

Муниципальный этап  
Всероссийской олимпиады школьников  
по математике

г. Москва, 3-5 декабря 2025 г.

**Задания**

Каждое задание 7 баллов.

## 10 класс

**Задача 10.1.** Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит  $2n$  членов. Известно, что разность суммы последних  $n$  и суммы первых  $n$  членов равна 450. Укажите все возможные значения  $n$ , если известно, что  $n > 1$ .

*Вариант 10.1.2.* Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит  $2n$  членов. Известно, что разность суммы последних  $n$  и суммы первых  $n$  членов равна 882. Укажите все возможные значения  $n$ , если известно, что  $n > 1$ .

*Вариант 10.1.3.* Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит  $2n$  членов. Известно, что разность суммы последних  $n$  и суммы первых  $n$  членов равна 2450. Укажите все возможные значения  $n$ , если известно, что  $n > 1$ .

*Вариант 10.1.4.* Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит  $2n$  членов. Известно, что разность суммы последних  $n$  и суммы первых  $n$  членов равна 2178. Укажите все возможные значения  $n$ , если известно, что  $n > 1$ .

**Задача 10.2.** На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение  $(\dots (((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \dots) \star 2024$

*Вариант 10.2.2.* На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение  $(\dots (((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \dots) \star 2022$

*Вариант 10.2.3.* На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение  $(\dots (((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \dots) \star 2026$

*Вариант 10.2.4.* На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение  $(\dots (((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \dots) \star 2028$

**Задача 10.3.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоту  $AD$ . Вписанные окружности треугольников  $ABD$  и  $ACD$  касаются  $AD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно и касаются  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Пусть прямые  $PX$  и  $QY$  пересекаются в точке  $Z$ . Найдите площадь треугольника  $XYZ$ , если известно, что  $BC = 22$ ,  $AD = 12$  а периметр треугольника  $ABC$  равен 56.

*Вариант 10.3.2.* В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоту  $AD$ . Вписанные окружности треугольников  $ABD$  и  $ACD$  касаются  $AD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно и касаются  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Пусть прямые  $PX$  и  $QY$  пересекаются в точке  $Z$ . Найдите площадь треугольника  $XYZ$ , если известно, что  $BC = 48$ ,  $AD = 28$  а периметр треугольника  $ABC$  равен 124.

*Вариант 10.3.3.* В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоту  $AD$ . Вписанные окружности треугольников  $ABD$  и  $ACD$  касаются  $AD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно и касаются  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Пусть прямые  $PX$  и  $QY$  пересекаются в точке  $Z$ . Найдите площадь треугольника  $XYZ$ , если известно, что  $BC = 36$ ,  $AD = 28$  а периметр треугольника  $ABC$  равен 108.

*Вариант 10.3.4.* В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоту  $AD$ . Вписанные окружности треугольников  $ABD$  и  $ACD$  касаются  $AD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно и касаются  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Пусть прямые  $PX$  и  $QY$  пересекаются в точке  $Z$ . Найдите площадь треугольника  $XYZ$ , если известно, что  $BC = 20$ ,  $AD = 28$  а периметр треугольника  $ABC$  равен 80.

**Задача 10.4.** Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 81% учеников знает C++ и 62% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть  $a$  — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.

- (а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение  $a$ ?  
(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение  $a$ ?

*Вариант 10.4.2.* Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 82% учеников знает C++ и 62% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть  $a$  — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.

- (а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение  $a$ ?  
(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение  $a$ ?

*Вариант 10.4.3.* Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 81% учеников знает C++ и 59% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть  $a$  — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.

- (а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение  $a$ ?  
(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение  $a$ ?

*Вариант 10.4.4.* Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 82% учеников знает C++ и 59% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть  $a$  — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.

- (а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение  $a$ ?  
(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение  $a$ ?

**Задача 10.5.** Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  на стороне  $AD$  отметили такую точку  $X$ , что  $AX = CD$  и  $\angle BXD = \angle CDA$ . Найдите  $BX$ , если известно, что  $AB = 8$ ,  $BC = 10$ ,  $CD = 3$ .

*Вариант 10.5.2.* Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  на стороне  $AD$  отметили такую точку  $X$ , что  $AX = CD$  и  $\angle BXD = \angle CDA$ . Найдите  $BX$ , если известно, что  $AB = 10$ ,  $BC = 6$ ,  $CD = 4$ .

*Вариант 10.5.3.* Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  на стороне  $AD$  отметили такую точку  $X$ , что  $AX = CD$  и  $\angle BXD = \angle CDA$ . Найдите  $BX$ , если известно, что  $AB = 6$ ,  $BC = 9$ ,  $CD = 3$ .

*Вариант 10.5.4.* Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  на стороне  $AD$  отметили такую точку  $X$ , что  $AX = CD$  и  $\angle BXD = \angle CDA$ . Найдите  $BX$ , если известно, что  $AB = 10$ ,  $BC = 7$ ,  $CD = 5$ .

**Задача 10.6.** При каком наименьшем  $n$  во все клетки таблицы  $4 \times 10$  можно расставить некоторые из чисел от 1 до  $n$ , каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

*Вариант 10.6.2.* При каком наименьшем  $n$  во все клетки таблицы  $4 \times 11$  можно расставить некоторые из чисел от 1 до  $n$ , каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

*Вариант 10.6.3.* При каком наименьшем  $n$  во все клетки таблицы  $4 \times 12$  можно расставить некоторые из чисел от 1 до  $n$ , каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

*Вариант 10.6.4.* При каком наименьшем  $n$  во все клетки таблицы  $4 \times 13$  можно расставить некоторые из чисел от 1 до  $n$ , каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

**Задача 10.7.** У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером  $n$  и ставит её непосредственно справа от книги с номером  $m$ , где  $m$  — наибольший собственный делитель  $n$ . Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

(а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 33?

(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 33?

*Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.*

*Вариант 10.7.2.* У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером  $n$  и ставит её непосредственно справа от книги с номером  $m$ , где  $m$  — наибольший собственный делитель  $n$ . Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

- (а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 39?  
(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 39?

*Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.*

*Вариант 10.7.3.* У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером  $n$  и ставит её непосредственно справа от книги с номером  $m$ , где  $m$  — наибольший собственный делитель  $n$ . Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

- (а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 51?  
(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 51?

*Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.*

*Вариант 10.7.4.* У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером  $n$  и ставит её непосредственно справа от книги с номером  $m$ , где  $m$  — наибольший собственный делитель  $n$ . Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

- (а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 57?  
(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 57?

*Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.*

**Задача 10.8.** Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1 - 3x_1 + 3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1 - 3x_2 + 3x_2^2} + \dots + \frac{x_{101}^3}{1 - 3x_{101} + 3x_{101}^2},$$

если для всех  $i$  от 1 до 101 выполнено, что  $x_i = \frac{i}{101}$ .

*Вариант 10.8.2.* Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1 - 3x_1 + 3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1 - 3x_2 + 3x_2^2} + \dots + \frac{x_{201}^3}{1 - 3x_{201} + 3x_{201}^2},$$

если для всех  $i$  от 1 до 201 выполнено, что  $x_i = \frac{i}{201}$ .

*Вариант 10.8.3.* Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1 - 3x_1 + 3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1 - 3x_2 + 3x_2^2} + \dots + \frac{x_{301}^3}{1 - 3x_{301} + 3x_{301}^2},$$

если для всех  $i$  от 1 до 301 выполнено, что  $x_i = \frac{i}{301}$ .

*Вариант 10.8.4.* Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1 - 3x_1 + 3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1 - 3x_2 + 3x_2^2} + \dots + \frac{x_{401}^3}{1 - 3x_{401} + 3x_{401}^2},$$

если для всех  $i$  от 1 до 401 выполнено, что  $x_i = \frac{i}{401}$ .