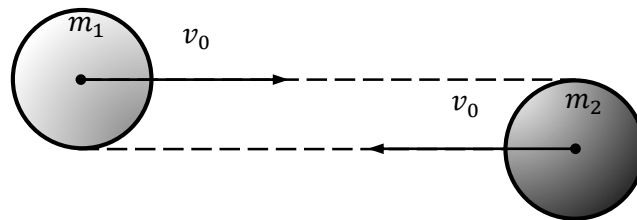


ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Максимальный балл за работу –50.

Задача 1. Вопросы 1-4

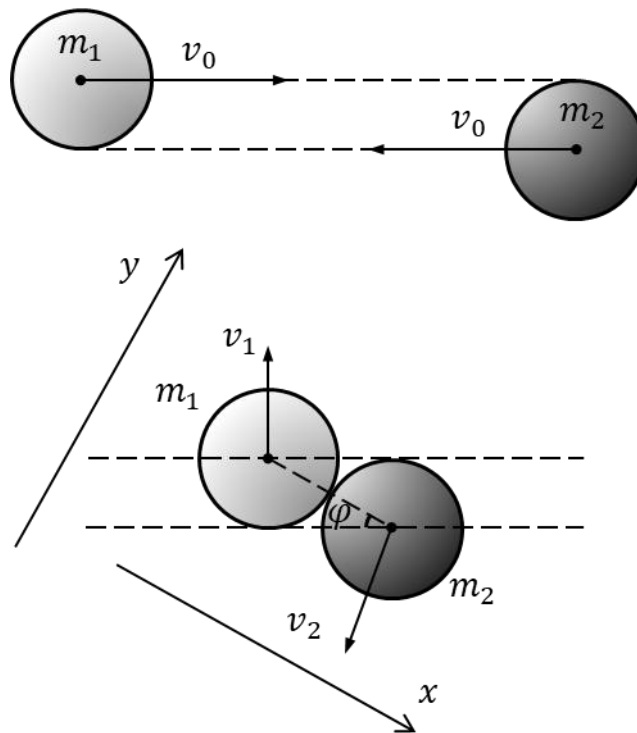
Гладкий шар массой m_1 налетает на гладкий шар массой m_2 такого же диаметра, движущийся с той же скоростью $v_0 = 8,7$ м/с в противоположном направлении так, как показано на рисунке. В результате упругого соударения первый шар отскакивает в направлении, перпендикулярном первоначальному направлению его движения.



1. Найдите скорость v_1 первого шара после соударения. Дайте ответ в м/с с округлением до десятых долей. **(2 балла)**
2. Найдите скорость v_2 второго шара после соударения. Дайте ответ в м/с с округлением до десятых долей. **(3 балла)**
3. Найдите отношение m_1/m_2 масс шаров. Дайте ответ с округлением до десятых долей. **(3 балла)**
4. На какой угол α повернётся вектор скорости второго шара в результате соударения с первым? Дайте ответ в градусах с округлением до целого числа. **(2 балла)**

Решение:

1. Введём систему координат. Ось OY направим перпендикулярно линии, соединяющей центры шаров во время удара, а ось OX – вдоль этой линии. Так как шары гладкие, то сила взаимодействия шаров направлена перпендикулярно площади их соприкосновения, то есть вдоль оси OX . Тогда проекции импульсов, а вместе с ними и скоростей шаров, на ось OY не меняются.



Ось Ox составляет угол в $\varphi = 30^\circ$ с начальной скоростью первого шара. Тогда для связи начальной скорости первого шара и его конечной скорости имеем:

$$v_0 \sin \varphi = v_1 \cos \varphi.$$

Отсюда скорость первого шара после удара:

$$v_1 = v_0 \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0}{\sqrt{3}} = 5,0 \text{ м/с}.$$

3. Рассмотрим вспомогательную задачу о лобовом соударении двух шаров. Пусть шары массами m_1 и m_2 имеют противоположно направленные скорости u_1 и u_2 и испытывают лобовое столкновение. Найдём скорости шаров после удара. Для этого сначала рассчитаем скорость движения центра масс системы:

$$u_{\text{цм}} = \frac{m_1 u_1 - m_2 u_2}{m_1 + m_2}.$$

Будем считать, что импульс первого шара больше второго, тогда скорость центра масс будет сонаправлена со скоростью первого шара. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся со скоростью центра масс, и рассчитаем скорости движения шаров:

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 - u_{\text{цм}}, \\ u'_2 &= u_2 + u_{\text{цм}}. \end{aligned}$$

Модули импульсов шаров в системе, движущейся со скоростью центра масс (далее СО ЦМ), одинаковы как до, так и после удара. Закон сохранения энергии в СО ЦМ можно записать как:

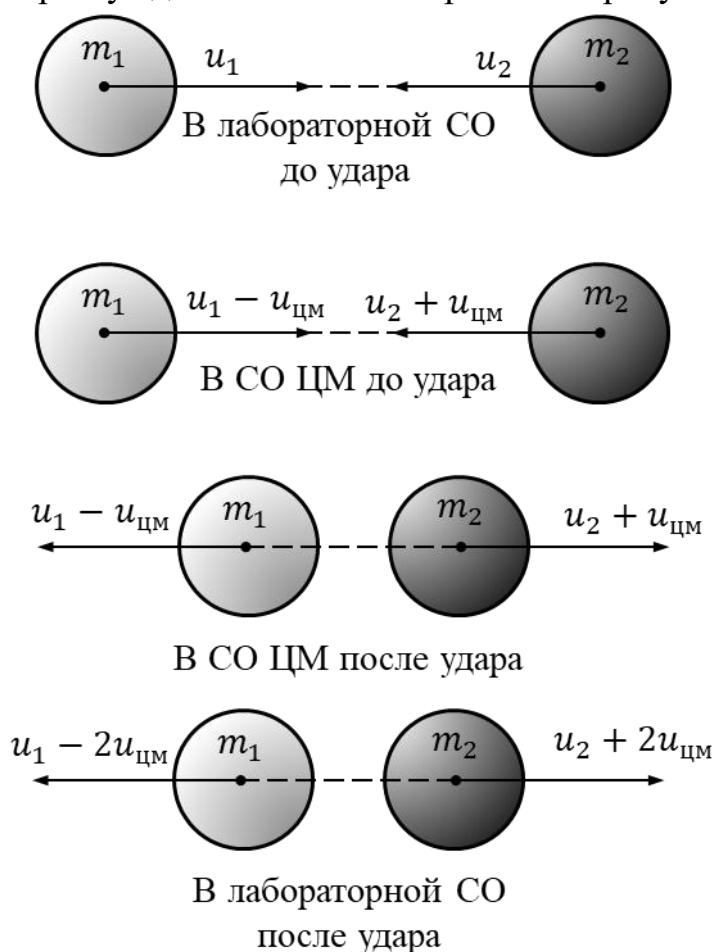
$$\frac{p'^2}{2m_1} + \frac{p'^2}{2m_2} = \frac{p''^2}{2m_1} + \frac{p''^2}{2m_2}.$$

Тогда можно утверждать, что модули импульсов шаров после удара будут равны модулям импульсов шаров до удара. Последнее говорит о том, что скорости шаров после удара в СО ЦМ будут равны скоростям до удара, но при этом поменяют свои направления на противоположные. Найдём скорости шаров после удара в лабораторной СО:

$$u_{п1} = u'_1 - 2u_{цм} = u_1 - 2u_{цм},$$

$$u_{п2} = u'_2 + 2u_{цм} = u_2 + 2u_{цм}.$$

Схему описанных рассуждений можно изобразить на рисунке:



В исходной задаче проекции скоростей шаров на ось OY не влияют на соударение шаров по оси OX . Для упрощения решения рассмотрим центральный удар шаров, движущихся со скоростями равными проекциям скоростей шаров исходной задачи на ось OX . В случае такого центрального соударения скорости после упругого удара могут быть рассчитаны как:

$$\begin{cases} v_1 \sin \varphi = v_0 \cos \varphi - 2v_{цм} \\ v_{2x} = v_0 \cos \varphi + 2v_{цм} \end{cases},$$

где $v_{\text{цм}} = v_0 \cos \varphi \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ – скорость центра масс в упрощённой задаче или проекция скорости центра масс на ось OX в исходной задаче. Воспользуемся первым равенством из системы для поиска отношения масс шаров:

$$\frac{v_0}{2\sqrt{3}} = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\right).$$

Отсюда получаем:

$$k = 2.$$

2. Воспользуемся вторым равенством для поиска составляющей скорости второго шара вдоль оси OX :

$$v_{2x} = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + 2 \frac{k-1}{k+1}\right) = v_0 \frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

Проекция скорости второго шара на ось OY остаётся неизменной:

$$v_{2y} = -v_0 \sin \varphi = -\frac{v_0}{2}.$$

Тогда по теореме Пифагора скорость второго шара:

$$v_2 = v_0 \sqrt{\left(\frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = v_0 \sqrt{\frac{7}{3}} = 13,3 \text{ м/с}.$$

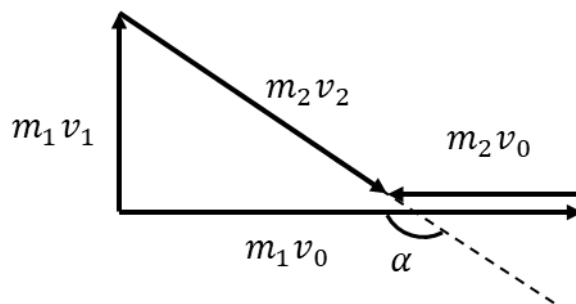
4. Угол поворота вектора скорости второго шара найдём как:

$$\alpha = 60^\circ + \arctg\left(\frac{v_{2x}}{|v_{2y}|}\right) = 60^\circ + \arctg\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) \approx 131^\circ.$$

Также для поиска ответов на вопросы 2-3 можно воспользоваться альтернативным методом решения. Запишем закон сохранения энергии в земной СО:

$$\frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Визуализируем закон сохранения импульса в земной СО.



Тогда модули импульсов тел можно связать через теорему Пифагора:

$$m_1^2 v_1^2 + (m_1 - m_2)^2 v_0^2 = m_2^2 v_2^2$$

Объединим уравнения в систему с двумя неизвестными - k и v_2 ($v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{3}}$ – в этом методе находим способом, описанным выше):

$$\begin{cases} \frac{(k+1)v_0^2}{2} = \frac{kv_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} \\ k^2v_1^2 + (k-1)^2v_0^2 = k^2v_2^2 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$\begin{cases} k = 2 \\ v_2 = v_0 \sqrt{\frac{7}{3}} \end{cases}$$

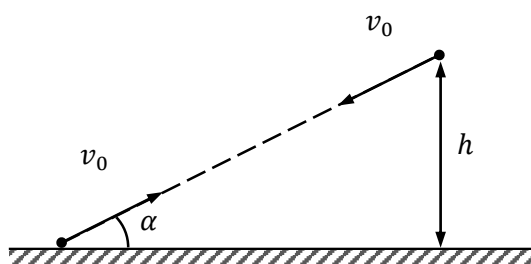
Матрица параметров и ответов к вариантам задачи 1

Вариант	v_0 , м/с	Ответ на вопрос 1	Ответ на вопрос 2	Ответ на вопрос 3	Ответ на вопрос 4
1	8,7	5,0	13,3	2,0	131
2	4,5	2,6	6,9	2,0	131
3	5,7	3,3	8,7	2,0	131
4	3,3	1,9	5,0	2,0	131
5	1,9	1,1	2,9	2,0	131

Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 2. Вопросы 5-9

Два камня бросают одновременно навстречу друг другу с одинаковыми начальными скоростями v_0 вдоль прямой, наклонённой под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Первый камень бросают с горизонтальной поверхности земли, а второй – с высоты $h = 100$ м (см. рисунок). На землю камни падают одновременно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

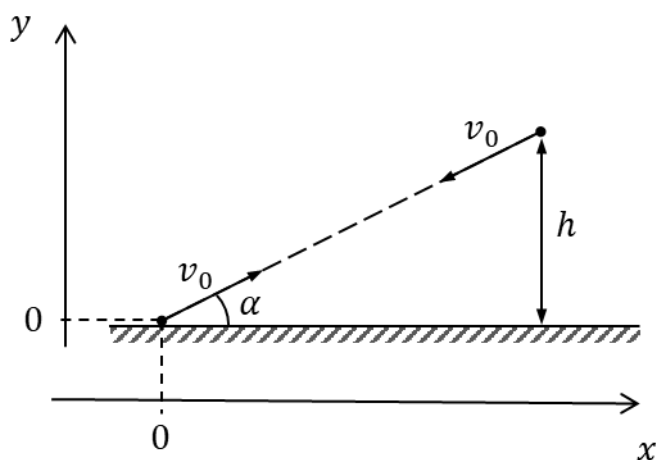


5. Найдите время t полёта камней. Дайте ответ в секундах с округлением до сотых долей. (2 балла)

6. Найдите скорость v_0 . Дайте ответ в м/с с округлением до десятых долей. **(2 балла)**
7. Чему равен модуль вектора перемещения первого камня S_1 за время его полёта? Дайте ответ в метрах с округлением до целого числа. **(2 балла)**
8. Чему равен модуль вектора перемещения второго камня S_2 за время его полёта? Дайте ответ в метрах с округлением до целого числа. **(2 балла)**
9. На каком расстоянии S друг от друга приземляются камни? Дайте ответ в метрах с округлением до десятых долей. **(2 балла)**

Решение:

5. Введём систему координат, как на рисунке:



Запишем законы движения первого и второго камня в проекции на ось ОУ:

$$\begin{cases} 0 = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \\ 0 = h - v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Сложим уравнения и выразим время полёта камней:

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}} = 3,16 \text{ с.}$$

6. Подставим полученное выражение в первое уравнение. Тогда скорость камней составит

$$v_0 = \frac{gt}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{gh}}{2 \sin \alpha} = 31,6 \text{ м/с.}$$

7. Запишем закон движения первого камня в проекции на ось ОХ:

$$S_1 = v_0 \cos \alpha \cdot t = \frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{2} = 87 \text{ м.}$$

8. Так как времена движения камней и модули их проекций на горизонтальную ось совпадают, то модуль проекции перемещения второго камня на горизонтальную ось составляет

$$|S_{2x}| = S_1.$$

Модуль проекции вертикального перемещения второго камня равен высоте, с которой запускали камень:

$$|S_{2y}| = h.$$

Тогда окончательно для перемещения второго камня получаем

$$S_2 = \sqrt{(S_1)^2 + (h)^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{2} \operatorname{ctg} \alpha\right)^2 + h^2} = \frac{h}{2} \sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 132 \text{ м.}$$

9. Расстояние между точками падения S найдём из разности проекции расстояния между камнями в начальный и конечный моменты времени:

$$S = h \operatorname{ctg} \alpha - S_1 - |S_{2x}| = 0.$$

То есть камни прилетают в одну точку.

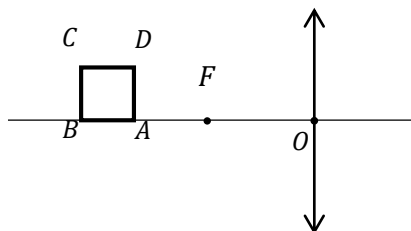
Матрица параметров и ответов к вариантам задачи 2

Вариант	$\alpha, ^\circ$	$h, \text{ м}$	Ответ на вопрос 5	Ответ на вопрос 6	Ответ на вопрос 7	Ответ на вопрос 8	Ответ на вопрос 9
1	30	100	3,16	31,6	87	132	0
2	30	50	2,24	22,4	43	66	0
3	60	100	3,16	18,3	29	104	0
4	60	50	2,24	12,9	14	52	0
5	45	100	3,16	22,4	50	112	0

Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 3. Вопросы 10-12

Квадратный предмет $ABCD$ расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы, как показано на рисунке. Длина стороны изображения $A'B'$ равна длине стороны предмета AB . Поперечное увеличение линзы для стороны BC равно $\Gamma_1 = 0,8$. Лучи, падающие от предмета на линзу, считайте параксиальными.



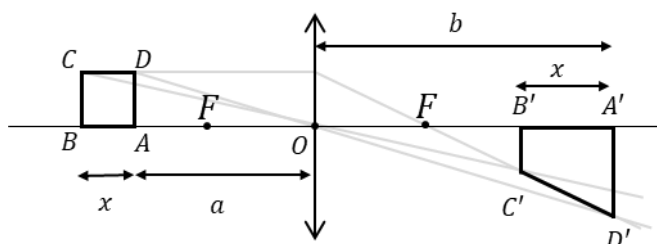
10. Чему равно поперечное увеличение линзы Γ_2 для стороны AD ?
Дайте ответ с округлением до тысячных долей. (3 балла)

11. Определите отношение длины изображения $C'D'$ стороны CD к длине самой стороны CD . Дайте ответ с округлением до тысячных долей. (3 балла)

12. Найдите отношение k площади изображения предмета к площади самого предмета. Дайте ответ с округлением до тысячных долей. (4 балла)

Решение:

10. Построением найдём изображение объекта. Видно, что изображение имеет форму прямоугольной трапеции. Обозначим размер предмета за x . Тогда высота трапеции изображения будет равна x .



Запишем формулу тонкой линзы для образования изображений сторон AD и BC :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \\ \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b-x} = \frac{1}{F} \end{cases}$$

Приравняв правые стороны уравнений, получаем $ab = (a+x)(b-x)$.

Отсюда:

$$x = b - a.$$

Увеличение для стороны BC можно выразить как:

$$\Gamma_1 = \frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}.$$

А увеличение для стороны AD :

$$\Gamma_2 = \frac{a}{b} = \frac{1}{\Gamma_1} = 1,250.$$

11. Длину стороны $C'D'$ можно вычислить по теореме Пифагора:

$$C'D' = a\sqrt{1 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} = a\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\Gamma_1} - \Gamma_1\right)^2}.$$

Тогда искомое отношение:

$$\Gamma_3 = \frac{C'D'}{CD} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\Gamma_1} - \Gamma_1\right)^2} = 1,097.$$

12. Площадь изображения подсчитаем через произведение высоты трапеции и полусуммы оснований:

$$S' = x \cdot \frac{x(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2} = \frac{x^2}{2} \left(\Gamma_1 + \frac{1}{\Gamma_1} \right).$$

Тогда отношение площадей изображения и предмета:

$$\Gamma_4 = \frac{S'}{S} = \frac{\left(\Gamma_1 + \frac{1}{\Gamma_1} \right)}{2} = 1,025.$$

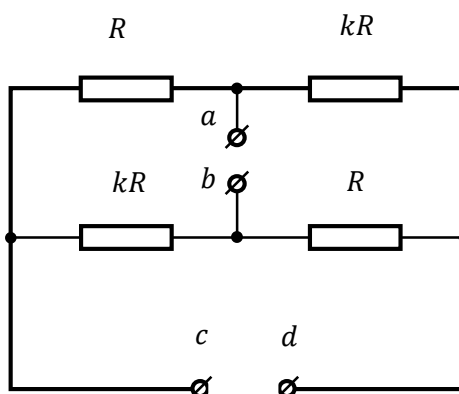
Матрица параметров и ответов к вариантам задачи 3

Вариант	Γ_1	Ответ на вопрос 10	Ответ на вопрос 11	Ответ на вопрос 12
1	0,8	1,250	1,097	1,025
2	0,7	1,429	1,237	1,064
3	0,6	1,667	1,462	1,133
4	0,5	2,000	1,803	1,250
5	0,4	2,500	2,326	1,450

Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 4. Вопросы 13-16

В цепи, показанной на рисунке, резисторы имеют сопротивления R и kR ($k = 2$). К клеммам a и b подключают идеальный омметр, а к клеммам c и d – идеальный амперметр. Омметр при этом показывает $\Omega_1 = 5$ Ом, а амперметр – $I_1 = 100$ мА.



13. Чему равно сопротивление R ? Дайте ответ в омах с округлением до сотых долей. (2 балла)

14. Какая суммарная тепловая мощность P выделяется на резисторах? Дайте ответ в ваттах с округлением до сотых долей. (3 балла)

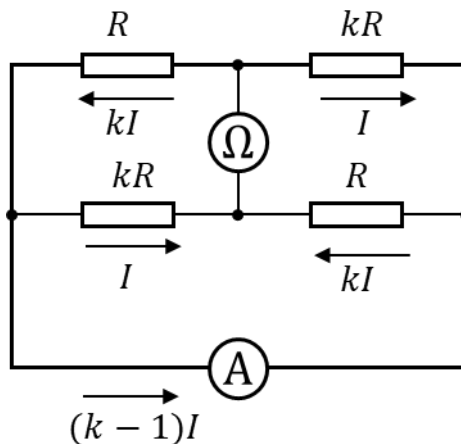
Омметр и амперметр меняют местами.

15. Какими станут показания Ω_2 омметра? Дайте ответ в омах с округлением до десятых долей. (3 балла)

16. Какими станут показания I_2 амперметра? Дайте ответ в миллиамперах с округлением до целого числа. (2 балла)

Решение:

13. Обозначим ток, текущий через правый верхний резистор, за I . В первом подключении падение напряжения на верхних резисторах одинаково, тогда по верхнему левому резистору потечёт ток kI . Суммарный ток, протекающий через верхние резисторы равен суммарному току, протекающему через нижние, при этом падение напряжения на нижних резисторах также одинаково. С учётом описанного распределения токов, текущих через резисторы, ток, текущий через амперметр, будет равен $I_1 = (k - 1)I$.



Общий ток, текущий через цепь (создаваемый источником внутри омметра), будет тогда равен $(k + 1)I$. Сопротивление цепи можно рассчитать как отношение падения напряжения на ней к общему току:

$$\Omega_1 = \frac{IkR + kIR}{(k + 1)I} = \frac{2k}{k + 1} R$$

Тогда сопротивление резистора составит:

$$R = \Omega_1 \frac{k + 1}{2k} = 3,75 \text{ Ом}$$

14. Полный ток в цепи можно связать с током, текущим через амперметр как:

$$I_0 = (k + 1)I = (k + 1) \frac{I_1}{(k - 1)}.$$

Полная мощность, выделяемая во всех резисторах, тогда может быть рассчитана из закона Джоуля-Ленца:

$$P = I_0^2 \Omega_1 = \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^2 I_1^2 \Omega_1 = 0,45 \text{ Вт}$$

15-16. Можно заметить, что если поменять приборы местами, то схема останется прежней. Следовательно, показания приборов останутся неизменными:

$$\begin{cases} I_2 = I_1 = 100 \text{ мА} \\ \Omega_2 = \Omega_1 = 5,0 \text{ Ом} \end{cases}$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задачи 4

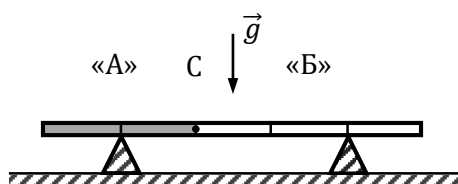
Вариант	k	$\Omega_1, \text{Ом}$	$I_1, \text{мА}$	Ответ на вопрос 13	Ответ на вопрос 14	Ответ на вопрос 15	Ответ на вопрос 16
1	2	5	100	3,75	0,45	5,0	100
2	2	10	50	7,50	0,23	10,0	50
3	3	6	60	4,00	0,09	6,0	60
4	3	9	100	6,00	0,36	9,0	100
5	4	8	100	5,00	0,22	8,0	100

Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 5. Вопросы 17-20

Если одно тело контактирует с другим по протяжённой поверхности, то воздействие первого тела на второе часто невозможно описать только равнодействующей всех элементарных сил в точках контакта. Помимо равнодействующей требуется учитывать ещё и суммарный момент этих элементарных сил. При рассмотрении воздействия одной части твёрдого тела на другую элементарные силы являются силами деформации, их в совокупности также можно заменить равнодействующей силой и вращающим моментом.

Однородный тонкий стержень массой $m = 10 \text{ кг}$ и длиной $l = 1 \text{ м}$ покоится горизонтально на двух опорах, как показано на рисунке. Стержень штрихами разделён на 5 частей одинаковой длины. Две левые части стержня, закрашенные на рисунке, назовём телом «А», а три другие части – телом «Б». Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.



17. Какова масса тела «А»? Дайте ответ в кг с округлением до десятых долей.
(1 балл)

18. С какой силой F_A тело «А» действует на левую опору? Дайте ответ в ньютонах с округлением до целого числа. (2 балла)

19. С какой силой F_{AB} тело «Б» действует на тело «А» в точке С их соприкосновения? Дайте ответ в ньютонах с округлением до целого числа.
(3 балла)

20. Какой момент сил M_{AB} действует на тело «А» со стороны тела «Б»? Дайте ответ в Н · м с округлением до целого числа. (4 балла)

Решение:

17. Масса тела «А»:

$$m_A = \frac{2}{5}m = 4 \text{ кг.}$$

18. Так как опоры расположены симметрично относительно центра масс стержня, то силы действия опор на стержни одинаковы. С другой стороны, эти силы уравнивают силу тяжести стержня. Тогда каждая из сил будет равна половине силы тяжести стержня:

$$F_A = F_B = \frac{mg}{2} = 50 \text{ Н.}$$

19. Будем предполагать, что тело «Б» тянет тело «А» вниз. Запишем условие равенства нулю суммы сил, действующих на тело «А»:

$$\begin{aligned} F_A - m_A g - F_{AB} &= 0, \\ F_{AB} &= \frac{mg}{2} - \frac{2}{5}mg = \frac{mg}{10} = 10 \text{ Н.} \end{aligned}$$

20. Запишем уравнение моментов для тела «А» относительно точки «С». Положительным выберем направление по часовой стрелке.

$$\begin{aligned} 0 &= M_{AB} + M_{m_A g} + M_{F_A} \\ 0 &= M_{AB} - m_A g \frac{l}{5} + F_A \frac{l}{5} \end{aligned}$$

Тогда момент упругих сил, возникающих в месте соприкосновения тел, составит:

$$M_{AB} = \frac{l}{5}(m_A g - F_A) = \frac{l}{5}\left(\frac{2mg}{5} - \frac{mg}{2}\right) = -\frac{mgl}{50}$$

Знак минус говорит о том, что момент упругих сил, действующих со стороны тела «Б» на тело «А» направлен против часовой стрелки. В ответ запишем модуль этого значения:

$$|M_{AB}| = \frac{mgl}{50} = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задачи 5

Вариант	m , кг	l , м	Ответ на вопрос 17	Ответ на вопрос 18	Ответ на вопрос 19	Ответ на вопрос 20
1	10	1	4,0	50	10	2
2	20	2	8,0	100	20	8
3	30	1	12,0	150	30	6
4	40	2	16,0	200	40	16
5	50	1	20,0	250	50	10

Максимум за задачу 10 баллов.

Максимальный балл за работу – 50.