус карликовой планеты

$$\rho = \frac{27}{88} \cdot 30^\circ = 9^\circ$$

А зная линейный и угловые радиусы можно определить расстояния до объекта:

$$\sin\rho = \frac{R}{L} \qquad \rightarrow \qquad L = \frac{R}{\sin\rho} = \frac{1150}{\sin(9^\circ)} = 7300 \text{ км}$$

Ответ. $L = 7300$ км

Критерии оценивания. **20**

При оценивании данной задачи допущенная участником арифметическая ошибка в критериях 2–6 снижает оценку за соответствующий критерий до 0 баллов. Каждый пункт оценивается только в случае верного его выполнения.

К1. Определение центра окружности/карликовой планеты **4**

В случае определения центра «на глазок» без дополнительных построений оценка за этот критерий не более 1 балла

В случае определения центра как точки пересечения двух отрезков (неточный метод) оценка за критерий не может превышать 3 баллов

К2. Определение величины фазы **6**

Прямое утверждение, что фазу можно измерить по линии OS 3

Выполнение измерений 2

Верный численный ответ 0.065 ± 0.010 1

К3. Определение фазового угла **2**

К4. Определение угла между Солнцем и центром Эриды **3**

К5. Определение углового диаметра или углового радиуса Эриды **2**

К6. Определение расстояния до объекта **3**

Отдельно стоит проговорить варианты решения данной задачи через нахождение каких-либо угловых расстояний по звездной карте. Такие решения противоречат условию задачи, в котором указано, что задача на изображение карликовой планеты. Тем не менее, возможны интересные случаи, которые мы и рассмотрим.

Вариант 1. В качестве основы для определения масштаба была взята ширина Млечного Пути. Разумной оценкой ширины Млечного Пути в районе созвездий Скорпион и Стрелец является величина $25^\circ - 30^\circ$. Здесь он заметно шире, чем в обычных местах. Ширина же Млечного Пути в миллиметрах будет равна 55, что равно диаметру Эриды. Это приведет к угловому радиусу 15° и расстоянию 4400 км. Такое решение может быть оценено в 8 баллов из 20 при получении описанных выше значений.

Критерии оценивания. **8**

При оценивании данной задачи допущенная участником арифметическая ошибка в критериях 2–6 снижает оценку за соответствующий критерий до 0 баллов. Каждый пункт оценивается только в случае верного его выполнения.

К1. Выполнение измерений на изображении **1**

К2. Верное определение масштаба изображения **2**

При оценке толщины Млечного Пути в районе созвездия Скорпиона $25^\circ - 30^\circ$, в противном случае – 0 баллов.

К3. Определение углового диаметра или углового радиуса Эриды **2**

К4. Определение расстояния до объекта **3**

Если же за основу взята оценка в 20° и решение доведено до конца верно для взятых значений, то такое решение оценивается не более чем в 6 баллов.

Вариант 2. Участник записал координаты нескольких ярких звезд и нашел угловые расстояния между ними. Самый простой способ это сделать — записать координаты Антареса ($\alpha = 16^h30^m$, $\delta = -26^\circ$) и, например, Арктура (его проще найти, $\alpha = 14^h15^m$, $\delta = +19^\circ$) или Спики ($\alpha = 13^h25^m$, $\delta = -11^\circ$). Далее методами сферической тригонометрии определяются угловые расстояния между звездами: 56° или 45°. Это соответствует линейным расстояниям на изображении в 81 и 66 мм, что приводит к ответу на задачу в 3600 км. Такое решение оценивается в 14 баллов, если оно выполнено в полной мере. При этом возможен сценарий, в котором участник попытался оценить угловое расстояние между звездами. Такой оценочный метод решения оценивается так же, как и вариант 1 с Млечным Путем, при получении верного ответа.

Критерии оценивания. **14**

При оценивании данной задачи допущенная участником арифметическая ошибка в критериях 2–6 снижает оценку за соответствующий критерий до 0 баллов. Каждый пункт оценивается только в случае верного его выполнения.

К1. Верная запись координат двух звезд **2**

К2. Определение углового расстояния **4**

К3. Выполнение измерений на изображении **1**

К4. Верное определение масштаба изображения **2**

К5. Определение углового диаметра или углового радиуса Эриды **2**

К6. Определение расстояния до объекта **3**

Возможно использование зодиакальных созвездий для определения масштаба. Если участник использует среднее размер зодиакальных созвездий 30° (что в этой области неба не корректно), то оценивание такого решения стоит проводить по варианту 1. Если же участник сумел поставить на звездном небе точки осеннего равноденствия и/или зимнего солнцестояния, то такое решение оценивается по варианту 2.

Теперь рассмотрим несколько «плохих» случаев.

Вариант 3. Угловой размер Эриды сравнивается с угловым размером Солнца. Это тупиковая ветвь решения, которая не может привести к ответу на задачу. Все такие решения оцениваются в 0 баллов.

Вариант 4. В случае, если участник определил Солнце как эллиптическую галактику, удаленную от наблюдателя на какое-то расстояние, он решал свою задачу, которая не имеет никакого отношения к предложенной. Все такие решения оцениваются в 0 баллов.

Региональный этап. День 2

Условия, решения и схема оценивания. 10 класс

Содержание

10.6. Пятерка

В.Б. Игнатьев

Зенитное расстояние звезды в течение суток изменяется в 5 раз. Определите широту места наблюдения, если северное полярное расстояние звезды больше её склонения тоже в 5 раз.

Решение.

На **первом этапе** решения проинтерпретируем последнее утверждение. Северное полярное расстояние p – это угловое расстояние от северного полюса мира до светила, а склонение δ – это угловое расстояние от светила до небесного экватора. Сумма $p + \delta = 90^\circ$.

Отсюда получаем, что склонение звезды равно

$$\delta = \frac{1}{6}90^\circ = 15^\circ.$$

При этом звезда относится к северному полушарию неба. Для южной полусферы решений нет.

На **втором этапе** запишем высоты, а потом и зенитные расстояния нижней и верхней кульминаций:

$$h_\uparrow = 90^\circ - |\varphi - \delta| \qquad z_\uparrow = |\varphi - \delta|$$
$$h_\downarrow = \varphi + \delta - 90^\circ \qquad z_\downarrow = 180^\circ - \varphi - \delta$$

Последнюю формулу лучше записать в общем виде:

$$h_\downarrow = |\varphi + \delta| - 90^\circ \qquad z_\downarrow = 180^\circ - |\varphi + \delta|$$

Зенитное расстояние верхней кульминации меньше, чем зенитное расстояние нижней кульминации. При этом в кульминациях достигаются минимальное и максимальное значения зенитного расстояния.

Тогда из условия задачи

$$z_\downarrow = 5z_\uparrow$$

Подставим в это выражения формулы для зенитных расстояний:

$$5|\varphi - \delta| = 180^\circ - |\varphi + \delta|$$

Нам уже известно, что склонение звезды $\delta = 15^\circ$.

При раскрытии модулей, нужно рассмотреть три интервала:

A. $\varphi > \delta$ и $\varphi + \delta > 0^\circ$. Упростим и получим, что $\varphi > 15^\circ$.

B. $\varphi < \delta$ и $\varphi + \delta > 0^\circ$. На этом интервале $\varphi \in (-15^\circ; 15^\circ)$

C. $\varphi < \delta$ и $\varphi + \delta < 0^\circ$. Следовательно, $\varphi < -15^\circ$

Случаи, когда $\varphi = 15^\circ$, нам неинтересны, поскольку в этом случае зенитное расстояние становится равным нулю, и задача вырождается.

Рассмотрим первый случай. Расскрываем модуль со знаком «плюс», здесь $\varphi > \delta$:

$$5\varphi - 75^\circ = 180^\circ - \varphi - 15^\circ,$$

$$\varphi_1 = \frac{240}{6} = 40^\circ.$$

Для второго случая, когда раскрываем модуль с «минусом», то есть верхняя кульминация происходит к северу от зенита ($\varphi < \delta$):

$$75^\circ - 5\varphi = 180^\circ - \varphi - 15^\circ,$$

$$-4\varphi_2 = 90^\circ \qquad \varphi_2 = -22.5^\circ.$$

Этот ответ не подходит, поскольку он не принадлежит интервалу $\varphi \in (-15^\circ; 15^\circ)$ и не удовлетворяет условию $\varphi < \delta$.

Рассмотрим третий вариант, раскрыв оба модуля с «минусами»:

$$5\delta - 5\varphi = 180^\circ + \delta + \varphi,$$

$$-6\varphi = 180^\circ - 4\delta,$$

$$\varphi_3 = \frac{120}{-6} = -20^\circ.$$

Этот ответ подходит, так как $\varphi < -15^\circ$

Ответ. $\varphi_1 = 40^\circ$, $\varphi_3 = -20^\circ$

Также опишем **альтернативный вариант решения.** Первая часть решения, где определяется склонение звезды $\delta = 15^\circ$, аналогична описанному выше варианту. Далее рассмотрим случай наблюдателя на северном полюсе. Для него звезда всегда находится на постоянной высоте и на постоянном зенитном расстоянии. Это зенитное расстояние равно северному полярному расстоянию p.

Теперь представим, что наблюдатель постепенно перемещается с северного полюса на юг, уменьшая свою широту. Тогда при текущей широте φ зенитное расстояние полюса мира станет равным $\alpha = 90^\circ - \varphi$. При этом зенитное расстояние для нижней кульминации будет увеличиваться:

$$z_\downarrow = p + \alpha,$$

а зенитное расстояние для верхней кульминации будет уменьшаться:

$$z_\uparrow = p - \alpha.$$

Рассмотрим функцию k, равную отношению зенитных расстояний нижней и верхней кульминации.

$$k = \frac{z_\downarrow}{z_\uparrow} = \frac{p + \alpha}{p - \alpha}$$

При $\alpha = 0$ отношение равно единице, при дальнейшем увеличении α функция k растет до момента, когда верхняя кульминация окажется в зените ($\alpha = p$). В этой точке функция k не определена, так как знаменатель равен 0. Функция растет монотонно, и решение уравнения $k = 5$ даст только один ответ. Определим его:

$$k = \frac{p+\alpha}{p-\alpha} = 5 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 50^\circ \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 40^\circ.$$

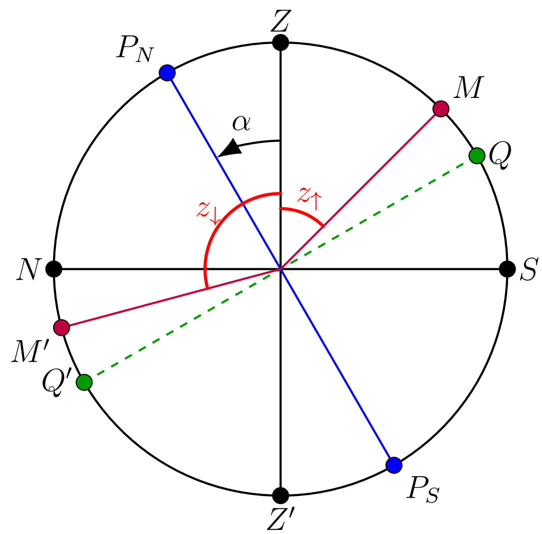


Рис. 1: Графическое решение для первого интервала. QQ' – небесный экватор, M – верхняя кульминация, M' – нижняя кульминация.

Рассмотрим второй интервал, в котором α увеличивается от 75° до 105°. Первая граница соответствует верхней кульминации в зените, а вторая граница соответствует нижней кульминации в надире. В этом интервале с увеличением α оба зенитных расстояния увеличиваются. Функция

$$k = \frac{\alpha+p}{\alpha-p}$$

будет монотонно падать от бесконечности на первой границе до $k = 6$. Решения нашей задачи на этом интервале нет.

Рассмотрим третий интервал, где $\alpha \in (105^\circ; 180^\circ)$.

В этом случае

$$z_\downarrow = (180^\circ - \alpha) + 90^\circ + (90^\circ - p) = 360^\circ - p - \alpha.$$

Тогда исследуемое отношение равно

$$k = \frac{z_\downarrow}{z_\uparrow} = \frac{360^\circ - p - \alpha}{\alpha - p} = 5.$$

k – монотонно падающая функция, изменяющаяся от 6 до 1. Решим уравнение:

$$360^\circ - p - \alpha = 5\alpha - 5p$$

$$360^\circ + 4p = 6\alpha \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 110^\circ \qquad \rightarrow \qquad \varphi = -20^\circ.$$

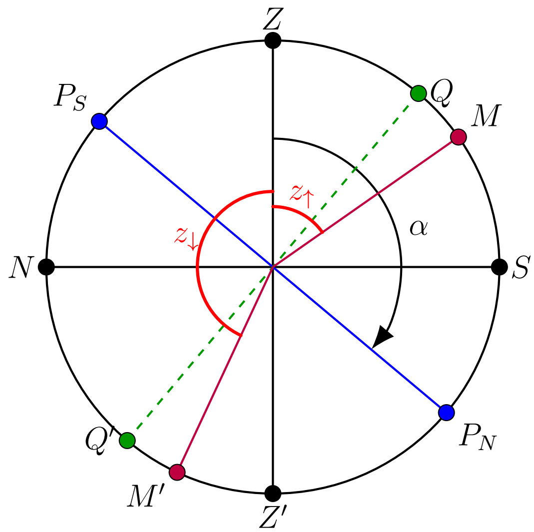


Рис. 2: Графическое решение для третьего интервала. QQ' – небесный экватор, M – верхняя кульминация, M' – нижняя кульминация.

Критерии оценивания. **16**

K1. Определение склонения звезды $\delta = +15°$ **4**

Если в ответе есть несколько вариантов склонения, или получены другие значения, за данный пункт ставится 0 баллов.

K2. Сформулирована система уравнений для решения задачи **4**

Если система уравнений записана верно только для одного из случаев (не содержит модули), оценка за данный критерий – 2 балла.

K3. Рассмотрены три случая, получены два ответа **5**

Найдено решение $\varphi_1 = 40°$ 2

Найдено решение $\varphi_3 = -20°$ 2

Получены и отброшены невозможные решения, например, $\varphi_2 = -22.5°$ 1

Решение может быть графическим (построением небесной сферы) или алгебраическим

K4. Сформулирован верный ответ **3**

Вариант решения с ответом $\varphi = \pm 40°$ оценивается максимум как 4+2+2+0=8 баллов

10.7. Родная Галактика

В. Б. Игнатьев

Далекие инопланетные астрономы наблюдают нашу галактику Млечный путь ($M = -21^m$, $R = 16$ кпк) в виде эллипса, у которого малая полуось в два раза меньше, чем большая полуось. Чему будет равна поверхностная звездная величина $m_{\square''}$ (звездная величина на квадратную секунду) наблюдаемой ими галактики? Поглощением света пренебречь.

Решение.

Запишем взаимосвязь между абсолютной и видимой звездной величиной:

$$M - m = 5 - 5\lg r.$$

Также запишем связь между поверхностной звездной величиной и интегральной (полной) видимой звездной величиной.

$$m_{\square''} = m + 2.5\lg S$$

Здесь S – это видимая угловая площадь Галактики $S = \pi ab$, где a и b – угловые размеры большой и малой полуосей Галактики, выраженные в угловых секундах. По условию b в два раза меньше, чем a, поэтому

$$S = \frac{\pi}{2}a^2.$$

Соберем все в одно выражение:

$$m_{\square''} = M - 5 + 5\lg r + 2.5\lg(\frac{\pi}{2}a''^2)$$

Последнее слагаемое можно упростить, воспользовавшись свойствами логарифмов. Также применим формулу углового размера

$$a'' = \frac{206265 R_G}{r},$$

где R_G и r будем выражать в парсеках. В итоге получаем:

$$m_{\square''} = M - 5 + 5\lg r + 2.5\lg(\frac{\pi}{2}) + 5\lg a''$$

$$m_{\square''} = M - 5 + 5\lg r + 2.5\lg(\frac{\pi}{2}) + 5\lg(\frac{206265 R_G}{r}).$$

Последнее слагаемое снова представим в виде разности логарифмов:

$$m_{\square''} = M - 5 + 5\lg r + 2.5\lg(\frac{\pi}{2}) + 5\lg(206265 R_G) - 5\lg r =$$

$$= M - 5 + 2.5\lg(\frac{\pi}{2}) + 5\lg(206265 R_G) = M - 5 + 5\lg(206265 R_G\sqrt{\frac{\pi}{2}})$$

Как и ожидалось, поверхностная звездная величина не зависит от расстояния между наблюдателем и объектом.

Подставим значения для получения численного ответа:

$$m_{\square''} = -21^m - 5 + 5\lg(206265 \cdot 16000 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}) = 22.1^m.$$

Критерии оценивания. **16**

К1. Запись связи между видимой и абсолютной звездными величинами **2**

К2. Запись связи между видимой интегральной и поверхностной звездными величинами . **3**

Формула может быть как выведена из закона Погсона, так и записана напрямую без вывода, оба варианта при верной записи оцениваются в полной мере.

К3. Выражение для угловой площади эллипса через большую полуось **2**

В случае, если Галактика рассматривается в виде прямоугольника со сторонами a и b, за критерии к3 и к6 ставится по 0 баллов.

К4. Выражение углового размера через линейный размер и расстояние до объекта **2**

Если в формуле или численных расчетах перепутаны радиус и диаметр, за критерии к4 и к6 ставится 0 баллов. Также баллы за этот пункт не ставятся, если формула записана, но не использована в решении.

К5. Исключение расстояния из формулы поверхностной яркости **4**

Доказана независимость поверхностной звездной величины от расстояния. В случае, если в финальной формуле есть расстояние, критерии к5 и к6 оцениваются в 0 баллов.

К6. Верный численный ответ **3**

Данный критерий выставляется только при наличии верного численного ответа с точностью $\pm 0.5^m$

10.8. Игра в прятки

В. Б. Игнатьев

Два раза за 12 лет в системе галилеевских спутников Юпитера появляется возможность затмения одного спутника другим. Определите максимально возможное изменение блеска Каллисто из-за этого эффекта. Воспользуйтесь приближением геометрической оптики.

Влиянием атмосфер спутников можно пренебречь. Считайте, что отражательная способность не зависит от угла падения. Из-за большого удаления Юпитера от Солнца фазы планеты и спутников можно считать равными 1. Орбиты Земли, Юпитера и всех спутников считайте круговыми. Экваториальный радиус Юпитера равен 71.5 тыс. км.

Спутник	Полуось орбиты	Диаметр спутника
Ио	421 800 км	3 640 км
Европа	671 100 км	3 120 км
Ганимед	1 070 400 км	5 270 км
Каллисто	1 882 700 км	4 820 км

Решение.

Данное явление возможно два раза за звездный (сидерический) период Юпитера, когда направление «Солнце – Юпитер» совпадает с плоскостью экватора и плоскостью орбит галилеевских спутников. Возникает ситуация, в чем-то аналогичная земному равноденствию.

Отсюда сразу можно получить величину радиуса орбиты Юпитера, которая непосредственно не дана в условиях.

$$a_♃ = 12^{2/3} = 5.2 \text{ а.е.}$$

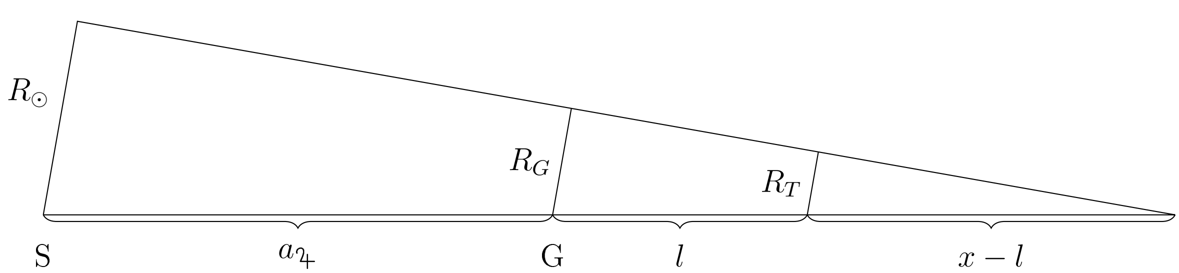
Калисто – самый далекий от Юпитера из всех галилеевских спутников. Для максимизации эффекта нам нужно найти условие, при котором размер тени на поверхности Каллисто от другого спутника максимален. Для этого нам нужен

A. самый большой по размеру спутник,

B. спутник, максимально близко расположенный к Каллисто.

Тут отлично подойдет Ганимед, так как он обладает наибольшим размером, и при этом он может быть ближе всех к Каллисто. Кроме этого, нам нужно учесть, что расположение объектов на одной линии в порядке «Солнце – Земля – Юпитер – Ганимед – Каллисто» в рамках задачи невозможно, так как в этом случае за Юпитером мы не увидим его спутники, а в условии задачи не сказано, что размерами Юпитера можно пренебречь.

1 этап. Определим радиус тени Ганимеда на удалении l:



.

Расстояние между Солнцем и Ганимедом с большой точностью равно радиусу орбиты Юпитера. Обозначим за величину x длину конуса тени от спутника, а за l – расстояние между спутниками.

$$\frac{R_\odot}{a_{♃} + x} = \frac{R_G}{x}$$

Отсюда

$$x = a_{♃} \frac{R_G}{R_\odot - R_G}$$

Также мы можем записать выражение для радиуса тени R_T:

$$\frac{R_T}{x - l} = \frac{R_G}{x}$$

$$R_T = R_G \frac{x - l}{x}$$

2 этап. Определение расстояния между спутниками.

Важно отметить, что нам нужно, чтобы Каллисто оказался в тени Ганимеда, но при этом не попал в тень Юпитера, и при этом нас интересует ситуация минимального расстояния между спутниками. Поэтому линия «Солнце – Ганимед – Каллисто» должна касаться границы Юпитера. Действительно, в этом случае расстояние между двумя спутниками будет минимально, а следовательно, размер тени будет максимальным.

Обозначим точкой O центр Юпитера, точкой K – Каллисто, точкой G – Ганимед. Линия KO' – касательная к поверхности Юпитера с Каллисто, при этом Ганимед также находится на этой касательной.

Заметим, что треугольники $OO'K$ и $OO'G$ – прямоугольные из-за соответствующего свойства касательной.

$$O'K = \sqrt{a_k^2 - R_{♃}^2}$$

$$O'G = \sqrt{a_G^2 - R_{♃}^2}$$

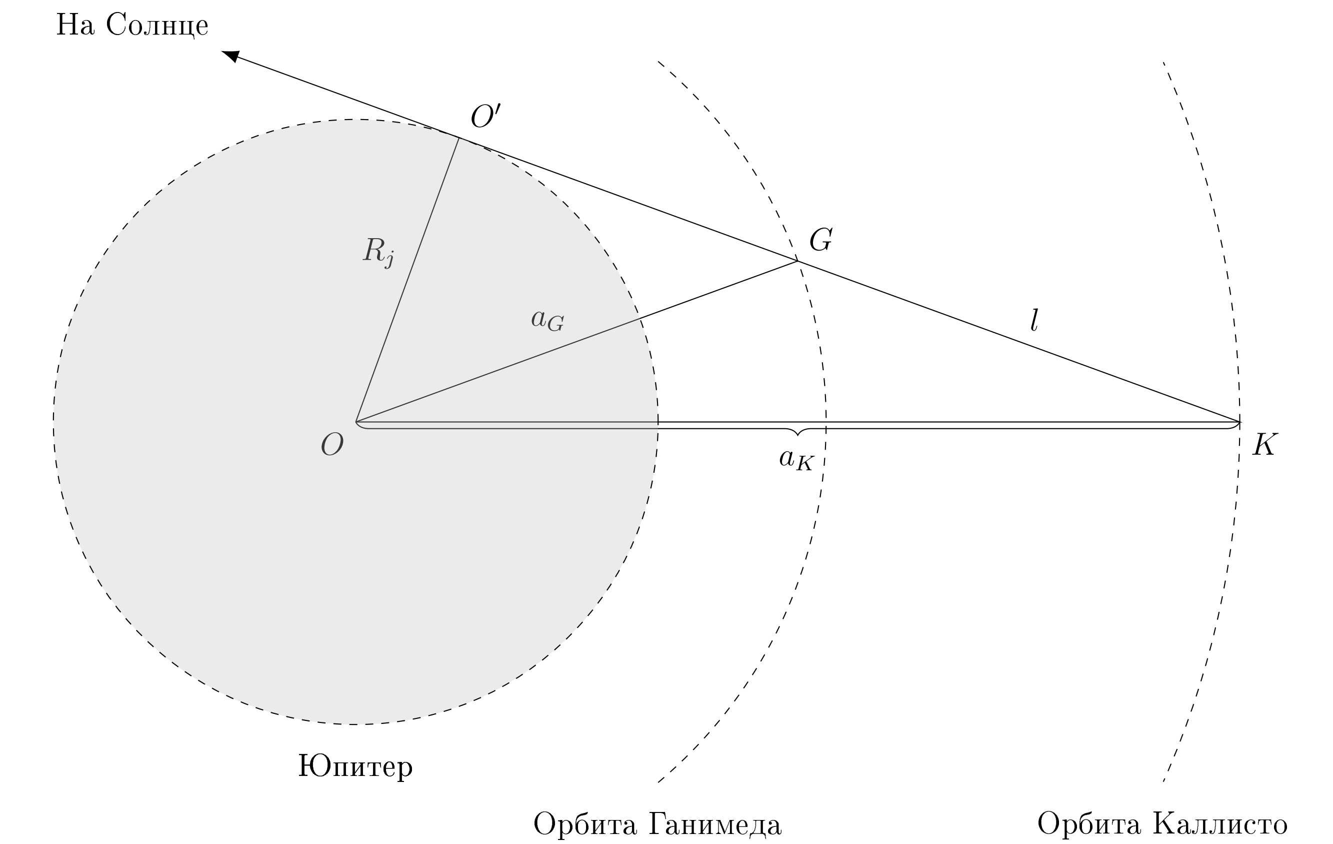
Разность между этими двумя расстояниями равна l:

$$l = \sqrt{a_k^2 - R_{♃}^2} - \sqrt{a_G^2 - R_{♃}^2}$$

Этап 3. Определим численные значения расстояния и радиуса тени.

$$l = \sqrt{1882700^2 - 71500^2} - \sqrt{1070400^2 - 71500^2} = 831\,300 \text{ км}$$

Полученная величина всего на тысячу километров больше, чем разница полуосей орбит Каллисто и Ганимеда.



Длина конуса тени

$$x = a_{♃}\frac{R_G}{R_\odot - R_G} = 5.2 \cdot 1.5 \cdot 10^8 \text{ км}\frac{2635 \text{ км}}{700000 - 2635} = 2\,947\,200 \text{ км}$$

$$R_T = 2635 \text{ км}\frac{2\,947\,200 - 831\,300}{2\,947\,200} = 1\,910 \text{ км}$$ [1]

Этап 4. Теперь рассчитаем фотометрию ситуации.

$$\Delta m = m - m_0 = -2.5 \lg \frac{E_{\text{затм}}}{E_0}$$

Здесь E_0 – освещенность от Каллисто без затмения, $E_{\text{затм}}$ – освещенность от Каллисто, когда часть его диска закрыта Ганимедом. m_0 – видимая звездная величина Каллисто вне затмения, m – видимая звездная величина в момент затмения.

Во время затмения не вся поверхность Каллисто отражает свет. Поэтому освещенность от спутника будет меньше на величину

$$E_{\text{затм}} = E_0\frac{S - S_T}{S}$$

[1] стоит отметить, что и в модели «прозрачного Юпитера» ответ численно будет такой же, но сама модель астрономически не корректна.

Выразим площадь тени через радиусы:

$$\Delta m = -2.5\lg(1 - \frac{R_{\text{Т}}^2}{R_c^2})$$

Теперь осталось только подставить значения:

$$\Delta m = -2.5\lg(1 - \frac{1908^2}{2410^2}) = -2.5\lg(0.373) = 1.07^m$$

Ответ: $\Delta m = 1.07^m$

Критерии оценивания. **16**

К1. Определение радиуса орбиты Юпитера **1**

К2. Четкое обоснование выбора Ганимеда как тела, создающего максимальную тень **2**

К3. Определение расстояния от Ганимеда до Каллисто **4**

Решение с моделью, в которой Ганимед, Каллисто, Юпитер и Солнце находятся на одной линии в указанном порядке (спутники не видны с Земли), оценивается по этому критерию в 1 балл. В остальных критериях оценка за эту модель не снижается.

К4. Определение размера тени Ганимеда на Каллисто **4**

К5. Определение падения блеска Каллисто **5**

Получение формулы для Δm через отношение радиусов 2

Получение верного численного ответа для величины падения блеска 3

Если участник рассматривает не Ганимед, а другой из спутников, то максимальная оценка при верных расчётах может составлять $1 + 0 + 2 + 2 + 1 = 8$ баллов.

10.9. Половина эклиптики

В. Б. Игнатьев

Астрономы проводили наблюдения за звездой, находящейся на эклиптике. В моменты кульминации звезды была измерена её лучевая скорость. Результаты наблюдений с разницей в полгода приведены в таблице.

Дата	Лучевая скорость
21.03	−35 км/с
23.09	5 км/с

Во время обоих сеансов наблюдений экваториальные координаты звезды были одинаковыми. Считая орбиту Земли круговой, определите:

A. Эклиптические координаты звезды

B. Полную гелиоцентрическую скорость звезды

Решение.

Обратим внимание, что лучевая скорость звезды изменяется. Причина этого изменения – это движение Земли вокруг Солнца с изменяющейся по направлению скоростью. Можно записать выражения:

$$\begin{cases} v_{r,1} = V_r - V_{\oplus,1} \\ v_{r,2} = V_r - V_{\oplus,2} \end{cases}$$

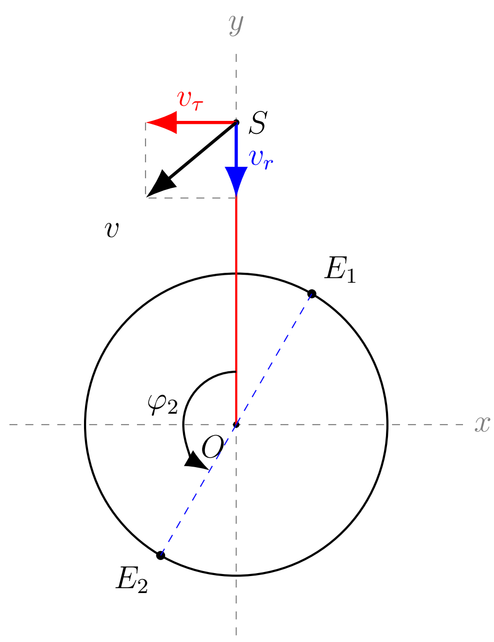


Рис. 3: Схема задачи. Положение Земли относительно Солнца и звезды.

Так как разница между наблюдениями составляет строго половину года, а орбиту Земли мы считаем круговой, вклад скорости Земли в лучевую скорость звезды в этих точках одинаков

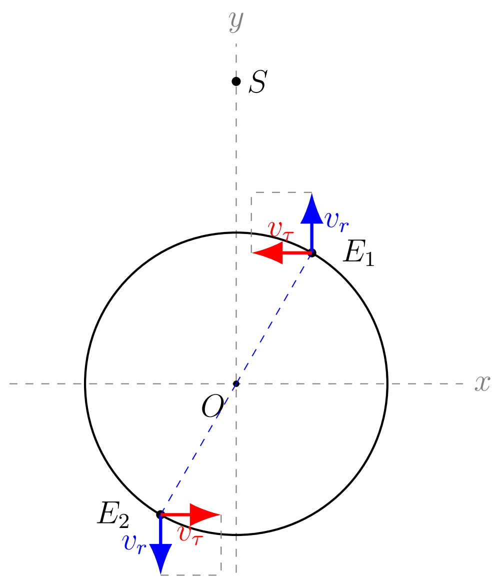


Рис. 4: Схема задачи. Компоненты скорости Земли относительно направления на звезду (наверх). Синим обозначена лучевая компонента v_r, красным – трансверсальная компонента v_τ

по модулю, но противоположен по знаку. Следовательно, сложив оба уравнения, мы получим удвоенное значение гелиоцентрической лучевой скорости звезды:

$$V_r = \frac{1}{2}(v_{r,1} + v_{r,2}) = -15 \text{ км/с}$$

А вычитая из первого уравнение второе, получаем проекцию скорости Земли на направление «Земля – звезда»:

$$V_{\oplus,1} = \frac{1}{2}(v_{r,1} - v_{r,2}) = -20 \text{ км/с}$$

Нарисуем картинку в плоскости эклиптики, обозначим на ней орбиту Земли и направление на звезду. Обозначим положения Земли в моменты первого и второго наблюдения. Введем угол φ, который будем отсчитывать от направления на звезду против часовой стрелки. Вычислим этот угол:

$$V_{\oplus,1} = V_\oplus \sin\varphi = -20 \text{ км/с} \qquad \rightarrow \qquad \sin\varphi = -\frac{20}{29.7}$$

$$\varphi = -42.3^\circ.$$

Теперь мы можем определить эклиптические координаты звезды. После момента второго наблюдения, чтобы координаты Солнца совпали с координатами звезды, Земле нужно сместиться на угол φ.

Получаем, что эклиптическая широта звезды равна $b = 0^\circ$, так как звезда находится на эклиптике. А эклиптическую долготу можно определить из рисунка:

$$l_1 = 180^\circ + 42.3^\circ = 222.3^\circ$$

Но возможен, случай, в котором Земля может находится в точках E_3 и E_4. В этом случае,

$$l_2 = 360° - 42.3° = 317.7°$$

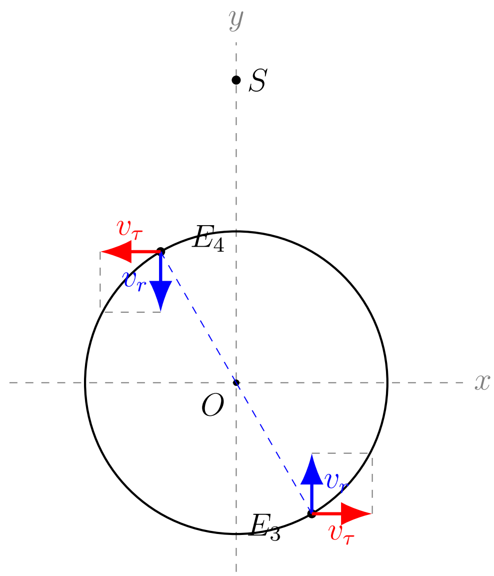


Рис. 5: Второй случай расположения Земли на орбите. E_3 – Земля в момент весеннего равноденствия.

Таким образом, ответ на первый вопрос задачи – $b = 0°$, $l = 222.3°$ или $317.7°$.

Перейдем ко **второму вопросу** задачи. Между наблюдениями прошло полгода, звезда переместилась в пространстве на величину $\mu/2$, которая, впрочем, нам неизвестна. Но при этом из-за движения Земли вокруг Солнца возникло параллактическое смещение звезды на величину $2\pi \sin\varphi$ (π – параллакс звезды). Множитель 2 возникает, поскольку параллактическое смещение в 2 раза больше, чем величина параллакса, а множитель $\sin\varphi$ появляется из-за уменьшения базы для расчета параллакса.

Так как суммарное изменение координат звезды по условию равно нулю, получим:

$$\frac{\mu}{2} = 2\pi \sin\varphi$$

Выразим отсюда μ:

$$\mu = 4\pi \sin\varphi$$

Теперь определим трансверсальную компоненту скорости звезды:

$$v_\tau = 4.74\frac{\mu}{\pi} = 4.74 \cdot 4 \sin\varphi = 12.8 \text{ км/с}$$

Тогда полная скорость звезды будет равна

$$V = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} = \sqrt{15^2 + 12.8^2} = 19.7 \text{ км/с}$$

Ответ: $b = 0°$, $l_1 = 222.3°$ или $l_2 = 317.7°$, $v = 19.7$ км/с.

Рассмотрим **вариант решения**, в котором участник учитывал все возможные эффекты – аберрацию, прецессию, собственное движение и параллакс.

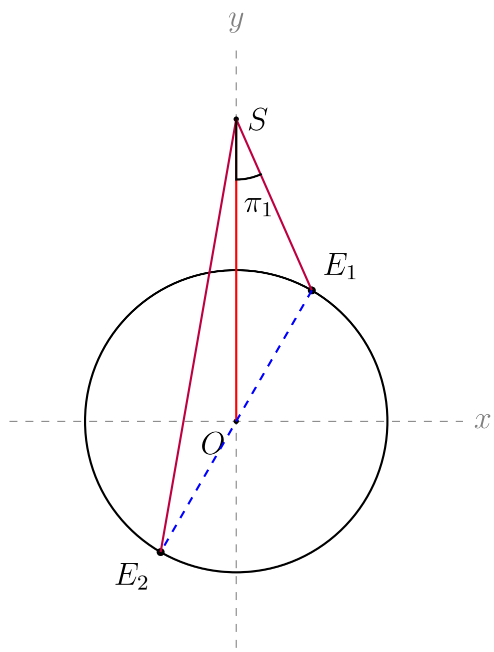


Рис. 6: Параллактическое смещение. Поскольку расстояние до звезды много больше радиуса орбиты Земли, параллактические углы равны, так как они опираются на одну и ту же базу $a_{\oplus} \sin\varphi$

Тогда за полгода изменение координат за счет прецессии будет равно $\xi/2$, где $\xi = 50.2'' = 360°/25800$ лет – постоянная прецессии на эклиптике, где находится звезда. Эклиптическая долгота звезды увеличится на эту величину, а широта меняться не будет.

Изменение эклиптической долготы за счет аберрации будет равно $2\gamma\cos\varphi$, а широта также останется без изменений.

Рассмотрим вариант с точками на орбите E_3 и E_4.

Изменение за счет параллактического смещения будет также только по долготе $2\pi\sin\varphi$. В случае данной задачи все прецессия и аберрация увеличивают долготу, а параллактическое смещение уменьшает. И все эти изменения компенсируются собственным движением.

$$\frac{\xi}{2} + 2\gamma\cos\varphi - 2\pi\sin\varphi = \frac{\mu}{2}$$
$$25.1'' + 30.2'' - 2\pi\sin\varphi = \frac{\mu}{2}$$

Получить сразу отношение величины μ/π из такой записи и подставить его в формулу для трансверсальной скорости не видится возможным. Но мы можем провести оценку. Возможные значения параллакса $\pi \in [0''; 1'']$. Тогда можно получить ограничения на величину $\mu \in [110.6; 113.5]''$/год. Величина получилась очень большой.

Отсюда можно получить оценку снизу на трансверсальную скорость.

$$V_{\tau,\min} = 4.74\frac{\mu}{\pi} = 524 \text{ км/с}$$

В этом случае лучевая скорость много меньше трансверсальной, поэтому полная скорость будет также больше или равна 524 км/с. Данное значение звучит малореалистично.

Рассмотрим вариант с точками на орбите E_1 и E_2.

$$\frac{\xi}{2} - 2\gamma\cos\varphi - 2\pi\sin\varphi = \frac{\mu}{2}$$
$$25.1'' - 30.2'' - 2\pi\sin\varphi = \frac{\mu}{2}$$

Ограничения на величину $\mu \in [10.5; 13.6]''$/год. Величина получилась очень большой.

Отсюда можно получить оценку снизу на трансверсальную скорость.

$$V_{\tau,\min} = 4.74\frac{\mu}{\pi} = 64.4 \text{ км/с}$$

При оценке полной скорости в этом варианте нужно учитывать вклад лучевой скорости,

$$V = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} = \sqrt{15^2 + 64.4^2} \approx 66 \text{ км/с}$$

Ответ: $b = 0°$, $l = 222.3°$, $v > 66$ км/с.

Критерии оценивания. **16**

Основной вариант решения

При оценивании данной задачи арифметическая ошибка в каком-либо критерии или пункте снижает оценку за этот критерий или пункт до 0 баллов. Каждый пункт оценивается только в случае верного его выполнения.

К1. Определение эклиптической широты (0°) **2**

К2. Определение эклиптической долготы **6**

Определение проекции скорости Земли на луч зрения 2

Определение угла φ 2

Определение значения эклиптической долготы (1 балл за каждый вариант) . . 2×1

Ошибка в долготе на 180° оценивается как $2 + 2 + 0$

К3. Определение лучевой гелиоцентрической скорости **2**

К4. Определение трансверсальной гелиоцентрической скорости **4**

Равенство параллактического смещения и собственного движения за год 2

Определение величины трансверсальной гелиоцентрической скорости 2

К5. Определение величины полной гелиоцентрической скорости **2**

Критерии оценивания. **16**

<u>**Второй вариант решения**</u>. Применяется только в том случае, когда участник явно прописал, что рассматривает эффекты прецессии и аберрации.

При оценивании данной задачи арифметическая ошибка в каком-либо критерии или пункте снижает оценку за этот критерий или пункт до 0 баллов. Каждый пункт оценивается только в случае верного его выполнения.

К1. Определение эклиптической широты ($0°$) **2**

К2. Определение эклиптической долготы **6**

Определение проекции скорости Земли на луч зрения 2

Определение угла φ 2

Определение значения эклиптической долготы 2

Ошибка в долготе на $180°$ оценивается как $2+2+0$

К3. Определение лучевой гелиоцентрической скорости **2**

К4. Оценка величины полной гелиоцентрической скорости **6**

Верная запись для всех эффектов (ξ, γ и π), которые меняют координаты .... 3×1

Выражение связи всех эффектов 1

Определение значения минимальной полной скорости 2

10.10. Капелла

В. Б. Игнатьев

Капелла (Альфа Возничего) – одна из самых ярких звезд ночного неба. При этом она расположена достаточно близко к нам, ее параллакс равен $0.076''$. С появлением возможности получать спектры звезд и измерять их скорости стало известно, что Капелла – двойная звезда с периодом обращения компонент друг относительно друга, равным 104 дня. При этом эксцентриситет орбит равен нулю, а наклонение, угол между картинной плоскостью и плоскостью орбиты, составляет $43°$.

Вам дан график зависимости лучевых скоростей компонент системы в километрах в секунду от зависимости от фазы, доли периода. Определите, какое максимальное угловое расстояние может быть между этими звездами и его погрешность. Можно ли их различить в телескоп с диаметром 2.5 м при качестве атмосферы в $0.7''$.

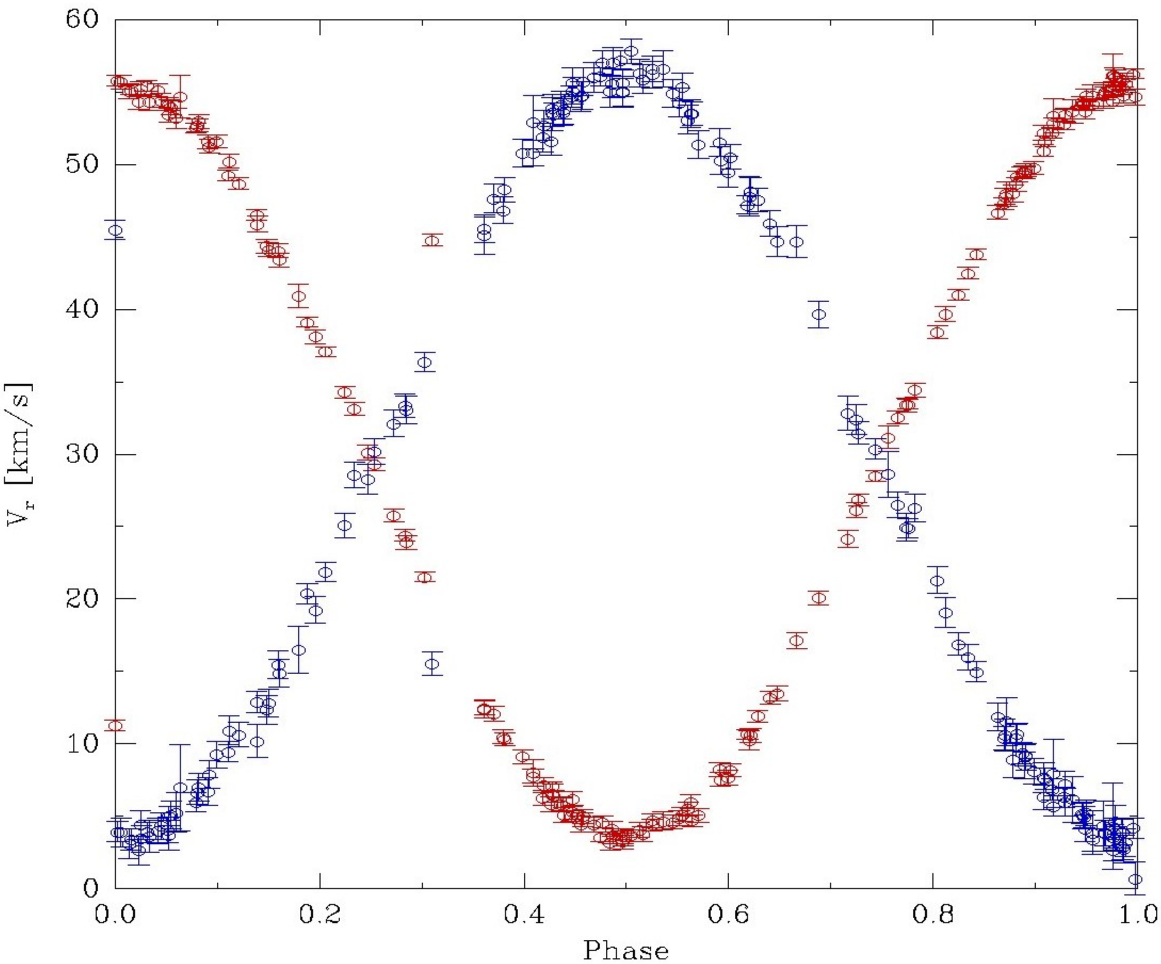


Рис. 7: Изображение к задаче 10.10.

Решение. Разобьем задачу на этапы. На первом этапе проанализируем представленный график. Обратим внимание, что графики лучевой скорости компонент пересекаются при значении величины на оси абсцисс 30 км/с. В этот момент лучевые скорости компонент одинаковы, а значит, с такой скоростью от наблюдателя удаляется центр масс системы. Вспомним, что скорость центра масс системы, в отличие от скоростей компонент, не будет меняться со временем.

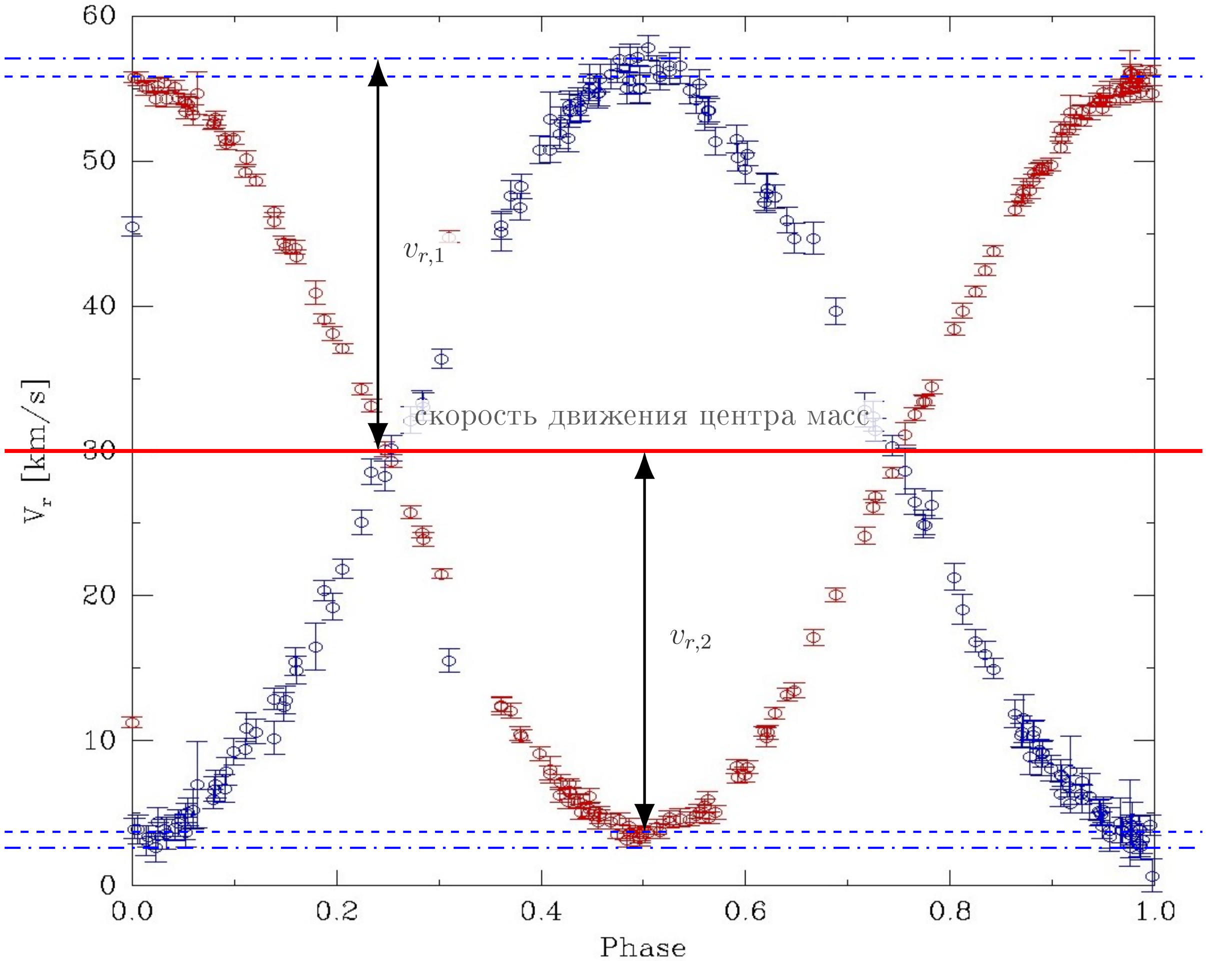


Рис. 8: Снятие данных с графика

Зная скорость центра масс, можно получить амплитуды лучевых скоростей каждой из компонент. Припишем «синей» компоненте индекс 1, а «красной» – индекс 2. Для снятия данных с графика проведем горизонтальные касательные к каждой из кривых лучевой скорости. Расстояние по рисунку от линии скорости центра масс до максимума «синей» компоненты, получается равным 47 ± 1 мм, а до максимума «красной» компоненты – 46 ± 1 мм. Конкретные цифры расстояний (в миллиметрах), получаемые участниками, могут отличаться от приведённых здесь из-за особенностей печати заданий в различных регионах.

Также определим масштаб графика μ по оси Y для этого измерим, например, расстояние между значениями 0 км/с и 60 км/с. Получим значение 107 ± 1 мм.

Теперь можем получить величины максимальных лучевых скоростей (которые уже не зависят от особенностей печати заданий и при верных измерениях у участников должны совпадать с авторскими значениями):

$$v_{r,1} = \frac{47}{107} \cdot 60 \text{ км/с} = 26.4 \text{ км/с} \qquad v_{r,2} = \frac{46}{107} \cdot 60 \text{ км/с} = 25.8 \text{ км/с}$$

Выполним оценку абсолютной $\Delta\mu$ и относительной ε_μ погрешностей определения величины μ – масштаба графика лучевой скорости. Цена деления стандартной линейки $\ell_0 = 1$ мм, тогда абсолютная $\Delta\mu_{\text{м}}$ и относительная ε_v погрешности масштаба μ будут:

Абсолютная ошибка $\Delta\mu$ величины μ

$$\Delta\mu = \mu\frac{\ell_0}{\ell},$$

Относительная ошибка ε_μ величины μ

$$\varepsilon = \frac{\Delta\mu}{\mu}\cdot 100\% = \frac{\ell_0}{\ell}\cdot 100\%.$$

При записи последнего результата мы учли, что $(\ell_0/\ell_{ij}) \ll 1$. Тогда относительная ε_μ и абсолютная $\Delta\mu$ погрешности можно записать так:

$$\varepsilon_\mu = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{107} = 0.0093 \approx 0.93\%$$

$$\Delta\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{100\%}\cdot\mu = \frac{\frac{1}{107}}{100\%}\cdot 60 = 0.56\frac{\text{км}}{\text{с мм}}.$$

Представим **общий алгоритм оценки погрешностей** измеряемой угловой величины на примере абстрактной величины X. Погрешность складывается из погрешности измерение самой величины линейкой ℓ_0 и погрешности масштаба, при помощи которого переводим измеряемые линейкой величины в угловые величины:

$$X \pm \Delta X = (L \pm \ell_0)\cdot(\mu \pm \Delta\mu) \approx (L\cdot\mu)\left(1 + \frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = X\left(1 + \frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right)$$

Абсолютная погрешность величины X

$$\Delta X = X\left(\frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right),$$

Относительная погрешность величины X

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X}\cdot 100\% = \frac{\ell_0}{L}\cdot 100\% + \frac{\Delta\mu}{\mu}\cdot 100\% = \varepsilon_L + \varepsilon_\mu$$

$$\Delta X = X\cdot\frac{\varepsilon_X}{100\%}$$

$$\Delta v_{r,1} = v_{r,1}\left(\frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = 26.4\left(\frac{1}{47} + \frac{0.56}{47}\right)\ \text{км/с} = 0.9\ \text{км/с}$$

$$\Delta v_{r,2} = 25.8\left(\frac{1}{46} + \frac{0.56}{46}\right)\ \text{км/с} = 0.9\ \text{км/с}$$

Можно исключить из рассмотрения определение скорости центра масс, рассчитав максимальное и минимальное значение скоростей, а затем определив амплитуду скорости как половину их разности. В этом случае участник проделывает те же действия и вычисления «в уме», в явном виде их не описывая, и возможно, не осознавая. При этом такое решение засчитываться как полное при наличии верно полученного значения амплитуд скоростей.

Зная угол наклона плоскости орбит системы к лучу зрения, можем получить и орбитальную скорость каждой компоненты:

$$v_r = v_o \sin i \qquad \rightarrow \qquad v_{o,1} = \frac{v_{r,1}}{\sin i} = \frac{v_{r,1}}{\sin(43^\circ)}$$

На следующем этапе свяжем орбитальную скорость каждого компонента системы с радиусом круговой орбиты каждого из компонентов вокруг общего центра масс:

$$v_{o,i} = \frac{2\pi R_i}{T} \qquad \rightarrow \qquad R_i = \frac{v_{o,i} T}{2\pi}$$

Расстояние между компонентами системы равно $a = R_1 + R_2$

$$a = \frac{T}{2\pi}(v_{o,1} + v_{o,2}) = \frac{T}{2\pi \sin(43^\circ)}(v_{r,1} + v_{r,2})$$

Подставим значения:

$$a = \frac{104 \cdot 86400 \text{ с}}{2\pi 0.682}(26.4 + 25.8) \cdot 10^3 \text{ м/с} = 1.09 \cdot 10^{11} \text{ м} = 0.73 \text{ а.е.}$$

В случае ошибочного использования $\cos i$ минимальное значение составит $a = 0.68$ а.е.

Найдем ошибку определения радиуса орбиты:

$$\Delta a = a\sqrt{\left(\frac{\Delta v_{r,1}}{v_{r,1}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_{r,2}}{v_{r,2}}\right)^2} = 0.7\sqrt{\left(\frac{0.9}{26.4}\right)^2 + \left(\frac{0.9}{25.8}\right)^2} \approx 0.03$$

В случае ошибочного использования $\cos i$ ошибка определения радиуса орбиты составит также $\Delta a = 0.03$ а.е.

Следующий этап решения – это представление видимого расположения двух звезд в картинной плоскости наблюдателя. С учетом того, что орбиты круговые, но имеют наклонение 43°, видимая орбита одной звезды относительно другой звезды будет представлять собой эллипс с большой полуосью a и малой полуосью $b = a \sin i = a \sin(43^\circ) = 0.682a$. Оценим угловой размер при максимальном и минимальном расстоянии между звездами в картинной плоскости.

Максимальное значение:

$$\rho_{\max} = \frac{206265\ a}{r} = \frac{a \text{ а.е}}{r \text{ пк}} = 0.055''$$

В случае ошибочного использования $\cos i$ максимальное значение составит $\rho_{\max} = 0.052''$

Найдем ошибку определения $\rho_{\max}$:

$$\Delta\rho_{\max} = \rho_{\max}\frac{\Delta a}{a} = \frac{206265\ a}{r}\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a \text{ а.е}}{r \text{ пк}} = \Delta a \text{ а.е}\pi = 0.03 \cdot 0.076'' \approx 0.002''$$

В случае ошибочного использования $\cos i$ ошибка определения максимального углового разделения составит теже $\Delta\rho_{\max} = 0.002''$

Получив значения углового разделения звезд, можно сразу сделать вывод, что такие углы для большей части наземной астрономии недоступны, так как полученная величина на порядок меньше величины размытия атмосферы и величины дифракционного предела объектива телескопа. Тем не менее, при помощи методов спекл-интерферометрии можно обойти ограничения, связанные с атмосферой.

Ответ. $\rho_{\max} = 0.055'' \pm 0.002''$. Для наземных телескопов эта система неразрешима.

Критерии оценивания. **20**

Каждый пункт оценивается только в случае верного его выполнения и получения верного численного ответа.

К1. Снятие данных с графика **8**
- Определение скорости движения центра масс 2
- Определение масштаба графика (км/с на мм) 2
- Определение лучевых скоростей компонент с точностью ± 2 км/с . . . . 2×2

Если участник снял масштаб с графика, определив расстояние между двумя соседними рисками, либо вообще не описал метод снятия масштаба, за второй подпункт ставится не более 1 балла при верном полученном значении скоростей

К2. Определение полуоси орбиты **5**
- Связь полуоси и суммы орбитальных скоростей 2
- Связь полуоси и суммы лучевых скоростей 2
- Получение значения большой полуоси 1

Участник мог не использовать наклонение орбиты в своем решении. Это важный этап решения задачи, так как если бы орбита двойной системы лежала в картинной плоскости, лучевые скорости были бы неизмеряемы, и, как следствие, мы бы не узнали, что Капелла – кратная звезда. Такое решение оценивается не более, чем в $2 + 0 + 0$ балла из 5 за данный критерий. Участник мог ошибиться в определении угла наклонения и вместо $\sin i$ использовать $\cos i$. В этом случае данный пункт оценивается как $2 + 0 + 1$ балл

К3. Определение углового разделения между звездами **2**

К4. Вывод о том, что такое угловое разделение недоступно для наблюдений **2**

Если участник не определил скорость движения центра масс, но получил верные значения амплитуд скоростей, то решение засчитывается в полном объеме. Если же в решении появляются амплитуды скоростей порядка 55 км/с, то задача оценивается в ноль баллов.

К5. Определение погрешности величины **3**
- Определение погрешности масштаба 1
- Определение погрешности лучевой скорости 1
- Определение погрешности углового расстояния 1