

Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике

г. Москва, 3-5 декабря 2025 г.

Задания

Каждое задание 7 баллов.

10 класс

Задача 10.1. Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит $2n$ членов. Известно, что разность суммы последних n и суммы первых n членов равна 450. Укажите все возможные значения n , если известно, что $n > 1$.

Вариант 10.1.2. Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит $2n$ членов. Известно, что разность суммы последних n и суммы первых n членов равна 882. Укажите все возможные значения n , если известно, что $n > 1$.

Вариант 10.1.3. Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит $2n$ членов. Известно, что разность суммы последних n и суммы первых n членов равна 2450. Укажите все возможные значения n , если известно, что $n > 1$.

Вариант 10.1.4. Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит $2n$ членов. Известно, что разность суммы последних n и суммы первых n членов равна 2178. Укажите все возможные значения n , если известно, что $n > 1$.

Задача 10.2. На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение $(\dots (((((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \dots) \star 2024$

Вариант 10.2.2. На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение $(\dots (((((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \dots) \star 2022$

Вариант 10.2.3. На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение $(\dots (((((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \dots) \star 2026$

Вариант 10.2.4. На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение $(\dots (((((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \dots) \star 2028$

Задача 10.3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD . Вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются AD в точках P и Q соответственно и касаются BC в точках X и Y соответственно. Пусть прямые PX и QY пересекаются в точке Z . Найдите площадь треугольника XYZ , если известно, что $BC = 22$, $AD = 12$ а периметр треугольника ABC равен 56.

Вариант 10.3.2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD . Вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются AD в точках P и Q соответственно и касаются BC в точках X и Y соответственно. Пусть прямые PX и QY пересекаются в точке Z . Найдите площадь треугольника XYZ , если известно, что $BC = 48$, $AD = 28$ а периметр треугольника ABC равен 124.

Вариант 10.3.3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD . Вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются AD в точках P и Q соответственно и касаются BC в точках X и Y соответственно. Пусть прямые PX и QY пересекаются в точке Z . Найдите площадь треугольника XYZ , если известно, что $BC = 36$, $AD = 28$ а периметр треугольника ABC равен 108.

Вариант 10.3.4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD . Вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются AD в точках P и Q соответственно и касаются BC в точках X и Y соответственно. Пусть прямые PX и QY пересекаются в точке Z . Найдите площадь треугольника XYZ , если известно, что $BC = 20$, $AD = 28$ а периметр треугольника ABC равен 80.

Задача 10.4. Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 81% учеников знает C++ и 62% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть a — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.

(а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение a ?

(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение a ?

Вариант 10.4.2. Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 82% учеников знает C++ и 62% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть a — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.

(а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение a ?

(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение a ?

Вариант 10.4.3. Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 81% учеников знает C++ и 59% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть a — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.

(а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение a ?

(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение a ?

Вариант 10.4.4. Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 82% учеников знает C++ и 59% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть a — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.

(а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение a ?

(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение a ?

Задача 10.5. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD отметили такую точку X , что $AX = CD$ и $\angle BXD = \angle CDA$. Найдите BX , если известно, что $AB = 8$, $BC = 10$, $CD = 3$.

Вариант 10.5.2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD отметили такую точку X , что $AX = CD$ и $\angle BXD = \angle CDA$. Найдите BX , если известно, что $AB = 10$, $BC = 6$, $CD = 4$.

Вариант 10.5.3. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD отметили такую точку X , что $AX = CD$ и $\angle BXD = \angle CDA$. Найдите BX , если известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, $CD = 3$.

Вариант 10.5.4. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD отметили такую точку X , что $AX = CD$ и $\angle BXD = \angle CDA$. Найдите BX , если известно, что $AB = 10$, $BC = 7$, $CD = 5$.

Задача 10.6. При каком наименьшем n во все клетки таблицы 4×10 можно расставить некоторые из чисел от 1 до n , каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

Вариант 10.6.2. При каком наименьшем n во все клетки таблицы 4×11 можно расставить некоторые из чисел от 1 до n , каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

Вариант 10.6.3. При каком наименьшем n во все клетки таблицы 4×12 можно расставить некоторые из чисел от 1 до n , каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

Вариант 10.6.4. При каком наименьшем n во все клетки таблицы 4×13 можно расставить некоторые из чисел от 1 до n , каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

Задача 10.7. У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером n и ставит её непосредственно справа от книги с номером m , где m — наибольший собственный делитель n . Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

(а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 33?

(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 33?

Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.

Вариант 10.7.2. У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером n и ставит её непосредственно справа от книги с номером m , где m — наибольший собственный делитель n . Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

(а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 39?

(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 39?

Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.

Вариант 10.7.3. У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером n и ставит её непосредственно справа от книги с номером m , где m — наибольший собственный делитель n . Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

(а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 51?

(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 51?

Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.

Вариант 10.7.4. У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером n и ставит её непосредственно справа от книги с номером m , где m — наибольший собственный делитель n . Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

(а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 57?

(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 57?

Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.

Задача 10.8. Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1 - 3x_1 + 3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1 - 3x_2 + 3x_2^2} + \dots + \frac{x_{101}^3}{1 - 3x_{101} + 3x_{101}^2},$$

если для всех i от 1 до 101 выполнено, что $x_i = \frac{i}{101}$.

Вариант 10.8.2. Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1 - 3x_1 + 3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1 - 3x_2 + 3x_2^2} + \dots + \frac{x_{201}^3}{1 - 3x_{201} + 3x_{201}^2},$$

если для всех i от 1 до 201 выполнено, что $x_i = \frac{i}{201}$.

Вариант 10.8.3. Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1 - 3x_1 + 3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1 - 3x_2 + 3x_2^2} + \dots + \frac{x_{301}^3}{1 - 3x_{301} + 3x_{301}^2},$$

если для всех i от 1 до 301 выполнено, что $x_i = \frac{i}{301}$.

Вариант 10.8.4. Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1 - 3x_1 + 3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1 - 3x_2 + 3x_2^2} + \dots + \frac{x_{401}^3}{1 - 3x_{401} + 3x_{401}^2},$$

если для всех i от 1 до 401 выполнено, что $x_i = \frac{i}{401}$.