8 класс

Задача 8.1. На шоссе в указанном порядке расположены 5 городов: A, B, C, D, E. Для каждого из них посчитали суммарное расстояние до всех остальных городов, получились числа на картинке.

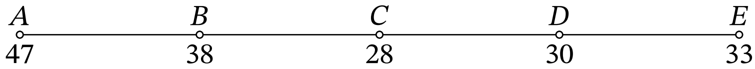

Рис. 7: К задаче 8.1.1

(а) (3 балла) Чему равно расстояние между городами A и E?
(б) (4 балла) Чему равно расстояние между городами A и B?

Ответ: а) 16 ; б) 3

Решение. Пусть расстояния AB, BC, CD, DE — это a, b, c, d соответственно. Тогда из суммарных расстояний для A и E получаем, что $47 = a+(a+b)+(a+b+c)+(a+b+c+d) = 4a + 3b + 2c + d$ и $33 = d + (d + c) + (d + c + b) + (d + c + b + a) = 4d + 3c + 2b + a$. Тогда $47 + 33 = 5a + 5b + 5c + 5d$, и расстояние между A и E равно $\frac{47+33}{5} = 16$. Из суммарного расстояния для B получаем $38 = a + b + (b + c) + (b + c + d) = a + 3b + 2c + d$. Тогда $47 - 38 = 3a$, и расстояние между A и B равно $\frac{47-38}{3} = 3$. □

Вариант 8.1.2. На шоссе в указанном порядке расположены 5 городов: A, B, C, D, E. Для каждого из них посчитали суммарное расстояние до всех остальных городов, получились числа на картинке.

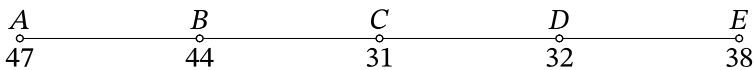

Рис. 8: К задаче 8.1.2

(а) (3 балла) Чему равно расстояние между городами A и E?
(б) (4 балла) Чему равно расстояние между городами A и B?

Ответ: а) 17 ; б) 1

Вариант 8.1.3. На шоссе в указанном порядке расположены 5 городов: A, B, C, D, E. Для каждого из них посчитали суммарное расстояние до всех остальных городов, получились числа на картинке.

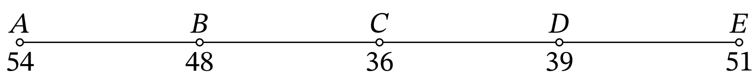

Рис. 9: К задаче 8.1.3

(а) (3 балла) Чему равно расстояние между городами A и E?
(б) (4 балла) Чему равно расстояние между городами A и B?

Ответ: а) 21 ; б) 2

Вариант 8.1.4. На шоссе в указанном порядке расположены 5 городов: A, B, C, D, E. Для каждого из них посчитали суммарное расстояние до всех остальных городов, получились числа на картинке.

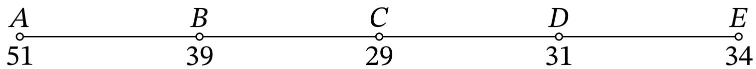

Рис. 10: К задаче 8.1.4

(а) (3 балла) Чему равно расстояние между городами A и E?
(б) (4 балла) Чему равно расстояние между городами A и B?

Ответ: а) 17 ; б) 4

Задача 8.2. На доске написано 432105. За одно действие разрешается либо поменять местами две соседние цифры в этой записи, либо заменить число, образованное двумя соседними цифрами, на число на 9 меньше, если оно неотрицательное. При этом в записи могут появиться нули в начале.

Так, например, если бы на доске было написано число 2025, за первый ход можно было бы получить записи 0225, 2205, 2052, 1125, 2016.

(а) (2 балла) Запись какого наименьшего числа можно получить (возможно, с нулями в начале)?
(б) (5 баллов) Запись какого наибольшего числа можно получить (возможно, с нулями в начале)?

Ответ: а) 6, б) 960000.

Решение. **(а)** Заметим, что при каждой операции остаток от деления на 9 у числа не изменяется. Изначально он равен 6, поэтому итоговое число будет не меньше 6. При этом 6 можно получить следующим образом:

$$432105 \to 342105 \to 252105 \to 162105 \to 072105 \to 027105 \to 018105 \to$$
$$\to 009105 \to 000105 \to 000015 \to 000006$$

(б) Заметим, что сумма цифр числа не увеличивается. Действительно, при первой операции сумма цифр не изменяется. При второй операции либо первая цифра уменьшается на 1, а вторая увеличивается на 1, либо первая цифра не изменяется, а вторая уменьшается на 9, т.е. сумма цифр либо не изменяется, либо уменьшается на 9. Таким образом, сумма цифр конечного числа не может быть больше 15, т.е. оно не может быть больше 960000.

Чтобы этого добиться, можно получить 009105 как в прошлом пункте, а затем сделать

$$009105 \to 009015 \to 009006 \to \ldots \to 960000$$

□

Вариант 8.2.2. На доске написано 432104. За одно действие разрешается либо поменять местами две соседние цифры в этой записи, либо заменить число, образованное двумя соседними цифрами, на число на 9 меньше, если оно неотрицательное. При этом в записи могут появиться нули в начале.

Так, например, если бы на доске было написано число 2025, за первый ход можно было бы получить записи 0225, 2205, 2052, 1125, 2016.

(а) (2 балла) Запись какого наименьшего числа можно получить (возможно, с нулями в начале)?
(б) (5 баллов) Запись какого наибольшего числа можно получить (возможно, с нулями в начале)?

Ответ: а) 5, б) 950000.

Вариант 8.2.3. На доске написано 432103. За одно действие разрешается либо поменять местами две соседние цифры в этой записи, либо заменить число, образованное двумя соседними цифрами, на число на 9 меньше, если оно неотрицательное. При этом в записи могут появиться нули в начале.

Так, например, если бы на доске было написано число 2025, за первый ход можно было бы получить записи 0225, 2205, 2052, 1125, 2016.

(а) (2 балла) Запись какого наименьшего числа можно получить (возможно, с нулями в начале)?
(б) (5 баллов) Запись какого наибольшего числа можно получить (возможно, с нулями в начале)?

Ответ: а) 4, б) 940000.

Вариант 8.2.4. На доске написано 432102. За одно действие разрешается либо поменять местами две соседние цифры в этой записи, либо заменить число, образованное двумя соседними цифрами, на число на 9 меньше, если оно неотрицательное. При этом в записи могут появиться нули в начале.

Так, например, если бы на доске было написано число 2025, за первый ход можно было бы получить записи 0225, 2205, 2052, 1125, 2016.

(а) (2 балла) Запись какого наименьшего числа можно получить (возможно, с нулями в начале)?

(б) (5 баллов) Запись какого наибольшего числа можно получить (возможно, с нулями в начале)?

Ответ: а) 3, б) 930000.

Задача 8.3. В треугольнике ABC отметили точки D и E — середины AB и BC соответственно. Найдите угол между прямыми, содержащими биссектрисы углов CAB и BED, если $\angle ABC = 56°$. Ответ укажите в градусах.

Напомним, что угол между прямыми — это наименьший из углов, образованных при их пересечении.

Ответ: 62°

Решение. Заметим, что прямая DE является средней линией треугольнка ABC, поэтому $DE \parallel AC$.

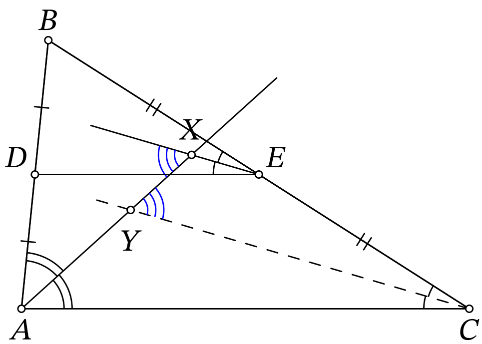

Рис. 11: К решению задачи 8.3.1

Заметим, что биссектрисы углов BED и BCA параллельны, поэтому искомый угол равен углу между биссектрисами углов BAC и BCA. Обозначим за Y точку пересечения биссектрис углов BAC и BCA. Найдем угол AYC.

$$\angle AYC = 180° - \angle CAY - \angle ACY = 180° - \frac{\angle BAC + \angle BCA}{2} =$$
$$= 180° - \frac{180° - \angle ABC}{2} = 90° + \frac{\angle ABC}{2} = 118°$$

Поскольку этот угол больше 90°, то искомый угол между прямыми равен $180° - 118° = 62°$. □

Вариант 8.3.2. В треугольнике ABC отметили точки D и E — середины AB и BC соответственно. Найдите угол между прямыми, содержащими биссектрисы углов CAB и BED, если $\angle ABC = 62°$. Ответ укажите в градусах.

Напомним, что угол между прямыми — это наименьший из углов, образованных при их пересечении.

Ответ: 59°

Вариант 8.3.3. В треугольнике ABC отметили точки D и E — середины AB и BC соответственно. Найдите угол между биссектрисами углов CAB и BED, если $\angle ABC = 68°$. Ответ укажите в градусах.

Напомним, что угол между прямыми — это наименьший из углов, образованных при их пересечении.

Ответ: 56°

Вариант 8.3.4. В треугольнике ABC отметили точки D и E — середины AB и BC соответственно. Найдите угол между прямыми, содержащими биссектрисы углов CAB и BED, если $\angle ABC = 74°$. Ответ укажите в градусах.

Напомним, что угол между прямыми — это наименьший из углов, образованных при их пересечении.

Ответ: 53°

Задача 8.4. Дед Мороз раздал подарки 17 ребятам. Во всех подарках различное ненулевое количество конфет, а любые девять ребят получили больше конфет, чем оставшиеся восемь. Какое наименьшее количество конфет мог раздать Дед Мороз?

Ответ: 1241

Решение. Пусть ребята получили $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{17}$ конфет. Если условие выполняется для девяти ребят с наименьшим количеством конфет, то оно выполняется и для любых девяти ребят, т.к. в остальных вариантах у девяти ребят сумма конфет будет больше, а у восьми меньше, чем в этом варианте, и условие снова выполнится. Итак, нам достаточно, чтобы выполнялось $a_1 + \ldots + a_9 > a_{10} + \ldots + a_{17}$.

Пусть $a_{k+1} \geqslant a_k + 2$ для какого-то $k, 1 \leqslant k \leqslant 16$. Посмотрим, что произойдёт, если мы уменьшим все числа от a_{k+1} до a_{17} на 1. Если $k \geqslant 10$, то правая часть уменьшится, а левая не изменится, т.е. неравенство все ещё будет верно. Если $k \leqslant 9$, то правая часть уменьшится на 8, а левая — не более чем на 8, т.е. неравенство тоже останется верным. При этом сумма всех чисел уменьшится, и все ребята снова получат разное количество конфет. Значит, минимальное возможное суммарное количество конфет мы получим, если числа от a_1 до a_{17} — последовательные натуральные числа. Пусть это числа $n, n+1, \ldots, n+16$. По нашему неравенству $n+(n+1)+\ldots+(n+8) > (n+9)+(n+10)+\ldots+(n+16)$, $9n+36 > 8n+100$, $n > 64$, т.е. наименьшее возможное $n = 65$. Тогда ответ — число $65+66+\ldots+81 = 1241$. □

Вариант 8.4.2. Дед Мороз раздал подарки 19 ребятам. Во всех подарках различное ненулевое количество конфет, а любые десять ребят получили больше конфет, чем оставшиеся девять. Какое наименьшее количество конфет мог раздать Дед Мороз?

Ответ: 1729

Вариант 8.4.3. Дед Мороз раздал подарки 21 ребенку. Во всех подарках различное ненулевое количество конфет, а любые одиннадцать ребят получили больше конфет, чем оставшиеся десять. Какое наименьшее количество конфет мог раздать Дед Мороз?

Ответ: 2331

Вариант 8.4.4. Дед Мороз раздал подарки 15 ребятам. Во всех подарках различное ненулевое количество конфет, а любые восемь ребят получили больше конфет, чем оставшиеся семь. Какое наименьшее количество конфет мог раздать Дед Мороз?

Ответ: 855

Задача 8.5. Целые числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2c^2 + c^2 = 2c(ab + 1)$ и $a + b + c = 800$. Чему может быть равно b? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 800, 400, 399, 266.

Решение. Преобразуем первое равенство

$$a^2 + b^2c^2 + c^2 = 2c(ab + 1)$$

$$a^2 + b^2c^2 - 2bc = 2c - c^2$$

$$(a - bc)^2 = 1 - (1 - c)^2$$

Заметим, что тогда $(1 - c)^2 \leqslant 1$, а значит, число c может равняться 0, 1 или 2.

Случай 1, $c = 0$. Тогда $(a - b)^2 = 0$, причем $a + b = 800 - 0 = 800$. Из этого следует, что $a = b = 400$.

Случай 2, $c = 1$. Тогда $(a - b)^2 = 1$, причем $a + b = 800 - 1 = 799$. Из этого следует, что либо $a = 400, b = 399$, либо $a = 399, b = 400$.

Случай 3, $c = 2$. Тогда $(a - 2b)^2 = 0$, причем $a + b = 800 - 2 = 798$. Из этого следует, что $a = 532, b = 266$.

□

Вариант 8.5.2. Целые числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2c^2+c^2 = 2c(ab+1)$ и $a+b+c = 1400$. Чему может быть равно b? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 1400, 700, 699, 466.

Вариант 8.5.3. Целые числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2c^2+c^2 = 2c(ab+1)$ и $a+b+c = 2000$. Чему может быть равно b? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 2000, 1000, 999, 666.

Вариант 8.5.4. Целые числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2c^2+c^2 = 2c(ab+1)$ и $a+b+c = 2600$. Чему может быть равно b? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 2600, 1300, 1299, 866.

Задача 8.6. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На его стороне AB отметили точку X так, что угол $\angle ABC = 4\angle ACX$. Точка M — середина стороны AC. Найдите длину отрезка BX, если известно, что $BC = 53$, $BM = 40$.

Ответ: 27

Решение. Обозначим $\angle ACX = \alpha$. Тогда, поскольку треугольник ABC равнобедренный, $\angle ABM = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{4\angle ACX}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$.

Отметим точку Y — середину отрезка AX. Тогда MY — средняя линия треугольника ACX, MY параллельна CX, $\angle AMY = \angle ACX = \alpha$. Поскольку $\angle AMB = 90°$, то $\angle BMY = 90° - \alpha$.

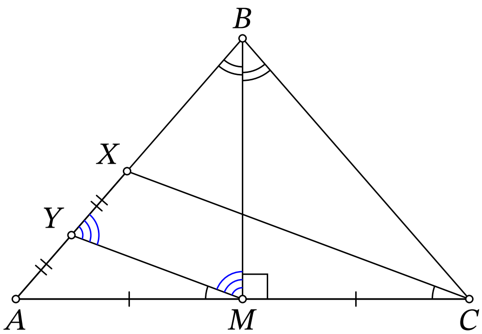

Рис. 12: К решению задачи 8.6.1

Таким образом, по сумме углов треугольника BYM, $\angle BYM = 180° - 2\alpha - (90° - \alpha) = 90° - \alpha$. Это означает, что треугольник BYM равнобедренный и $BY = BM$.

Итого, получаем, что

$$AY = AB - MB = 53 - 40 = 13,$$

что приводит нас к тому, что

$$BX = BY - XY = 40 - 13 = 27.$$

□

Вариант 8.6.2. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На его стороне AB отметили точку X так, что угол $\angle ABC = 4\angle ACX$. Точка M — середина стороны AC. Найдите длину отрезка BX, если известно, что $BC = 60$, $BM = 43$.

Ответ: 26

Вариант 8.6.3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На его стороне AB отметили точку X так, что угол $\angle ABC = 4\angle ACX$. Точка M — середина стороны AC. Найдите длину отрезка BX, если известно, что $BC = 55$, $BM = 39$.

Ответ: 23

Вариант 8.6.4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На его стороне AB отметили точку X так, что угол $\angle ABC = 4\angle ACX$. Точка M — середина стороны AC. Найдите длину отрезка BX, если известно, что $BC = 57$, $BM = 41$.

Ответ: 25

Задача 8.7. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, в которых расставлены числа, как на рисунке. За один ход можно выбрать одну из вершин сетки и увеличить числа во всех клетках с этой вершиной на 1. Леша хочет сделать несколько ходов так, чтобы все числа оказались равны.

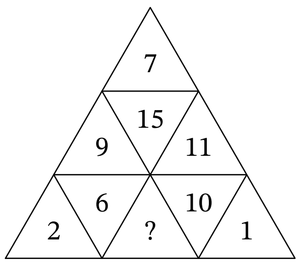

Рис. 13: К задаче 8.7.1

(а) (3 балла) Какое число должно быть записано вместо знака вопроса, чтобы он смог этого добиться?
(б) (4 балла) Какое наименьшее количество ходов ему понадобится?

Ответ: а) 11, б) 35

Решение. **(а)** Покрасим клетки в центральном шестиугольнике в красный и синий, обходя их по кругу и чередуя цвета. Заметим, что любая операция прибавляет поровну к числам в красных и синих клетках. Это означает, что если в конце все числа оказались равны, то в начале суммы чисел в красных и синих клетках должны были быть одинаковыми. Тогда число под знаком вопроса равно $6 + 15 + 10 - 9 - 11 = 11$.

(б) Посмотрим на числа в углах большого треугольника. За каждый ход к ним суммарно можно прибавить не более 1. Поскольку в одной из клеток сетки есть число 15, а числа в ходе операций не уменьшаются, то в конце все числа будут не менее 15. Изначально сумма в углах равна $2 + 7 + 1 = 10$, а в конце должна стать не менее $15 \cdot 3 = 45$. Значит, нужно сделать хотя бы $45 - 10 = 35$ операций.

При этом 35 операций хватит. В примере на рисунке 14 показано, сколько к какой вершине сетки нужно применить операций.

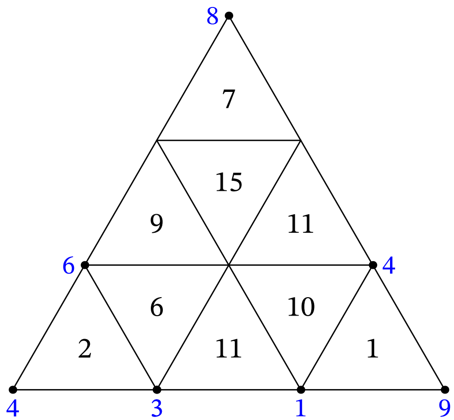

Рис. 14: К решению задачи 8.7.1

□

Вариант 8.7.2. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, в которых расставлены числа, как на рисунке. За один ход можно выбрать одну из вершин сетки и увеличить числа во всех клетках с этой вершиной на 1. Леша хочет сделать несколько ходов так, чтобы все числа оказались равны.

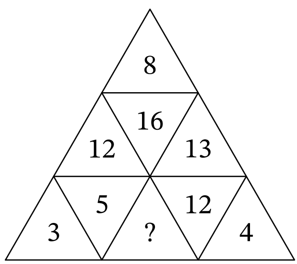

Рис. 15: К задаче 8.7.2

(а) (3 балла) Какое число должно быть записано вместо знака вопроса, чтобы он смог этого добиться?

(б) (4 балла) Какое наименьшее количество ходов ему понадобится?

Ответ: а) 8, б) 33

Вариант 8.7.3. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, в которых расставлены числа, как на рисунке. За один ход можно выбрать одну из вершин сетки и увеличить числа во всех клетках с этой вершиной на 1. Леша хочет сделать несколько ходов так, чтобы все числа оказались равны.

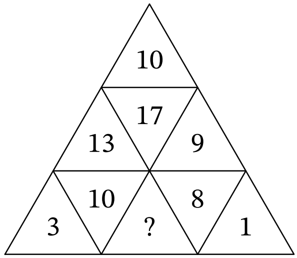

Рис. 16: К задаче 8.7.3

(а) (3 балла) Какое число должно быть записано вместо знака вопроса, чтобы он смог этого добиться?
(б) (4 балла) Какое наименьшее количество ходов ему понадобится?

Ответ: а) 13, б) 37

Вариант 8.7.4. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, в которых расставлены числа, как на рисунке. За один ход можно выбрать одну из вершин сетки и увеличить числа во всех клетках с этой вершиной на 1. Леша хочет сделать несколько ходов так, чтобы все числа оказались равны.

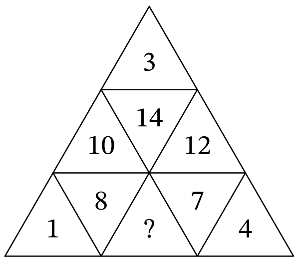

Рис. 17: К задаче 8.7.4

(а) (3 балла) Какое число должно быть записано вместо знака вопроса, чтобы он смог этого добиться?
(б) (4 балла) Какое наименьшее количество ходов ему понадобится?

Ответ: а) 7, б) 34

Задача 8.8. Карточки с натуральными числами от 1 до 20 разбили на 2 группы по 10 карточек. Назовём пару чисел $n < m$ *хорошей*, если карточка с числом n лежит в первой группе, а с числом m — во второй. Оказалось, что хороших пар ровно 37. Чему может быть равна сумма чисел на карточках в первой группе? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 118

Решение. Назовём пару карточек $n < m$ *почти хорошей*, если карточка с числом m лежит во второй группе. Любая почти хорошая пара карточек либо является хорошей, либо содержит 2 карточки из второй группы. Всего есть $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ способов выбрать 2 карточки из второй группы, и любая пара карточек из второй группы будет почти хорошей. Поэтому почти хороших пар будет $37 + 45 = 82$. При этом карточка с числом i из второй группы участвует в $i - 1$ почти хорошей паре, то есть число на карточке второй группы равно количеству почти хороших пар с ее участием плюс 1. Во второй группе 10 карточек, почти хороших пар суммарно 82, поэтому сумма чисел на карточках во второй группе равняется $82 + 10 = 92$. А так как сумма чисел на всех карточках равняется $\frac{21\cdot 20}{2} = 210$, то сумма чисел на карточках в первой группе равна $210 - 92 = 118$. $\square$

Вариант 8.8.2. Карточки с натуральными числами от 1 до 20 разбили на 2 группы по 10 карточек. Назовём пару чисел $n < m$ *хорошей*, если карточка с числом n лежит в первой группе, а с числом m — во второй. Оказалось, что хороших пар ровно 36. Чему может быть равна сумма чисел на карточках в первой группе? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 119

Вариант 8.8.3. Карточки с натуральными числами от 1 до 20 разбили на 2 группы по 10 карточек. Назовём пару чисел $n < m$ *хорошей*, если карточка с числом n лежит в первой группе, а с числом m — во второй. Оказалось, что хороших пар ровно 38. Чему может быть равна сумма чисел на карточках в первой группе? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 117

Вариант 8.8.4. Карточки с натуральными числами от 1 до 20 разбили на 2 группы по 10 карточек. Назовём пару чисел $n < m$ *хорошей*, если карточка с числом n лежит в первой группе, а с числом m — во второй. Оказалось, что хороших пар ровно 39. Чему может быть равна сумма чисел на карточках в первой группе? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 116