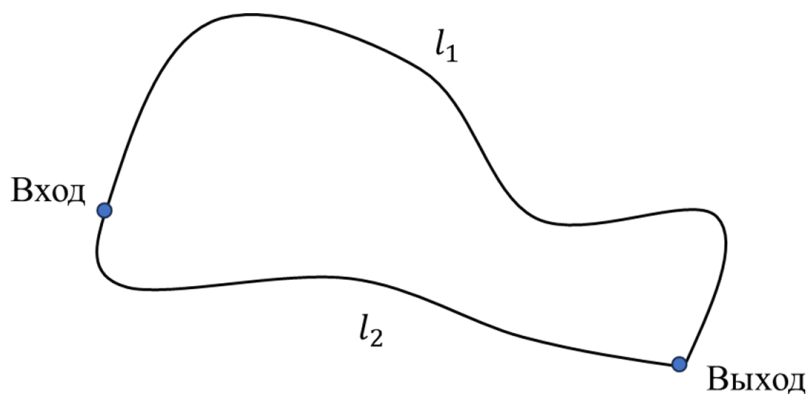


ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Максимальный балл за работу – 40.

Задача 1. Вопросы 1–4

В горной Балкарии огромные стада овец, коров и других животных всё лето проводят на свободном выпасе. Но с наступлением осени пастухи-чабаны гонят стада вниз. Два чабана, Иса и Умар, гонят отару овец уже несколько дней, и вот они достигли места, где дорога разветвляется на два разных ущелья. Чабаны решили разделиться, а после прохождения сложного участка встретиться и обсудить оптимальный маршрут для оставшегося стада. Они разделили стадо на две части и пустили вперёд себя, а сами позже поехали верхом на лошадях параллельно стаду. Иса поехал по левому ущелью, а Умар – по правому. Оказалось, что левое ущелье длиннее ($l_1 = 5$ км) и сложно проходимо, по нему овцы могут двигаться со скоростью $v_1 = 2$ км/ч, а правое – короче ($l_2 = 2$ км), и двигаться по нему овцы могут со скоростью $v_2 = 5$ км/ч. Овцы идут в ущельях на равных расстояниях друг от друга (в двух ущельях эти расстояния разные). Чабаны перемещаются на лошадях и поэтому могут ехать по любому ущелью со скоростью $v = 10$ км/ч.



1. Найдите, сколько минут Умар ждал Ису после прохождения ущелья. Округлите до целого числа. (2 балла)

По дороге вниз чабаны по старой привычке считали овец (овца подсчитывается, когда чабан проезжает мимо неё). Умар насчитал $n_2 = 25$ овец, а Иса – $n_1 = 80$. Считайте, что очередные овцы зашли в ущелья сразу после чабанов, а последних посчитанных овец чабаны встретили в самом конце ущелий. Встретившись, пастухи на основе полученных данных рассчитали две важные величины, которые помогли им решить, как действовать дальше. Определите их и вы.

2. Сколько овец одновременно находится в ущельях? (3 балла)

3. Определите, сколько овец проходит через оба ущелья суммарно за 1 час. (4 балла)

После встречи Умар поехал назад по ущелью длиной l_2 , чтобы спустить всех оставшихся овец.

4. Сколько овец встретил Умар на обратной дороге? Считайте, что Умар въезжает в ущелье сразу после выхода очередной овцы, а последнюю подсчитанную овцу встречает у другого конца ущелья. (3 балла)

Решение:

1. Определим время, которое Иса едет по длинному ущелью

$$t_{ч1} = \frac{l_1}{v},$$

а Умар – по короткому:

$$t_{ч2} = \frac{l_2}{v}.$$

Тогда время ожидания:

$$\Delta t_{ч} = t_{ч1} - t_{ч2} = 18 \text{ мин.}$$

2. Рассмотрим, например, движение пастуха по короткой дороге. Время его движения составит

$$t_2 = \frac{l_2}{v}.$$

Если расстояние между овцами Δl , то время движения между ними можно рассчитать как

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta l_2}{v - v_2}.$$

Общее количество овец, которое встретил пастух в коротком ущелье, можно выразить как

$$n_2 = \frac{t_2}{\Delta t_2} = \frac{l_2}{\Delta l_2} \frac{v - v_2}{v},$$

откуда расстояние между овцами:

$$\Delta l_2 = \frac{l_2}{n_2} \cdot \frac{v - v_2}{v}.$$

Тогда количество овец, находящихся одновременно на короткой дороге,

$$n_2^{\text{одн}} = \frac{l_2}{\Delta l_2} = \frac{n_2 v}{v - v_2}.$$

Аналогично на длинной дороге:

$$n_1^{\text{одн}} = \frac{n_1 v}{v - v_1}.$$

Тогда суммарное количество овец на дороге:

$$n^{\text{одн}} = n_1^{\text{одн}} + n_2^{\text{одн}} = \frac{n_1 v}{v - v_1} + \frac{n_2 v}{v - v_2} = 150.$$

3. Количество овец, проходящих по короткой дороге в течение $\tau = 1$ ч, может быть рассчитано как

$$N_2 = \frac{v_2 \tau}{\Delta l_2} = \frac{n_2 v v_2 \tau}{l_2 (v - v_2)}.$$

Аналогично для длинного ущелья:

$$N_1 = \frac{n_1 v v_1 \tau}{l_1 (v - v_1)}.$$

Тогда общая пропускная способность участка:

$$N = N_1 + N_2 = \frac{n_2 v v_2 \tau}{l_2 (v - v_2)} + \frac{n_1 v v_1 \tau}{l_1 (v - v_1)} = 165.$$

4. Если пастух поедет от конца дороги к началу по дороге длиной l_2 , он будет встречать овец через промежутки времени $\Delta t_2'$, которые можно рассчитать следующим образом:

$$\Delta t_2' = \frac{\Delta l_2}{v + v_2}.$$

Тогда количество овец, встретившихся ему, равняется

$$n_2' = \frac{t_2}{\Delta t_2'} = n_2 \frac{v + v_2}{v - v_2} = 75.$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задачи 1

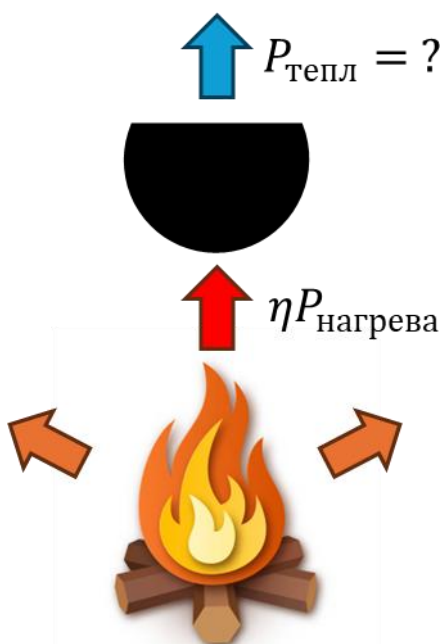
Вариант	l_1 , км	l_2 , км	v_1 , км/ч	v_2 , км/ч	v , км/ч	n_1	n_2
1	5	2	2	5	10	80	25
Ответы	вопрос 1	вопрос 2	вопрос 3	вопрос 4			
	18	150	165	75			
2	4	3	8	9	12	80	30
Ответы	вопрос 1	вопрос 2	вопрос 3	вопрос 4			
	5	360	840	210			
3	4	2	4	6	8	40	40
Ответы	вопрос 1	вопрос 2	вопрос 3	вопрос 4			
	15	240	560	280			
4	5	3	10	12	15	60	40
Ответы	вопрос 1	вопрос 2	вопрос 3	вопрос 4			
	8	380	1160	360			
5	3	2	3	4	6	110	60
Ответы	вопрос 1	вопрос 2	вопрос 3	вопрос 4			
	10	400	580	300			

Максимум за задачу 12 баллов.

Задача 2. Вопросы 5–8

Во время экспедиции хантыйский мальчик Ойка и мансийская девочка Эви решили приготовить суп из оленины. Для этого Ойка набрал в лёгкий котелок $m_{\text{л}} = 2$ кг снега при температуре $t_{\text{л}} = -30$ °С и поставил его на костёр. На костре воду удалось нагреть только до $t_{\text{max}} = 90$ °С.

5. Определите количество теплоты, которое потребовалось бы сообщить содержимому котелка, чтобы нагреть его до температуры t_{max} , если бы теплопотерями можно было пренебречь. Ответ дайте в килоджоулях, округлите до целого числа. (2 балла)
6. Известно, что мощность тепла, выделяемого сгораемыми дровами, равняется $P_{\text{нагрева}} = 1200$ Вт, а до котелка доходит только $\eta = 30$ % выделяемой энергии. Определите мощность теплопотерь котелка с водой при температуре t_{max} . Ответ дайте в ваттах, округлив до целого числа. (3 балла)



Для того чтобы все-таки сварить суп, Ойке пришлось добавить в огонь ещё несколько поленьев, что увеличило вдвое мощность, выделяемую дровами. После того как вода закипела, Эви положила в котёл $m_0 = 0,5$ кг мелко нарезанной оленины из рюкзака с температурой $t_0 = 10$ °С.

7. Найдите температуру, установившуюся в котелке после добавления мяса, считая, что этот процесс теплообмена произошёл достаточно быстро. Ответ дайте в градусах Цельсия, округлив до десятых долей. (3 балла)

8. Определите время, через которое суп снова закипит. Считайте, что мощность теплопотерь для котелка в диапазоне температур 80°C - 100°C практически постоянна и равна мощности теплопотерь при температуре t_{max} . Ответ дайте в минутах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Справочные данные:

Удельная теплоёмкость воды: $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$.

Удельная теплоёмкость льда: $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$.

Удельная теплоёмкость оленины: $c_{\text{о}} = 2700 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$.

Удельная теплота плавления льда: $\lambda = 330 \text{ кДж}/\text{кг}$.

Решение:

5. Найдём общее количество теплоты, которое потребовалось для увеличения температуры содержимого котелка.

Нагрев снега с -30°C до 0°C :

$$Q_1 = m_{\text{л}} \cdot c_{\text{л}} \cdot (0 - t_{\text{л}}).$$

Плавление льда при 0°C :

$$Q_2 = m_{\text{л}} \cdot \lambda.$$

Нагрев воды с 0°C до 90°C :

$$Q_3 = m_{\text{л}} \cdot c_{\text{в}} \cdot (t_{\text{max}} - 0).$$

Общее количество теплоты:

$$Q_{\text{общ}} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$Q_{\text{общ}} = m_{\text{л}} c_{\text{л}} (0 - t_{\text{л}}) + m_{\text{л}} \lambda + m_{\text{л}} c_{\text{в}} (t_{\text{max}} - 0) = 1542 \text{ кДж}$$

6. Если температура содержимого котелка перестала меняться, то мощность подводимого тепла стала равна мощности теплопотерь:

$$P_{\text{тепл}} = P_{\text{подвод}} = \eta \cdot P_{\text{нагрева}} = 360 \text{ Вт}$$

7. Так как мы считаем, что процесс теплообмена между водой и олениной происходит быстро, можно пренебречь мощностью подводимого тепла и теплопотерями. Запишем уравнение теплового баланса:

$$m_{\text{л}} \cdot c_{\text{в}} \cdot (t_{\text{кип}} - t_{\text{уст}}) = m_{\text{о}} \cdot c_{\text{о}} \cdot (t_{\text{уст}} - t_0).$$

Откуда

$$t_{\text{уст}} = \frac{m_{\text{л}} \cdot c_{\text{в}} \cdot t_{\text{кип}} + m_{\text{о}} \cdot c_{\text{о}} \cdot t_0}{m_{\text{л}} \cdot c_{\text{в}} + m_{\text{о}} \cdot c_{\text{о}}} = 87,5^{\circ}\text{C}.$$

8. Чтобы определить время, через которое суп снова закипит, найдём мощность, которая будет сообщаться содержимому котелка. Она будет равняться

$$2\eta P_{\text{нагрева}} - P_{\text{тепл}}.$$

Теперь запишем уравнение, связывающее процесс нагрева супа и подводимую мощность:

$$\tau \cdot (2\eta P_{\text{нагрева}} - P_{\text{тепл}}) = m_{\text{л}} c_{\text{в}} (t_{\text{кип}} - t_{\text{уст}}) + m_{\text{о}} c_{\text{о}} (t_{\text{кип}} - t_{\text{уст}})$$

$$\tau = \frac{(m_{\text{л}}c_{\text{в}} + m_{\text{о}}c_{\text{о}})(t_{\text{кип}} - t_{\text{уст}})}{(2\eta P_{\text{нагрева}} - P_{\text{тепл}})} = 5,6 \text{ мин.}$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задачи 2

Вариант	$m_{\text{л}}, \text{кг}$	$t_{\text{л}}, ^\circ\text{C}$	$t_{\text{max}}, ^\circ\text{C}$	$P_{\text{нагрева}}, \text{Вт}$	$\eta, \%$	$m_{\text{о}}, \text{кг}$	$t_{\text{о}}, ^\circ\text{C}$
1	2	–30	90	1200	30	0,5	10
Ответы	вопрос 5	вопрос 6	вопрос 7	вопрос 8			
	1542	360	87,5	5,6			
2	3	–20	95	1000	25	0,7	15
Ответы	вопрос 5	вопрос 6	вопрос 7	вопрос 8			
	2313	250	88,9	10,7			
3	4	–40	85	2000	20	1	5
Ответы	вопрос 5	вопрос 6	вопрос 7	вопрос 8			
	3084	400	86,8	10,7			
4	1,5	–10	92	1500	10	0,5	10
Ответы	вопрос 5	вопрос 6	вопрос 7	вопрос 8			
	1106	150	84,1	13,5			
5	3	–10	94	1400	15	0,4	17
Ответы	вопрос 5	вопрос 6	вопрос 7	вопрос 8			
	2237	210	93,4	7,1			

Максимум за задачу 11 баллов.

Задача 3. Вопросы 9–12

Чукотский мальчик Кэску отправился на рыбалку. Он использует лёгкую удочку длиной $l = 1,2 \text{ м}$: один конец удочки Кэску упирает ногой в лёд, а на расстоянии $x = 0,2 \text{ м}$ от этого конца он держит удочку рукой. На втором конце удочки висит рыба массой $m_{\text{р}} = 2 \text{ кг}$. Изгибом удочки можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

- 9.** С какой вертикальной силой Кэску нужно удерживать удочку рукой, чтобы она оставалась в равновесии? Ответ дайте в ньютонах, округлите до целого числа. **(2 балла)**

После успешной рыбалки Кэску перевозит рыбу на нартах по льду. Масса пустых нарт $m_n = 30$ кг, общая площадь полозьев $S = 0,15$ м².

10. Какое давление оказывают пустые нарты на лёд? Ответ дайте в кПа, округлите до десятых долей. (1 балл)
11. Какую максимальную массу рыбы можно погрузить на нарты, чтобы они не ушли под лёд толщиной $h_l = 10$ см, если он выдерживает максимальное давление $P_{max} = 8$ кПа? Ответ дайте в килограммах, округлите до целого числа. (2 балла)

По весне толщина льда может быть сильно неоднородной даже на одном водоёме. Известно, что максимальное давление, которое выдерживает лёд, прямо пропорционально квадрату его толщины.

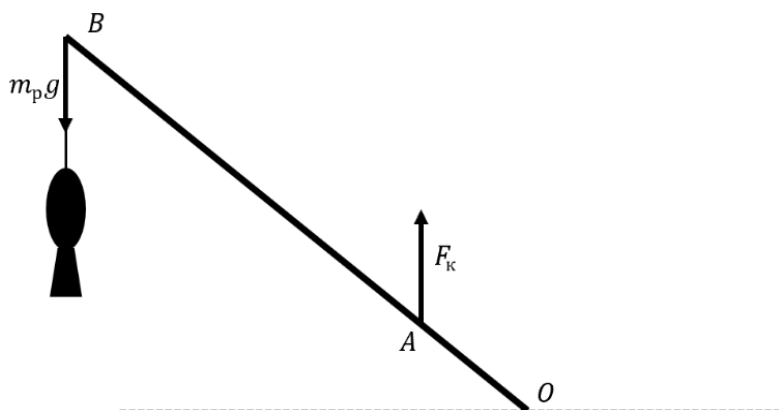
12. Какой должна быть минимальная толщина льда, чтобы на него могли заехать пустые нарты? Ответ дайте в сантиметрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Решение:

9. Запишем правило моментов относительно конца удочки, упирающегося в лёд (точка О). В силу подобия треугольников, плечи силы тяжести рыбы и силы, с которой Кэску держит удочку рукой, относятся так же, как длины соответствующих участков удочки.

$$m_p g \cdot OB = F_k \cdot OA.$$

$$F_k = \frac{m_p g \cdot OB}{OA} = \frac{m_p g \cdot l}{x} = 120 \text{ Н.}$$



10. Давление, которое оказывают пустые нарты на лёд, может быть найдено как

$$P_0 = \frac{m_n g}{S} = 2000 \text{ кПа.}$$

11. Массу рыбы, которую можно погрузить на нарты, найдём следующим образом:

$$m_p = \frac{P_{max}S}{g} - m_H = 90 \text{ кг.}$$

12. Чтобы найти минимальную толщину слоя льда, который сможет выдержать давление от пустых нарт, воспользуемся пропорцией следующего вида:

$$\frac{P_{max}}{P_0} = \frac{h_L^2}{(h_{min})^2}$$

$$h_{min} = h_L \cdot \sqrt{\frac{P_0}{P_{max}}} = 5 \text{ см}$$

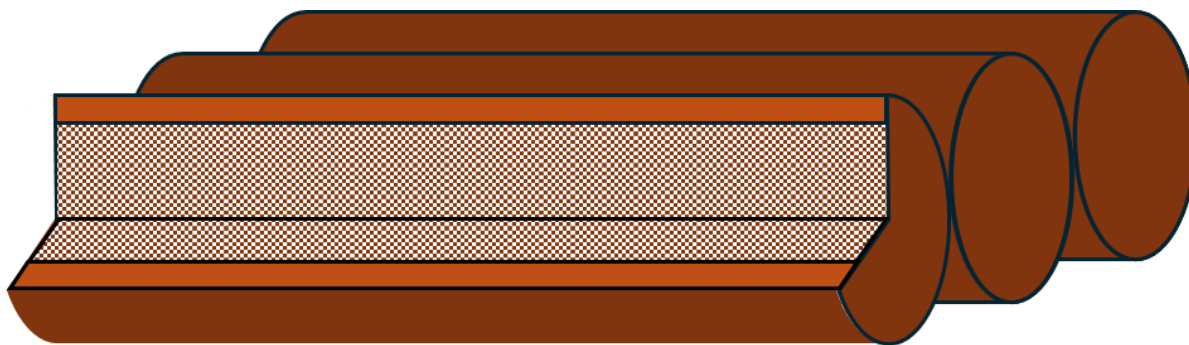
Матрица параметров и ответов к вариантам задачи 3

Вариант	l , м	x , м	m_p , кг	m_H , кг	S , м ²	h_L , см	P_{max} , Па
1	1,2	0,2	2	30	0,15	10	8000
Ответы	вопрос 9	вопрос 10	вопрос 11	вопрос 12			
	120		90				
2	1,5	0,3	3	20	0,2	5	4000
Ответы	вопрос 9	вопрос 10	вопрос 11	вопрос 12			
	150		60	2,5			
3	1	0,25	2,5	15	0,1	8	6000
Ответы	вопрос 9	вопрос 10	вопрос 11	вопрос 12			
	100	5	45				
4	1,3	0,3	1,5	14	0,1	7	5600
Ответы	вопрос 9	вопрос 10	вопрос 11	вопрос 12			
	65	4	42	3,5			
5	1,4	0,2	1	15	0,125	6	4800
Ответы	вопрос 9	вопрос 10	вопрос 11	вопрос 12			
	70	2	45				

Максимум за задачу 8 баллов.

Задача 4. Вопросы 13–16

Удмуртская девочка Лемпи помогает дедушке перевозить по реке чёлн (лодку), собранный из трёх связанных пустотелых брёвен, закрытых лёгкими тонкими крышками. Каждое бревно имеет форму полого цилиндра длиной $H = 2$ м, внешним диаметром $D = 30$ см и внутренним диаметром $d = 16$ см. В середине одного бревна дедушка устроил тайник, в который Лемпи положила мешок с зерном массой $m = 20$ кг.



Плотность древесины $\rho_d = 520$ кг/м³. Плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

13. Найдите массу одного пустотелого бревна. Ответ дайте в килограммах, округлите до десятых долей. **(2 балла)**
14. Какова средняя плотность пустого чёлна? Ответ дайте в кг/м³, округлите до целого числа. **(2 балла)**
15. Какая часть объёма чёлна, гружённого зерном, находится под водой? Ответ дайте в процентах, округлите до целого числа. **(3 балла)**
16. В процессе перевозки одно из брёвен без зерна треснуло, поэтому его заменили на найденное бревно такого же размера, но без внутренней полости. На сколько после этой замены изменилась сила Архимеда, действующая на чёлн? Ответ дайте в ньютонах, округлите до целого числа. **(2 балла)**

Решение:

13. Масса одного бревна может быть найдена как

$$m_6 = \rho_d \cdot V_d = \rho_d \cdot \frac{\pi H}{4} (D^2 - d^2) = 52,6 \text{ кг.}$$

14. Среднюю плотность чёлна найдем по определению:

$$\rho_{\text{ч}} = \frac{3m_6}{V_{\text{внешн}}} = \frac{3m_6}{3 \cdot \frac{\pi H}{4} D^2} = 372 \text{ кг/м}^3.$$

15. Чтобы рассчитать, на какую часть объёма погрузится чёлн при его загрузке зерном, сначала найдём абсолютное значение объёма, на который погрузится чёлн при загрузке:

$$V_{\text{выт}} = \frac{(3m_6 + m)g}{\rho_v g} = \frac{(3m_6 + m)}{\rho_v}.$$

Теперь найдём, какую часть от общего объёма составляет дополнительный объём погружённой части:

$$\alpha = \frac{V_{\text{выт}}}{3V_{\text{внешн}}} = \frac{(3m_6 + m)}{3 \cdot \frac{\pi H}{4} D^2 \cdot \rho_{\text{в}}} = 0,42.$$

16. Рассчитаем новую среднюю плотность чёлна после пробойны, чтобы удостовериться, что он остался на плаву:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{3m_6 + m + \frac{\pi H}{4} d^2 \rho_{\text{д}}}{3 \cdot \frac{\pi H}{4} D^2} =.$$

Так как средняя плотность всё ещё меньше плотности воды, то он остался на плаву, а значит, действие на него всех сил скомпенсировано, то есть изменение силы Архимеда равняется изменению силы тяжести. Рассчитаем изменение силы тяжести за счёт «добавленной» сердцевины бревна:

$$\Delta F_A = \Delta F_T = \frac{\pi H}{4} d^2 \rho_{\text{д}} g = 209 \text{ Н}.$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задачи 4

Вариант	H , м	d , см	D , см	m , кг
1				
Ответы	вопрос 13	вопрос 14	вопрос 15	вопрос 16
		372	42	209
2	3	20	30	30
Ответы	вопрос 13	вопрос 14	вопрос 15	вопрос 16
	61,2	289	34	490
3	2	20	40	25
Ответы	вопрос 13	вопрос 14	вопрос 15	вопрос 16
	98,0	390	42	327
4	1,5	15	25	10
Ответы	вопрос 13	вопрос 14	вопрос 15	вопрос 16
	24,5	333	38	138
5	2	15	30	15
Ответы	вопрос 13	вопрос 14	вопрос 15	вопрос 16
	55,1	390	43	184

Максимум за задачу 9 баллов.

Максимальный балл за работу – 40.