7 класс

Задача 7.1. В Матемляндии есть разные купюры: вамбики, кабодики и джамбики. Пять вамбиков равны трем кабодикам, а десять кабодиков — двум джамбикам. Сколько джамбиков равны 225 вамбикам?

Ответ: 27

Решение. Заметим, что поскольку пять вамбиков равны трем кабодикам, то 225 вамбиков равны $(225 : 5) \cdot 3 = 45 \cdot 3 = 135$ кабодикам. Так как десять кабодиков равны двум джамбикам, то пять кабодиков равны одному джамбику. А значит 135 камбодиков равны $135 : 5 = 27$ джамбикам. □

Вариант 7.1.2. В Матемляндии есть разные купюры: вамбики, кабодики и джамбики. Пять вамбиков равны четырём кабодикам, а десять кабодиков — двум джамбикам. Сколько джамбиков равны 225 вамбикам?

Ответ: 36

Вариант 7.1.3. В Матемляндии есть разные купюры: вамбики, кабодики и джамбики. Пять вамбиков равны двум кабодикам, а десять кабодиков — шести джамбикам. Сколько джамбиков равны 225 вамбикам?

Ответ: 54

Вариант 7.1.4. В Матемляндии есть разные купюры: вамбики, кабодики и джамбики. Пять вамбиков равны двум кабодикам, а десять кабодиков — восьми джамбикам. Сколько джамбиков равны 225 вамбикам?

Ответ: 72

Задача 7.2. Петя на клетчатой плоскости нарисовал по клеткам два прямоугольника. У одного из них стороны равны 3 и 10, а у другого стороны равны 5 и 6. Оказалось, что площадь их пересечения равна 12. Чему может быть равен периметр их объединения? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 32; 34

Решение. Заметим, что, как бы прямоугольники ни располагались, периметр объединения фигур всегда будет равен суммарному периметру фигур, из которого вычли периметр пересечения.

Заметим, что пересечение клетчатых прямоугольников всегда будет являться клетчатым прямоугольником, и поскольку его площадь равна 12, то это либо прямоугольник 3×4, либо прямоугольник 2×6, либо 1×12.

Заметим, что прямоугольник 1×12 не может лежать внутри исходных прямоугольников, поэтому такой случай невозможен.

Таким образом, периметр объединения может быть равен либо $2 \cdot (3+10) + 2 \cdot (5+6) - 2 \cdot (3+4) = 34$, либо $2 \cdot (3+10) + 2 \cdot (5+6) - 2 \cdot (2+6) = 32$.

Наконец, глядя на рисунок 1, заметим, что каждый из этих вариантов возможен.

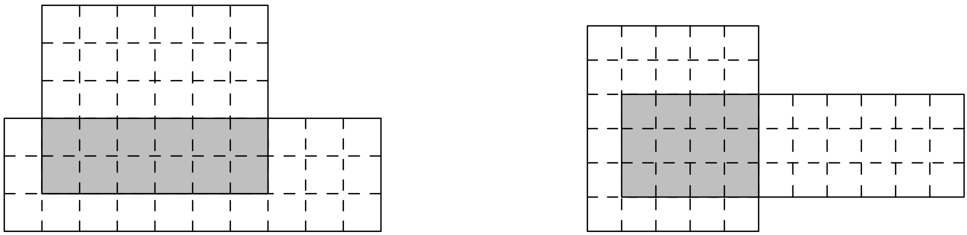

Рис. 1: К решению задачи 7.2.1

□

Вариант 7.2.2. Петя на клетчатой плоскости нарисовал по клеткам два прямоугольника. У одного из них стороны равны 4 и 13, а у другого стороны равны 5 и 9. Оказалось, что площадь их пересечения равна 16. Чему может быть равен периметр их объединения? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 42; 46

Вариант 7.2.3. Петя на клетчатой плоскости нарисовал по клеткам два прямоугольника. У одного из них стороны равны 4 и 13, а у другого стороны равны 6 и 11. Оказалось, что площадь их пересечения равна 20. Чему может быть равен периметр их объединения? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 44; 50

Вариант 7.2.4. Петя на клетчатой плоскости нарисовал по клеткам два прямоугольника. У одного из них стороны равны 4 и 10, а у другого стороны равны 6 и 9. Оказалось, что площадь их пересечения равна 18. Чему может быть равен периметр их объединения? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 36; 40

Задача 7.3. Петя взял все натуральные числа от 1 до 2025, возвел их в квадрат и для каждого квадрата написал на доске его последнюю цифру. Чему равна сумма чисел на доске?

Ответ: 9115

Решение. Запишем последние цифры числа n^2 для некоторых первых значений n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Последняя цифра n^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0	1	4	...

Заметим, что последняя цифра числа n^2 будет зависеть только от последней цифры числа n, поэтому эта таблица будет повторяться с шагом 10. Сумма чисел в каждом промежутке длины 10 равна $1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 + 0 = 45$.

В числах от 1 до 2025 поместится 202 полных десятка и еще первые 5 его цифр. Тогда искомая сумма будет равна $202 \cdot 45 + (1 + 4 + 9 + 6 + 5) = 9115$. $\square$

Вариант 7.3.2. Петя взял все натуральные числа от 1 до 1015, возвел их в квадрат и для каждого квадрата написал на доске его последнюю цифру. Чему равна сумма чисел на доске?

Ответ: 4570

Вариант 7.3.3. Петя взял все натуральные числа от 1 до 3035, возвел их в квадрат и для каждого квадрата написал на доске его последнюю цифру. Чему равна сумма чисел на доске?

Ответ: 13660

Вариант 7.3.4. Петя взял все натуральные числа от 1 до 4045, возвел их в квадрат и для каждого квадрата написал на доске его последнюю цифру. Чему равна сумма чисел на доске?

Ответ: 18205

Задача 7.4. У Алексея, Бориса, Вити, Гены и Димы есть суммарно 300 монет. Они сделали следующие утверждения:

- Алексей: «Количество монет у меня хотя бы столько же, сколько и суммарно у остальных».
- Борис: «Количество монет у меня хотя бы половина от суммарного количества монет у остальных».
- Витя: «Количество монет у меня хотя бы треть от суммарного количества монет у остальных».
- Гена: «Количество монет у меня хотя бы четверть от суммарного количества монет у остальных».
- Дима: «Количество монет у меня хотя бы одна пятая от суммарного количества монет у остальных».

Известно, что один из них соврал, а остальные сказали правду.

(а) Кто из них соврал?
(б) Какое наибольшее количество монет может быть у совравшего на самом деле?

Ответ: Алексей, 15 монет.

Решение. Заметим, что если утверждение вида «Количество монет у меня хотя бы $\frac{1}{n}$ от суммарного количества монет у остальных» для некоторого человека верно, то количество монет у него составляет хотя бы $\frac{1}{n+1}$ от суммарного количества монет у всех людей.

Действительно, пусть у этого человека a монет, а у остальных суммарно b. Тогда $a \geqslant \frac{b}{n}$ или $na \geqslant b$. Тогда $(n+1)a \geqslant a+b$, т.е. $a \geqslant \frac{a+b}{n+1}$, что мы и хотели доказать.

Теперь воспользуемся этим. Запишем, какое минимальное количество монет может быть у человека, если он говорит правду. У Алексея $\frac{300}{2} = 150$, у Бориса $\frac{300}{3} = 100$, у Вити $\frac{300}{4} = 75$, у Гены $\frac{300}{5} = 60$, у Димы $\frac{300}{6} = 50$.

Заметим, что если Алексей говорит правду, то суммарно монет не менее $150+75+60+50 = 335 > 300$, противоречие. Значит, Алексей соврал.

У остальных монет хотя бы $100+75+60+50 = 285$. Поэтому, у Алексея не более 15 монет. При этом, если у Алексея 15 монет, у Бориса 100 монет, у Вити 75 монет, у Гены 60 монет, а у Димы 50 монет, то все, кроме Алексея, говорят правду, т.е. такое может быть.

□

Вариант 7.4.2. У Алексея, Бориса, Вити, Гены и Димы есть суммарно 600 монет. Они сделали следующие утверждения:

- Алексей: «Количество монет у меня хотя бы половина от суммарного количества монет у остальных».
- Борис: «Количество монет у меня хотя бы треть от суммарного количества монет у остальных».
- Витя: «Количество монет у меня хотя бы четверть от суммарного количества монет у остальных».
- Гена: «Количество монет у меня хотя бы одна пятая от суммарного количества монет у остальных».
- Дима: «Количество монет у меня хотя бы столько же, сколько и суммарно у остальных».

Известно, что один из них соврал, а остальные сказали правду.

(а) Кто из них соврал?
(б) Какое наибольшее количество монет может быть у совравшего на самом деле?

Ответ: Дима, 30 монет.

Вариант 7.4.3. У Алексея, Бориса, Вити, Гены и Димы есть суммарно 900 монет. Они сделали следующие утверждения:

- Алексей: «Количество монет у меня хотя бы треть от суммарного количества монет у остальных».
- Борис: «Количество монет у меня хотя бы четверть от суммарного количества монет у остальных».
- Витя: «Количество монет у меня хотя бы одна пятая от суммарного количества монет у остальных».
- Гена: «Количество монет у меня хотя бы столько же, сколько и суммарно у остальных».
- Дима: «Количество монет у меня хотя бы половина от суммарного количества монет у остальных».

Известно, что один из них соврал, а остальные сказали правду.

(а) Кто из них соврал?
(б) Какое наибольшее количество монет может быть у совравшего на самом деле?

Ответ: Гена, 45 монет.

Вариант 7.4.4. У Алексея, Бориса, Вити, Гены и Димы есть суммарно 1200 монет. Они сделали следующие утверждения:

- Алексей: «Количество монет у меня хотя бы четверть от суммарного количества монет у остальных».
- Борис: «Количество монет у меня хотя бы одна пятая от суммарного количества монет у остальных».
- Витя: «Количество монет у меня хотя бы столько же, сколько и суммарно у остальных».
- Гена: «Количество монет у меня хотя бы половина от суммарного количества монет у остальных».
- Дима: «Количество монет у меня хотя бы треть от суммарного количества монет у остальных».

Известно, что один из них соврал, а остальные сказали правду.

(а) Кто из них соврал?
(б) Какое наибольшее количество монет может быть у совравшего на самом деле?

Ответ: Витя, 60 монет.

Задача 7.5. Найдите количество путей длины 11 из A в B по сторонам нарисованных клеток, если каждая клетка является квадратом со стороной 1.

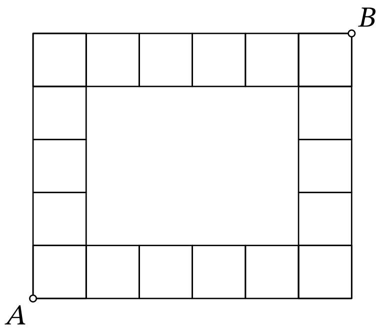

Рис. 2: К задаче 7.5.1

Ответ: 62

Решение. Заметим, что добраться из точки A в точку B по пути длины 11 можно двигаясь только вверх и вправо.

Рассмотрим только те пути, которые пойдут по «правой нижней» части рисунка, остальные будут симметричны. Заметим, что все такие пути проходят либо через точку C, либо через точку D, отмеченные на рисунке 3.

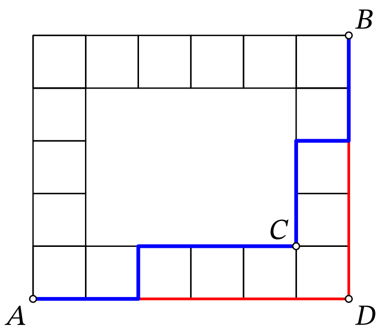

Рис. 3: К решению задачи 7.5.1

□

Через точку D проходит только один путь, нарисованный красным.

Теперь посмотрим на пути, проходящие через точку C. Чтобы попасть из точки A в точку C, нужно один раз подняться по одной из 6 вертикальных перегородок между ними. Чтобы попасть из точки C в точку B, нужно один раз перейти вправо по одной из 5 горизонтальных перегородок между ними. Итого, путей между A и B, проходящих через точку C, будет ровно $5 \cdot 6 = 30$.

А всего путей будет $2 \cdot (1 + 5 \cdot 6) = 62$.

Вариант 7.5.2. Найдите количество путей длины 12 из A в B по сторонам нарисованных клеток, если каждая клетка является квадратом со стороной 1.

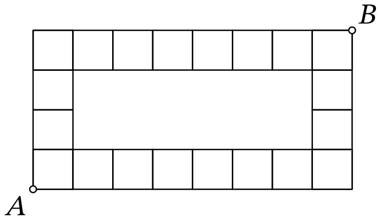

Рис. 4: К задаче 7.5.2

Ответ: 66

Вариант 7.5.3. Найдите количество путей длины 13 из A в B по сторонам нарисованных клеток, если каждая клетка является квадратом со стороной 1.

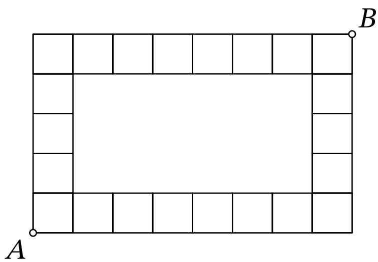

Рис. 5: К задаче 7.5.3

Ответ: 82

Вариант 7.5.4. Найдите количество путей длины 10 из A в B по сторонам нарисованных клеток, если каждая клетка является квадратом со стороной 1.

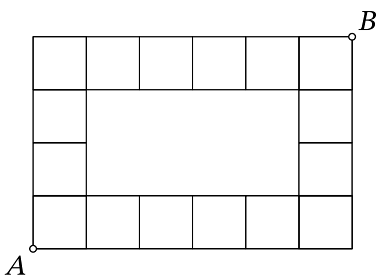

Рис. 6: К задаче 7.5.4

Ответ: 50

Задача 7.6. Двадцать прямых, никакие две из которых не параллельны, пересекаются в N точках. В одной из точек пересекается сразу десять прямых, еще в одной — пять, а во всех остальных только по две прямые. Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 137

Решение. Если бы в каждой точке пересекалось ровно две прямые, то точек пересечения было бы $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$, поскольку каждая из 20 прямых пересекает каждую из оставшихся 19, при этом каждую точку посчитали дважды — для обеих прямых, которым она принадлежит, поэтому делим на два.

Рассмотрим те десять прямых, которые пересеклись в одной точке. Если бы все они пересекались в разных точках, то точек пересечения было бы $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Но у нас есть только одна точка пересечения, значит, мы «потеряли» 44 точки.

Аналогично для пяти прямых, пересекающихся в одной точке, мы «потеряли» $\frac{5 \cdot 4}{2} - 1 = 9$ точек.

Итого у нас осталось $190 - 44 - 9 = 137$ точек. □

Вариант 7.6.2. Двадцать прямых, никакие две из которых не параллельны, пересекаются в N точках. В одной из точек пересекается сразу десять прямых, еще в одной - шесть, а во всех остальных только по две прямые. Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 132

Вариант 7.6.3. Двадцать прямых, никакие две из которых не параллельны, пересекаются в N точках. В одной из точек пересекается сразу девять прямых, еще в одной — пять, а во всех остальных только по две прямые. Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 146

Вариант 7.6.4. Двадцать прямых, никакие две из которых не параллельны, пересекаются в N точках. В одной из точек пересекается сразу девять прямых, еще в одной — шесть, а во всех остальных только по две прямые. Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ: 141

Задача 7.7. В ряд выписали дроби $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1000}$. Затем все эти дроби привели к общему знаменателю. У скольких из получившихся дробей числитель не делится на 77^2?

Ответ: 109

Решение. Пусть N — общий знаменатель всех натуральных чисел от 1 до 1000. Т.к. $7^3 = 343 < 1000 < 2401 = 7^4$ и $11^2 = 121 < 1000 < 1331 = 11^3$, то $N = 7^3 \cdot 11^2 \cdot \ldots$.

Рассмотрим произвольную дробь $\frac{1}{a}, 1 \leqslant a \leqslant 1000$. После приведения к знаменателю N она стала равна $\frac{b}{N}$. Имеем, $\frac{1}{a} = \frac{b}{N}, ab = N$. Если b не делится на 77^2, то b не делится или на 7^2, или на 11^2. В первом случае, учитывая, что N делится на 7^3, делаем вывод, что a должно делиться на 7^2. Во втором случае, учитывая опять же, что N делится на 11^2, делаем вывод, что a делится на 11. Таким образом, дроби, у которых после приведения к общему знаменателю числитель не будет делиться на 77^2, — это дроби, у которых знаменатель до приведения делился на 7^2 или на 11. Посчитаем их количество. Первых $[\frac{1000}{49}] = 20$, вторых $[\frac{1000}{11}] = 90$. При этом одно число, $49 \cdot 11 = 539$, мы посчитали оба раза. Значит, ответ в задаче 20+90-1=109. □

Вариант 7.7.2. В ряд выписали дроби $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1000}$. Затем все эти дроби привели к общему знаменателю. У скольких из получившихся дробей числитель не делится на 91^2?

Ответ: 95

Вариант 7.7.3. В ряд выписали дроби $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{600}$. Затем все эти дроби привели к общему знаменателю. У скольких из получившихся дробей числитель не делится на 65^2?

Ответ: 69

Вариант 7.7.4. В ряд выписали дроби $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{600}$. Затем все эти дроби привели к общему знаменателю. У скольких из получившихся дробей числитель не делится на 55^2?

Ответ: 76

Задача 7.8. Царство гномов состоит из 20 кланов по 100 гномов. Каждый гном входит только в один клан.

Гном считается *высоким*, если найдется хотя бы 10 кланов, не включая его собственный, средний рост в каждом из которых меньше, чем рост этого гнома.

Какое наибольшее количество высоких гномов может быть в царстве?

Ответ: 1990.

Решение. Посчитаем средний рост гномов в каждом клане и отсортируем кланы по возрастанию среднего роста $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20}$. Рассмотрим самого низкого гнома в каждом из первых 10 кланов. Его рост не больше, чем средний в его клане, а поскольку его клан входит в 10 кланов с меньшим средним ростом, то этот гном не может быть высоким. Значит, гномов, которых нельзя назвать высокими, не менее 10.

Теперь построим пример, когда таких гномов всего 10, а все остальные высокие. Пусть в первых 10 кланах будет 1 гном роста 90 см, а остальные — роста 100 см. Тогда средний рост в этих кланах будет равен $\frac{90+100\cdot 99}{100} = \frac{9990}{100} = 99,9$ см. В оставшихся 10 кланах пусть будут все гномы ростом $99,95$ см. Тогда в каждом из первых 10 кланов все гномы, кроме одного, будут высокими, а в оставшихся 10 кланах все гномы будут высокими.

$\square$

Вариант 7.8.2. Царство гномов состоит из 20 кланов по 120 гномов. Каждый гном входит только в один клан.

Гном считается *высоким*, если найдется хотя бы 10 кланов, не включая его собственный, средний рост в каждом из которых меньше, чем рост этого гнома.

Какое наибольшее количество высоких гномов может быть в царстве??

Ответ: 2390.

Вариант 7.8.3. Царство гномов состоит из 20 кланов по 140 гномов. Каждый гном входит только в один клан.

Гном считается *высоким*, если найдется хотя бы 10 кланов, не включая его собственный, средний рост в каждом из которых меньше, чем рост этого гнома.

Какое наибольшее количество высоких гномов может быть в царстве?

Ответ: 2790.

Вариант 7.8.4. Царство гномов состоит из 20 кланов по 160 гномов. Каждый гном входит только в один клан.

Гном считается *высоким*, если найдется хотя бы 10 кланов, не включая его собственный, средний рост в каждом из которых меньше, чем рост этого гнома.

Какое наибольшее количество высоких гномов может быть в царстве?

Ответ: 3190.