Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике

г. Москва, 3-5 декабря 2025 г.

Задания

Каждое задание 7 баллов.

11 класс

Задача 11.1. Найдите натуральное x такое, что $x^x = 2^{2^{11}}$.

Вариант 11.1.2. Найдите натуральное x такое, что $x^x = 2^{2^6}$.

Вариант 11.1.3. Найдите натуральное x такое, что $x^x = 3^{3^4}$.

Вариант 11.1.4. Найдите натуральное x такое, что $x^x = 5^{5^6}$.

Задача 11.2. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 10$, $BC = 12$ отметили точку M — середину стороны CD. На отрезке BM отметили точку P так, что $BC = BP$. Найдите площадь четырехугольника $ABPD$.

Вариант 11.2.2. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 16, BC = 15$ отметили точку M — середину стороны CD. На отрезке BM отметили точку P так, что $BC = BP$. Найдите площадь четырехугольника $ABPD$.

Вариант 11.2.3. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 12$, $BC = 8$ отметили точку M — середину стороны CD. На отрезке BM отметили точку P так, что $BC = BP$. Найдите площадь четырехугольника $ABPD$.

Вариант 11.2.4. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 18, BC = 12$ отметили точку M — середину стороны CD. На отрезке BM отметили точку P так, что $BC = BP$. Найдите площадь четырехугольника $ABPD$.

Задача 11.3. Петя случайно выбирает натуральное число d от 1 до 5 (вероятность выбрать каждое равна $1/5$). Затем Петя случайно выбирает натуральное число a от 1 до 1300 (вероятность выбрать каждое равна $1/1300$). Найдите вероятность того, что один из членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d будет равен 1825.

Вариант 11.3.2. Петя случайно выбирает натуральное число d от 1 до 5 (вероятность выбрать каждое равна $1/5$). Затем Петя случайно выбирает натуральное число a от 1 до 1400 (вероятность выбрать каждое равна $1/1400$). Найдите вероятность того, что один из членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d будет равен 1825.

Вариант 11.3.3. Петя случайно выбирает натуральное число d от 1 до 5 (вероятность выбрать каждое равна $1/5$). Затем Петя случайно выбирает натуральное число a от 1 до 1600 (вероятность выбрать каждое равна $1/1600$). Найдите вероятность того, что один из членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d будет равен 1825.

Вариант 11.3.4. Петя случайно выбирает натуральное число d от 1 до 5 (вероятность выбрать каждое равна $1/5$). Затем Петя случайно выбирает натуральное число a от 1 до 1700 (вероятность выбрать каждое равна $1/1700$). Найдите вероятность того, что один из членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d будет равен 1825.

Задача 11.4. У Пети есть натуральное число N. Он рассматривает все пары цифр числа N, одна из которых четная, а другая нечетная, и записывает на доску произведение цифр в каждой паре.

Например, если бы у него было число 2338, то на доске были бы записаны числа 6, 6, 24 и 24.

Оказалось, что сумма чисел на доске равна 26. Какое минимальное N могло быть у Пети?

Вариант 11.4.2. У Пети есть натуральное число N. Он рассматривает все пары цифр числа N, одна из которых четная, а другая нечетная, и записывает на доску произведение цифр в каждой паре.

Например, если бы у него было число 2338, то на доске были бы записаны числа 6, 6, 24 и 24.

Оказалось, что сумма чисел на доске равна 34. Какое минимальное N могло быть у Пети?

Вариант 11.4.3. У Пети есть натуральное число N. Он рассматривает все пары цифр числа N, одна из которых четная, а другая нечетная, и записывает на доску произведение цифр в каждой паре.

Например, если бы у него было число 2338, то на доске были бы записаны числа 6, 6, 24 и 24.

Оказалось, что сумма чисел на доске равна 22. Какое минимальное N могло быть у Пети?

Вариант 11.4.4. У Пети есть натуральное число N. Он рассматривает все пары цифр числа N, одна из которых четная, а другая нечетная, и записывает на доску произведение цифр в каждой паре.

Например, если бы у него было число 2338, то на доске были бы записаны числа 6, 6, 24 и 24.

Оказалось, что сумма чисел на доске равна 38. Какое минимальное N могло быть у Пети?

Задача 11.5. Рассмотрим правильную десятиугольную призму $A_1A_2\ldots A_{10}B_1B_2\ldots B_{10}$. Найдите количество прямых, проходящих через две вершины этой призмы и скрещивающихся с диагональю A_1B_6.

Вариант 11.5.2. Рассмотрим правильную двенадцатиугольную призму $A_1A_2\ldots A_{12}B_1B_2\ldots B_{12}$. Найдите количество прямых, проходящих через две вершины этой призмы и скрещивающихся с диагональю A_1B_7.

Вариант 11.5.3. Рассмотрим правильную четырнадцатиугольную призму $A_1A_2\ldots A_{14}B_1B_2\ldots B_{14}$. Найдите количество прямых, проходящих через две вершины этой призмы и скрещивающихся с диагональю A_1B_8.

Вариант 11.5.4. Рассмотрим правильную шестнадцатиугольную призму $A_1A_2\ldots A_{16}B_1B_2\ldots B_{16}$. Найдите количество прямых, проходящих через две вершины этой призмы и скрещивающихся с диагональю A_1B_9.

Задача 11.6. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве действительных значений и принимают действительные значения. Также известно, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, при этом значения функций $f(x)$ и $\frac{1}{2}x$ во всех точках отличаются меньше чем на 5. Уравнение $g(x) = 25 - x^2$ имеет целый корень. Найдите все возможные значения этого корня.

Напомним, что функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на множестве действительных значений и принимающие действительные значения, являются взаимно обратными, если $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ для всех действительных x.

Вариант 11.6.2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве действительных значений и принимают действительные значения. Также известно, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, при этом значения функций $f(x)$ и $\frac{1}{2}x$ во всех точках отличаются меньше чем на 6. Уравнение $g(x) = 36 - x^2$ имеет целый корень. Найдите все возможные значения этого корня.

Напомним, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными, если $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ для всех действительных x.

Вариант 11.6.3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве действительных значений и принимают действительные значения. Также известно, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, при этом значения функций $f(x)$ и $\frac{1}{2}x$ во всех точках отличаются меньше чем на 7. Уравнение $g(x) = 49 - x^2$ имеет целый корень. Найдите все возможные значения этого корня.

Напомним, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными, если $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ для всех действительных x.

Вариант 11.6.4. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве действительных значений и принимают действительные значения. Также известно, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, при этом значения функций $f(x)$ и $\frac{1}{2}x$ во всех точках отличаются меньше чем на 8. Уравнение $g(x) = 64 - x^2$ имеет целый корень. Найдите все возможные значения этого корня.

Напомним, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными, если $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ для всех действительных x.

Задача 11.7. В остроугольном треугольнике провели высоту BH. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B, отметили такую точку X такую, что $BX = BC$. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если $AB = 7$, $AC = 10$, $AH = 3$.

Вариант 11.7.2. В остроугольном треугольнике провели высоту BH. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B, отметили такую точку X такую, что $BX = BC$. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если $AB = 8$, $AC = 10$, $AH = 3$.

Вариант 11.7.3. В остроугольном треугольнике провели высоту BH. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B, отметили такую точку X такую, что $BX = BC$. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если $AB = 9$, $AC = 10$, $AH = 3$.

Вариант 11.7.4. В остроугольном треугольнике провели высоту BH. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B, отметили такую точку X такую, что $BX = BC$. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если $AB = 11$, $AC = 10$, $AH = 3$..

Задача 11.8. Петя и Вася играют в следующую игру. На доске 5×5 в каждой клетке лежит по n конфет. Петя и Вася по очереди, начиная с Пети, выбирают непустую клетку и съедают из неё несколько конфет. При этом из угловых клеток разрешается съедать не более двух конфет, из клеток, имеющих 3 соседа по стороне, — не более 3 конфет, из всех остальных — не более 5 конфет. Игрок, после чьего хода появляется пустая строка или пустой столбец, побеждает. Для скольких n в диапазоне от 1 до 1000 у Пети есть выигрышная стратегия?

Вариант 11.8.2. Петя и Вася играют в следующую игру. На доске 5×5 в каждой клетке лежит по n конфет. Петя и Вася по очереди, начиная с Пети, выбирают непустую клетку и съедают из неё несколько конфет. При этом из угловых клеток разрешается съедать не более двух конфет, из клеток, имеющих 3 соседа по стороне, — не более 3 конфет, из всех остальных — не более 5 конфет. Игрок, после чьего хода появляется пустая строка или пустой столбец, побеждает. Для скольких n в диапазоне от 1 до 1600 у Пети есть выигрышная стратегия?

Вариант 11.8.3. Петя и Вася играют в следующую игру. На доске 5×5 в каждой клетке лежит по n конфет. Петя и Вася по очереди, начиная с Пети, выбирают непустую клетку и съедают из неё несколько конфет. При этом из угловых клеток разрешается съедать не более двух конфет, из клеток, имеющих 3 соседа по стороне, — не более 3 конфет, из всех остальных — не более 5 конфет. Игрок, после чьего хода появляется пустая строка или пустой столбец, побеждает. Для скольких n в диапазоне от 1 до 2000 у Пети есть выигрышная стратегия?

Вариант 11.8.4. Петя и Вася играют в следующую игру. На доске 5×5 в каждой клетке лежит по n конфет. Петя и Вася по очереди, начиная с Пети, выбирают непустую клетку и съедают из неё несколько конфет. При этом из угловых клеток разрешается съедать не более двух конфет, из клеток, имеющих 3 соседа по стороне, — не более 3 конфет, из всех остальных — не более 5 конфет. Игрок, после чьего хода появляется пустая строка или пустой столбец, побеждает. Для скольких n в диапазоне от 1 до 1400 у Пети есть выигрышная стратегия?