9 класс

Задача 9.1. Акционеры по очереди делят доходы компании. Первый акционер получил 1000 рублей и 1/10 оставшихся доходов, второй — 2000 рублей и 1/10 остатка, третий — 3000 рублей и 1/10 остатка и так далее. Оказалось, что все акционеры поделили доходы поровну. Сколько рублей получил каждый акционер?

Ответ: 9000

Решение. Пусть S — сумма доходов компании. Тогда первый акционер получил $1000 + 0,1(S - 1000) = 0,1S + 900$ рублей. После этого осталось поделить $S - (0,1S + 900) = 0,9S - 900$ рублей. Второй акционер получил $2000 + 0,1(0,9S - 900 - 2000)$ рублей, и эта сумма совпадает с суммой, полученной первым, а значит, $0,1S + 900 = 2000 + 0,1(0,9S - 900 - 2000)$. Решая это уравнение, находим $S = 81000$. Тогда первый акционер получил $0,1 \cdot 81000 + 900 = 9000$ рублей. Нетрудно проверить, что все остальные получили столько же, как и требуется в условии. □

Вариант 9.1.2. Акционеры по очереди делят доходы компании. Первый акционер получил 500 рублей и 1/10 оставшихся доходов, второй — 1000 рублей и 1/10 остатка, третий — 1500 рублей и 1/10 остатка и так далее. Оказалось, что все акционеры поделили доходы поровну. Сколько рублей получил каждый акционер?

Ответ: 4500

Вариант 9.1.3. Акционеры по очереди делят доходы компании. Первый акционер получил 2000 рублей и 1/10 оставшихся доходов, второй — 4000 рублей и 1/10 остатка, третий — 6000 рублей и 1/10 остатка и так далее. Оказалось, что все акционеры поделили доходы поровну. Сколько рублей получил каждый акционер?

Ответ: 18000

Вариант 9.1.4. Акционеры по очереди делят доходы компании. Первый акционер получил 1500 рублей и 1/10 оставшихся доходов, второй — 3000 рублей и 1/10 остатка, третий — 4500 рублей и 1/10 остатка и так далее. Оказалось, что все акционеры поделили доходы поровну. Сколько рублей получил каждый акционер?

Ответ: 13500

Задача 9.2. В компьютерной игре у персонажа четыре характеристики: сила, ловкость, интеллект и харизма. Изначально каждая характеристика равна 10, и у игрока есть еще 25 очков, которые он должен полностью распределить между характеристиками (одно очко — одна единица характеристики). Эффективность персонажа вычисляется по формуле:

$$\text{сила} \times \text{ловкость} + \text{ловкость} \times \text{интеллект} + \text{интеллект} \times \text{харизма} + \text{харизма} \times \text{сила}$$

(a) (3 балла) Найдите наименьшую возможную эффективность персонажа.
(b) (4 балла) Найдите наибольшую возможную эффективность персонажа.

Ответ: 900, 1056

Решение. Пусть x, y, z, t - количество очков, вложенных в силу, ловкость, интеллект и харизму соответственно. Выпишем и преобразуем выражение, являющееся эффективностью: $(10+x)(10+y)+(10+y)(10+z)+(10+z)(10+t)+(10+t)(10+x) = 400+20(x+y+z+t)+xy+yz+zt+tx = 400+20\cdot 25+(x+z)(y+t) = 900+(x+z)(y+t)$. Обозначим $x+z = a$, тогда $y+t = 25-a$. Нам нужно найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(a) = a(25-a)$. Графиком функции является парабола с ветвями, смотрящими вниз, и вершиной в точке $12,5$. По смыслу задачи a - целое неотрицательное число, поэтому наибольшее значения достигается в точках 12 и 13, $f(12) = f(13) = 156$, а наименьшее — в точках 0 и 25, $f(0) = f(25) = 0$. Отсюда находим наименьшее и наибольшее значения всего выражения — 900 и $900+156 = 1056$. □

Вариант 9.2.2. В компьютерной игре у персонажа четыре характеристики: сила, ловкость, интеллект и харизма. Изначально каждая характеристика равна 10, и у игрока есть еще 35 очков, которые он должен полностью распределить между характеристиками (одно очко — одна единица характеристики). Эффективность персонажа вычисляется по формуле:

сила × ловкость + ловкость × интеллект + интеллект × харизма + харизма × сила

(a) (3 балла) Найдите наименьшую возможную эффективность персонажа.
(b) (4 балла) Найдите наибольшую возможную эффективность персонажа.

Ответ: 1100, 1406

Вариант 9.2.3. В компьютерной игре у персонажа четыре характеристики: сила, ловкость, интеллект и харизма. Изначально каждая характеристика равны 20, и у игрока есть еще 25 очков, которые он должен полностью распределить между характеристиками (одно очко — одна единица характеристики). Эффективность персонажа вычисляется по формуле:

сила × ловкость + ловкость × интеллект + интеллект × харизма + харизма × сила

(a) (3 балла) Найдите наименьшую возможную эффективность персонажа.
(b) (4 балла) Найдите наибольшую возможную эффективность персонажа.

Ответ: 2600, 2756

Вариант 9.2.4. В компьютерной игре у персонажа четыре характеристики: сила, ловкость, интеллект и харизма. Изначально каждая характеристика равны 20, и у игрока есть еще 35 очков, которые он должен полностью распределить между характеристиками (одно очко — одна единица характеристики). Эффективность персонажа вычисляется по формуле:

сила × ловкость + ловкость × интеллект + интеллект × харизма + харизма × сила

(a) (3 балла) Найдите наименьшую возможную эффективность персонажа.
(b) (4 балла) Найдите наибольшую возможную эффективность персонажа.

Ответ: 3000, 3306

Задача 9.3. По кругу стоят 15 мальчиков и 26 девочек. Известно, что ровно у 19 человек оба соседа — девочки. У какого количества человек оба соседа — мальчики?

Ответ: 8.

Решение. Для каждого человека посчитаем количество его соседей-девочек. Понятно, что при этом каждая девочка будет посчитана дважды. Значит, мы должны получить $26 \cdot 2 = 52$.

С другой стороны, у каждого человека либо 1 сосед-девочка, либо 2. Так как людей второго типа 19, то людей первого типа $52 - 19 \cdot 2 = 14$. Значит, у 14 людей есть один сосед-мальчик и один сосед-девочка.

Теперь посчитаем соседей-мальчиков двумя способами. С одной стороны, если для каждого человека просуммировать количество его соседей-мальчиков, то получится $15 \cdot 2 = 30$. С другой стороны, у 14 людей есть один сосед-мальчик. Значит, у $\frac{30-14}{2} = 8$ людей будет 2 соседа-мальчика.

$\square$

Вариант 9.3.2. По кругу стоят 15 мальчиков и 26 девочек. Известно, что ровно у 20 человек оба соседа — девочки. У какого количества человек оба соседа — мальчики?

Ответ: 9.

Вариант 9.3.3. По кругу стоят 16 мальчиков и 25 девочек. Известно, что ровно у 20 человек оба соседа — девочки. У какого количества человек оба соседа — мальчики?

Ответ: 11.

Вариант 9.3.4. По кругу стоят 16 мальчиков и 25 девочек. Известно, что ровно у 21 человек оба соседа — девочки. У какого количества человек оба соседа — мальчики?

Ответ: 12.

Задача 9.4. На диагонали AC и стороне CD квадрата $ABCD$ выбрали точки M и N соответственно так, что $MN = MD$. Найдите, чему равна длина отрезка CN, если $MN = 10$, $AB = 14$.

Ответ: 2

Решение. Обозначим $\angle ADM = \alpha$. Тогда $\angle AMD = 180^\circ - 45^\circ - \alpha = 135^\circ - \alpha$. Заметим, что треугольники ABM и ADM равны, поэтому $BM = MD$ и $\angle AMB = 135^\circ - \alpha$. Также отметим, что треугольник DMN равнобедренный, причем его угол при основании равен

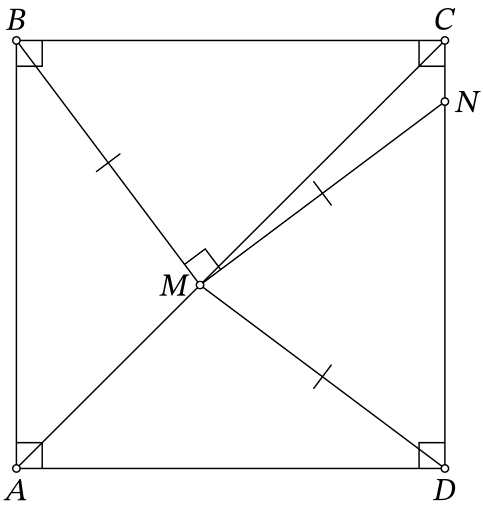

Рис. 18: К решению задачи 9.4.1

$\angle MDN = 90° - \alpha$. Это означает, что $\angle DMN = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$. Таким образом, по сумме углов при вершине M получаем, что $\angle BMN = 360° - 2(135° - \alpha) - 2\alpha = 90°$.

Поскольку треугольники BMN и BCN прямоугольные, по теореме Пифагора получаем, что

$$BM^2 + MN^2 = BN^2 = BC^2 + CN^2$$

Отсюда получаем, что $CN^2 = 10^2 + 10^2 - 14^2 = 200 - 196 = 4$, что означает, что $CN = 2$. □

Вариант 9.4.2. На диагонали AC и стороне CD квадрата $ABCD$ выбрали точки M и N соответственно так, что $MN = MD$. Найдите, чему равна длина отрезка CN, если $MN = 20$, $AB = 28$.

Ответ: 4

Вариант 9.4.3. На диагонали AC и стороне CD квадрата $ABCD$ выбрали точки M и N соответственно так, что $MN = MD$. Найдите, чему равна длина отрезка CN, если $MN = 15$, $AB = 21$.

Ответ: 3

Вариант 9.4.4. На диагонали AC и стороне CD квадрата $ABCD$ выбрали точки M и N соответственно так, что $MN = MD$. Найдите, чему равна длина отрезка CN, если $MN = 30$, $AB = 42$.

Ответ: 6

Задача 9.5. Объем аккумулятора рации — натуральное число условных единиц. На каждое включение рации тратится натуральное число у.е., и каждые 10 минут работы рации отнимают некоторое натуральное число у.е. При выключении рации аккумулятор не расходуется. Известно, что если сеансы связи длятся по 10 минут, то аккумулятор сядет во время 40-го сеанса, а если по 20 минут — то во время 26-го. Найдите наименьший возможный заряд аккумулятора.

«Аккумулятор сел во время сеанса» означает, что сеанс связи начался, шел некоторое время, но аккумулятор сел до того момента, как сеанс успел закончиться.

Ответ: 279

Решение. Пусть N - объем аккумулятора, на включение рации тратится x у.е., а на 10 минут работы — y у.е. При 10-минутных сеансах аккумулятор сел во время 40-ого сеанса, т.е. $40x + 39y < N < 40x + 40y$. При 20-минутных сеансах — во время 26-ого сеанса, т.е. $26x + 25 \cdot 2y < N < 26x + 26 \cdot 2y$. Объединяя условия этих неравенств, получаем $40x + 39y < 26x + 52y$ и $26x + 50y < 40x + 40y$, то есть $10y < 14x < 13y$. По условию x, y - целые числа. Для $y = 1, 2, 3$ в промежутках $(10; 13), (20; 26), (30, 39)$ нет чисел, кратных 14, т.е. не найдется и подходящего x. Для $y = 4$ подходит $x = 3$. Возвращаясь к неравенствам на N, получаем, что $276 < N < 280$ и $278 < N < 286$. Т.к. N - целое, то $N = 279$. Следующая подходящая пара — $x = 4, y = 5$ дает уже большее значение N, как и все последующие. □

Вариант 9.5.2. Объем аккумулятора рации — натуральное число условных единиц. На каждое включение рации тратится натуральное число у.е., и каждые 10 минут работы рации отнимают некоторое натуральное число у.е. При выключении рации аккумулятор не расходуется. Известно, что если сеансы связи длятся по 10 минут, то аккумулятор сядет во время 64-го сеанса, а если по 20 минут — то во время 38-го. Найдите наименьший возможный заряд аккумулятора.

«Аккумулятор сел во время сеанса» означает, что сеанс связи начался, шел некоторое время, но аккумулятор сел до того момента, как сеанс успел закончиться.

Ответ: 447

Вариант 9.5.3. Объем аккумулятора рации — натуральное число условных единиц. На каждое включение рации тратится натуральное число у.е., и каждые 10 минут работы рации отнимают некоторое натуральное число у.е. При выключении рации аккумулятор не расходуется. Известно, что если сеансы связи длятся по 10 минут, то аккумулятор сядет во время 44-го сеанса, а если по 20 минут — то во время 28-го. Найдите наименьший возможный заряд аккумулятора.

«Аккумулятор сел во время сеанса» означает, что сеанс связи начался, шел некоторое время, но аккумулятор сел до того момента, как сеанс успел закончиться.

Ответ: 219

Вариант 9.5.4. Объем аккумулятора рации — натуральное число условных единиц. На каждое включение рации тратится натуральное число у.е., и каждые 10 минут работы рации отнимают некоторое натуральное число у.е. При выключении рации аккумулятор не расходуется. Известно, что если сеансы связи длятся по 10 минут, то аккумулятор сядет во время 37-го сеанса, а если по 20 минут — то во время 24-го. Найдите наименьший возможный заряд аккумулятора.

«Аккумулятор сел во время сеанса» означает, что сеанс связи начался, шел некоторое время, но аккумулятор сел до того момента, как сеанс успел закончиться.

Ответ: 257

Задача 9.6. Леша хочет выписать на доске несколько натуральных чисел от 1 до 321 так, чтобы никакие два числа не отличались ровно на 11.
(а) (2 балла) Какое наибольшее количество чисел он сможет выписать?
(б) (5 баллов) Сколько способов выписать наибольшее возможное количество чисел?

Ответ: 165; 256

Решение. Разобьём все числа от 1 до 321 на несколько цепочек: первая - $1, 12, 23, \ldots, 320$ - числа с остатком 1 при делении на 11, вторая - $2, 13, 24, \ldots, 321$ - числа с остатком 2 при делении на 11, третья - $3, 14, 25, \ldots, 311$ - числа с остатком 3 при делении на 11 и т.д. до последней, одиннадцатой, - $11, 22, 33, \ldots, 319$ - делящиеся на 11. В первых двух по 30 чисел, в остальных девяти - по 29. Заметим, что числа, лежащие в разных цепочках, не могут отличаться на 11, поэтому нам достаточно выбрать наибольшее возможное количество чисел отдельно в каждой цепочке. Разобьем числа в цепочке на пары соседних (например, 1 и 12, 23 и 34, 45 и 56 и т.д.). Мы не можем выписать два соседних числа, т.к. они отличаются на 11. Тогда в цепочках с 29 числами получается 14 пар и одно число без пары, т.е. мы можем выбрать не более 15 чисел. В цепочках с 30 числами — 15 пар и мы тоже можем выбрать не более 15 чисел. Значит, всего мы можем выбрать не более $11 \cdot 15 = 165$ чисел. Это можно сделать, если во всех цепочках брать числа, стоящие через одно, начиная с первого.
Посчитаем теперь количество способов выписать 156 чисел. В цепочках с 29 числами 15 чисел можно выписать ровно одним способом. Цепочки с 30 числами мы разбили на 15 пар. Если в какой-то паре мы выписали большее число, то во всех последующих парах мы обязаны выписать тоже большее число. Выбрать пару, в которой выписано большее число мы можем 16 способами (15 пар + вариант, когда во всех парах выписано меньшее число), значит выписать 15 чисел из такой цепочки мы можем 16 способами. Цепочек с 30 чисалми две, значит всего вариантов $16 \cdot 16 = 256$.

□

Вариант 9.6.2. Леша хочет выписать на доске несколько натуральных чисел от 1 до 343 так, чтобы никакие два числа не отличались ровно на 11.
(а) (2 балла) Какое наибольшее количество чисел он сможет выписать?
(б) (5 баллов) Сколько способов выписать наибольшее возможное количество чисел?

Ответ: 176; 289

Вариант 9.6.3. Леша хочет выписать на доске несколько натуральных чисел от 1 до 365 так, чтобы никакие два числа не отличались ровно на 11.

(а) (2 балла) Какое наибольшее количество чисел он сможет выписать?

(б) (5 баллов) Сколько способов выписать наибольшее возможное количество чисел?

Ответ: 187; 324

Вариант 9.6.4. Леша хочет выписать на доске несколько натуральных чисел от 1 до 387 так, чтобы никакие два числа не отличались ровно на 11.

(а) (2 балла) Какое наибольшее количество чисел он сможет выписать?

(б) (5 баллов) Сколько способов выписать наибольшее возможное количество чисел?

Ответ: 198; 361

Задача 9.7. **(а)** (2 балла) Клетки таблицы 11×10 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом квадрате 2×2 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

(б) (5 баллов) Клетки таблицы 11×10 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×4 и 4×1 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

Ответ: **(а)** 60. **(б)** 56

Решение. **(а)** Заметим, что в каждом квадрате 2×2 есть не более двух клеток первого цвета. Разобьём всю доску кроме нижней горизонтали на квадратики 2×2. Получим, что клеток первого цвета не более $10 + \frac{100}{2} = 60$.

На рисунке 19 изображен пример на 60 клеток первого цвета.

(б) Разобьём всю доску кроме двух клеток на прямоугольники 1×4. В каждом из них не более двух клеток первого цвета, а прямоугольников всего 27. Значит, клеток первого цвета не более $27 \cdot 2 + 2 = 56$.

Пример, когда клеток первого цвета ровно 50 получается из диагональной раскраски в 4 цвета, где два цвета объединены (см. рисунок 20).

□

Вариант 9.7.2. **(а)** (2 балла) Клетки таблицы 11×14 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом квадрате 2×2 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

(б) (5 баллов) Клетки таблицы 11×14 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×4 и 4×1 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1

Рис. 19: К решению задачи 9.7.1 а)

2	1	1	3	2	1	1	3	2	1	1
1	1	3	2	1	1	3	2	1	1	3
1	3	2	1	1	3	2	1	1	3	2
3	2	1	1	3	2	1	1	3	2	1
2	1	1	3	2	1	1	3	2	1	1
1	1	3	2	1	1	3	2	1	1	3
1	3	2	1	1	3	2	1	1	3	2
3	2	1	1	3	2	1	1	3	2	1
2	1	1	3	2	1	1	3	2	1	1
1	1	3	2	1	1	3	2	1	1	3

Рис. 20: К решению задачи 9.7.1 б)

Ответ: **(а)** 84. **(б)** 78

Вариант 9.7.3. **(а)** (2 балла) Клетки таблицы 15×10 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом квадрате 2×2 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

(б) (5 баллов) Клетки таблицы 15×10 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×4 и 4×1 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

Ответ: **(а)** 80. **(б)** 76

Вариант 9.7.4. **(а)** (2 балла) Клетки таблицы 15×14 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом квадрате 2×2 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

(б) (5 баллов) Клетки таблицы 15×14 раскрасили в 3 цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×4 и 4×1 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток первого цвета может быть?

Ответ: **(а)** 112. **(б)** 106

Задача 9.8. Два равных прямоугольника $ABCX$ и $DEFX$ расположены так, как на рисунке. Найдите расстояние от середины отрезка AF до центра описанной окружности треугольника XCD, если известно, что $CD = 5$.

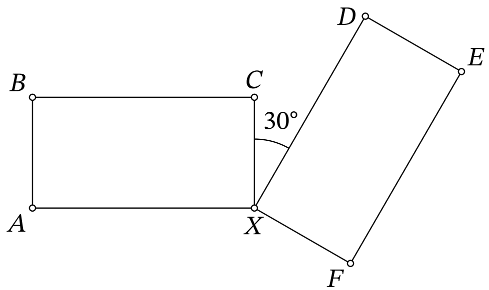

Рис. 21: К задаче 9.8

Ответ: 7.5

Решение. Отметим центр O описанной окружности треугольника XCD и середину M отрезка AF. Докажем, что точки O, X и M лежат на одной прямой.

Отразим точку X от точки M и получим точку S. Заметим, что четырёхугольник $AXSF$ является параллелограммом. Треугольники AXS и XDC равны, поскольку $AX = XD$, $AS = XF = CX$ и $\angle XAS = 180° - \angle AXF = \angle XCD$.

Обозначим $\angle AXS = \alpha$, Тогда $\angle CDX = \alpha$. Поскольку O — центр описанной окружности XCD, то $\angle COX = 2\alpha$, и из-за равнобедренности треугольника COX получаем, что $\angle OXC = 90° - \alpha$. Отсюда следует, что O, M, X лежат на одной прямой. Также заметим, что $MX = \frac{1}{2}CD$. Поскольку $\angle CXD = 30°$, то $\angle COD = 60°$, и треугольник COD оказывается равнобедренным. Таким образом, $OX = CO = CD$.

Итого получаем, что $OM = OX + NX = \frac{3}{2}CD = 7.5$.

□

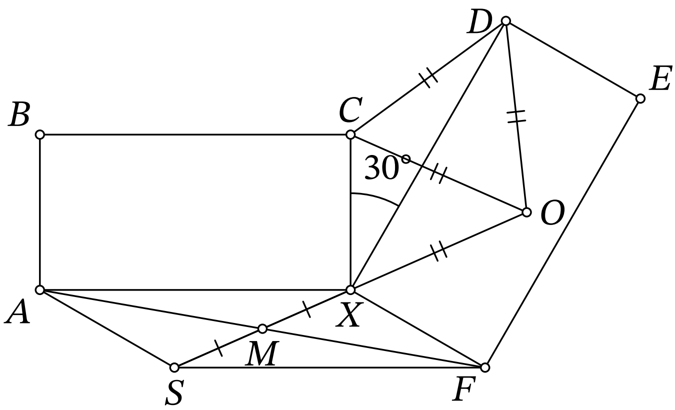

Рис. 22: К решению задачи 9.8

Вариант 9.8.2. Два равных прямоугольника $ABCX$ и $DEFX$ расположены так, как на рисунке. Найдите расстояние от середины отрезка AF до центра описанной окружности треугольника XCD, если известно, что $CD = 9$.

Ответ: 13.5

Вариант 9.8.3. Два равных прямоугольника $ABCX$ и $DEFX$ расположены так, как на рисунке. Найдите расстояние от середины отрезка AF до центра описанной окружности треугольника XCD, если известно, что $CD = 13$.

Ответ: 19.5

Вариант 9.8.4. Два равных прямоугольника $ABCX$ и $DEFX$ расположены так, как на рисунке. Найдите расстояние от середины отрезка AF до центра описанной окружности треугольника XCD, если известно, что $CD = 15$.

Ответ: 22.5