Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике

г. Москва, 3-5 декабря 2025 г.

Задания

Каждое задание 7 баллов.

9 класс

Задача 9.1. Акционеры по очереди делят доходы компании. Первый акционер получил 1000 рублей и 1/10 оставшихся доходов, второй — 2000 рублей и 1/10 остатка, третий — 3000 рублей и 1/10 остатка и так далее. Оказалось, что все акционеры поделили доходы поровну. Сколько рублей получил каждый акционер?

Вариант 9.1.2. Акционеры по очереди делят доходы компании. Первый акционер получил 500 рублей и 1/10 оставшихся доходов, второй — 1000 рублей и 1/10 остатка, третий — 1500 рублей и 1/10 остатка и так далее. Оказалось, что все акционеры поделили доходы поровну. Сколько рублей получил каждый акционер?

Вариант 9.1.3. Акционеры по очереди делят доходы компании. Первый акционер получил 2000 рублей и 1/10 оставшихся доходов, второй — 4000 рублей и 1/10 остатка, третий — 6000 рублей и 1/10 остатка и так далее. Оказалось, что все акционеры поделили доходы поровну. Сколько рублей получил каждый акционер?

Вариант 9.1.4. Акционеры по очереди делят доходы компании. Первый акционер получил 1500 рублей и 1/10 оставшихся доходов, второй — 3000 рублей и 1/10 остатка, третий — 4500 рублей и 1/10 остатка и так далее. Оказалось, что все акционеры поделили доходы поровну. Сколько рублей получил каждый акционер?

Задача 9.2. В компьютерной игре у персонажа четыре характеристики: сила, ловкость, интеллект и харизма. Изначально каждая характеристика равна 10, и у игрока есть еще 25 очков, которые он должен полностью распределить между характеристиками (одно очко — одна единица характеристики). Эффективность персонажа вычисляется по формуле:

$$\text{сила} \times \text{ловкость} + \text{ловкость} \times \text{интеллект} + \text{интеллект} \times \text{харизма} + \text{харизма} \times \text{сила}$$

(a) (3 балла) Найдите наименьшую возможную эффективность персонажа.
(b) (4 балла) Найдите наибольшую возможную эффективность персонажа.

Вариант 9.2.2. В компьютерной игре у персонажа четыре характеристики: сила, ловкость, интеллект и харизма. Изначально каждая характеристика равна 10, и у игрока есть еще 35 очков, которые он должен полностью распределить между характеристиками (одно очко — одна единица характеристики). Эффективность персонажа вычисляется по формуле:

$$\text{сила} \times \text{ловкость} + \text{ловкость} \times \text{интеллект} + \text{интеллект} \times \text{харизма} + \text{харизма} \times \text{сила}$$

(a) (3 балла) Найдите наименьшую возможную эффективность персонажа.
(b) (4 балла) Найдите наибольшую возможную эффективность персонажа.

Вариант 9.2.3. В компьютерной игре у персонажа четыре характеристики: сила, ловкость, интеллект и харизма. Изначально каждая характеристика равны 20, и у игрока есть еще 25 очков, которые он должен полностью распределить между характеристиками (одно очко — одна единица характеристики). Эффективность персонажа вычисляется по формуле:

$$\text{сила} \times \text{ловкость} + \text{ловкость} \times \text{интеллект} + \text{интеллект} \times \text{харизма} + \text{харизма} \times \text{сила}$$

(a) (3 балла) Найдите наименьшую возможную эффективность персонажа.
(b) (4 балла) Найдите наибольшую возможную эффективность персонажа.

Вариант 9.2.4. В компьютерной игре у персонажа четыре характеристики: сила, ловкость, интеллект и харизма. Изначально каждая характеристика равны 20, и у игрока есть еще 35 очков, которые он должен полностью распределить между характеристиками (одно очко — одна единица характеристики). Эффективность персонажа вычисляется по формуле:

$$\text{сила} \times \text{ловкость} + \text{ловкость} \times \text{интеллект} + \text{интеллект} \times \text{харизма} + \text{харизма} \times \text{сила}$$

(a) (3 балла) Найдите наименьшую возможную эффективность персонажа.
(b) (4 балла) Найдите наибольшую возможную эффективность персонажа.

Задача 9.3. По кругу стоят 15 мальчиков и 26 девочек. Известно, что ровно у 19 человек оба соседа — девочки. У какого количества человек оба соседа — мальчики?

Вариант 9.3.2. По кругу стоят 15 мальчиков и 26 девочек. Известно, что ровно у 20 человек оба соседа — девочки. У какого количества человек оба соседа — мальчики?

Вариант 9.3.3. По кругу стоят 16 мальчиков и 25 девочек. Известно, что ровно у 20 человек оба соседа — девочки. У какого количества человек оба соседа — мальчики?

Вариант 9.3.4. По кругу стоят 16 мальчиков и 25 девочек. Известно, что ровно у 21 человек оба соседа — девочки. У какого количества человек оба соседа — мальчики?

Задача 9.4. На диагонали AC и стороне CD квадрата $ABCD$ выбрали точки M и N соответственно так, что $MN = MD$. Найдите, чему равна длина отрезка CN, если $MN = 10$, $AB = 14$.

Вариант 9.4.2. На диагонали AC и стороне CD квадрата $ABCD$ выбрали точки M и N соответственно так, что $MN = MD$. Найдите, чему равна длина отрезка CN, если $MN = 20$, $AB = 28$.

Вариант 9.4.3. На диагонали AC и стороне CD квадрата $ABCD$ выбрали точки M и N соответственно так, что $MN = MD$. Найдите, чему равна длина отрезка CN, если $MN = 15$, $AB = 21$.

Вариант 9.4.4. На диагонали AC и стороне CD квадрата $ABCD$ выбрали точки M и N соответственно так, что $MN = MD$. Найдите, чему равна длина отрезка CN, если $MN = 30$, $AB = 42$.

Задача 9.5. Объем аккумулятора рации — натуральное число условных единиц. На каждое включение рации тратится натуральное число у.е., и каждые 10 минут работы рации отнимают некоторое натуральное число у.е. При выключении рации аккумулятор не расходуется. Известно, что если сеансы связи длятся по 10 минут, то аккумулятор сядет во время 40-го сеанса, а если по 20 минут — то во время 26-го. Найдите наименьший возможный заряд аккумулятора.

«Аккумулятор сел во время сеанса» означает, что сеанс связи начался, шел некоторое время, но аккумулятор сел до того момента, как сеанс успел закончиться.

Вариант 9.5.2. Объем аккумулятора рации — натуральное число условных единиц. На каждое включение рации тратится натуральное число у.е., и каждые 10 минут работы рации отнимают некоторое натуральное число у.е. При выключении рации аккумулятор не расходуется. Известно, что если сеансы связи длятся по 10 минут, то аккумулятор сядет во время 64-го сеанса, а если по 20 минут — то во время 38-го. Найдите наименьший возможный заряд аккумулятора.

«Аккумулятор сел во время сеанса» означает, что сеанс связи начался, шел некоторое время, но аккумулятор сел до того момента, как сеанс успел закончиться.

Вариант 9.5.3. Объем аккумулятора рации — натуральное число условных единиц. На каждое включение рации тратится натуральное число у.е., и каждые 10 минут работы рации отнимают некоторое натуральное число у.е. При выключении рации аккумулятор не расходуется. Известно, что если сеансы связи длятся по 10 минут, то аккумулятор сядет во время 44-го сеанса, а если по 20 минут — то во время 28-го. Найдите наименьший возможный заряд аккумулятора.

«Аккумулятор сел во время сеанса» означает, что сеанс связи начался, шел некоторое время, но аккумулятор сел до того момента, как сеанс успел закончиться.

Вариант 9.5.4. Объем аккумулятора рации — натуральное число условных единиц. На каждое включение рации тратится натуральное число у.е., и каждые 10 минут работы рации отнимают некоторое натуральное число у.е. При выключении рации аккумулятор не расходуется. Известно, что если сеансы связи длятся по 10 минут, то аккумулятор сядет во время 37-го сеанса, а если по 20 минут — то во время 24-го. Найдите наименьший возможный заряд аккумулятора.

«Аккумулятор сел во время сеанса» означает, что сеанс связи начался, шел некоторое время, но аккумулятор сел до того момента, как сеанс успел закончиться.

Задача 9.6. Леша хочет выписать на доске несколько натуральных чисел от 1 до 321 так, чтобы никакие два числа не отличались ровно на 11.

(а) (2 балла) Какое наибольшее количество чисел он сможет выписать?

(б) (5 баллов) Сколько способов выписать наибольшее возможное количество чисел?

Вариант 9.6.2. Леша хочет выписать на доске несколько натуральных чисел от 1 до 343 так, чтобы никакие два числа не отличались ровно на 11.

(а) (2 балла) Какое наибольшее количество чисел он сможет выписать?

(б) (5 баллов) Сколько способов выписать наибольшее возможное количество чисел?

Вариант 9.6.3. Леша хочет выписать на доске несколько натуральных чисел от 1 до 365 так, чтобы никакие два числа не отличались ровно на 11.

(а) (2 балла) Какое наибольшее количество чисел он сможет выписать?

(б) (5 баллов) Сколько способов выписать наибольшее возможное количество чисел?

Вариант 9.6.4. Леша хочет выписать на доске несколько натуральных чисел от 1 до 387 так, чтобы никакие два числа не отличались ровно на 11.

(а) (2 балла) Какое наибольшее количество чисел он сможет выписать?

(б) (5 баллов) Сколько способов выписать наибольшее возможное количество чисел?

Задача 9.7. **(а)** (2 балла) Клетки таблицы 11×10 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом квадрате 2×2 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

(б) (5 баллов) Клетки таблицы 11×10 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×4 и 4×1 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

Вариант 9.7.2. **(а)** (2 балла) Клетки таблицы 11×14 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом квадрате 2×2 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

(б) (5 баллов) Клетки таблицы 11×14 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×4 и 4×1 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

Вариант 9.7.3. **(а)** (2 балла) Клетки таблицы 15×10 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом квадрате 2×2 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

(б) (5 баллов) Клетки таблицы 15×10 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×4 и 4×1 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

Вариант 9.7.4. **(а)** (2 балла) Клетки таблицы 15×14 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом квадрате 2×2 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

(б) (5 баллов) Клетки таблицы 15×14 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×4 и 4×1 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

Задача 9.8. Два равных прямоугольника $ABCX$ и $DEFX$ расположены так, как на рисунке. Найдите расстояние от середины отрезка AF до центра описанной окружности треугольника XCD, если известно, что $CD = 5$.

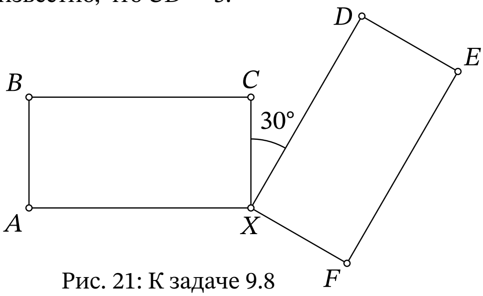

Рис. 21: К задаче 9.8

Вариант 9.8.2. Два равных прямоугольника $ABCX$ и $DEFX$ расположены так, как на рисунке. Найдите расстояние от середины отрезка AF до центра описанной окружности треугольника XCD, если известно, что $CD = 9$.

Вариант 9.8.3. Два равных прямоугольника $ABCX$ и $DEFX$ расположены так, как на рисунке. Найдите расстояние от середины отрезка AF до центра описанной окружности треугольника XCD, если известно, что $CD = 13$.

Вариант 9.8.4. Два равных прямоугольника $ABCX$ и $DEFX$ расположены так, как на рисунке. Найдите расстояние от середины отрезка AF до центра описанной окружности треугольника XCD, если известно, что $CD = 15$.