11 класс

Задача 11.1. Найдите натуральное x такое, что $x^x = 2^{2^{11}}$.

Ответ: 256

Решение. Из условия следует, что в разложении натурального числа x на простые множители есть только двойки. Значит, $x = 2^k, k \in \mathbb{N}$. Тогда $x^x = (2^k)^{2^k} = 2^{k \cdot 2^k}$ и $k \cdot 2^k = 2^{11}$. Далее, $k = 2^{11-k}$, при этом $1 \leqslant k \leqslant 11$ и k - тоже степень двойки. Проверяя возможные значения $k = 1, 2, 4, 8$, убеждаемся, что подходит только $k = 8$. Значит, $x = 2^k = 2^8 = 256$. □

Вариант 11.1.2. Найдите натуральное x такое, что $x^x = 2^{2^6}$.

Ответ: 16

Вариант 11.1.3. Найдите натуральное x такое, что $x^x = 3^{3^4}$.

Ответ: 27

Вариант 11.1.4. Найдите натуральное x такое, что $x^x = 5^{5^6}$.

Ответ: 3125

Задача 11.2. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 10$, $BC = 12$ отметили точку M — середину стороны CD. На отрезке BM отметили точку P так, что $BC = BP$. Найдите площадь четырехугольника $ABPD$.

Ответ: $\frac{1140}{13}$

Решение. Треугольник BCM прямоугольный, в котором $BC = 12$, $CM = \frac{CD}{2} = 5$. Это означает, что $BM = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, а $PM = BM - BP = 13 - 12 = 1$.
$S_{CPM} = \frac{MP}{MB} S_{BCM} = \frac{1}{13} \cdot \frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{30}{13}$. Также заметим, что $S_{MPD} = S_{CPM}$.
Итого получаем, что

$$S_{ABPD} = S_{ABCD} - S_{BCM} - SMPD = 10 \cdot 12 - \frac{5 \cdot 12}{2} - \frac{30}{13} = 90 - \frac{30}{13} = 87\frac{9}{13} = \frac{1140}{13}.$$

□

Вариант 11.2.2. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 16, BC = 15$ отметили точку M — середину стороны CD. На отрезке BM отметили точку P так, что $BC = BP$. Найдите площадь четырехугольника $ABPD$.

Ответ: $\frac{2940}{17}$

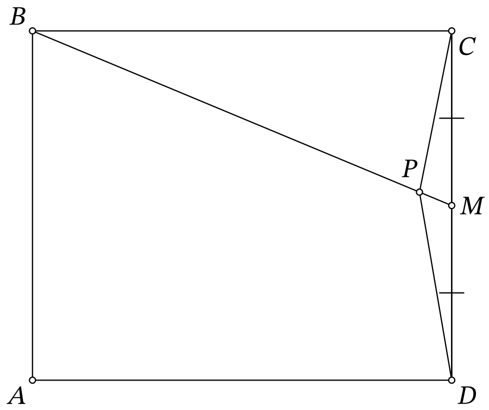

Рис. 26: К решению задачи 11.2.1

Вариант 11.2.3. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 12$, $BC = 8$ отметили точку M — середину стороны CD. На отрезке BM отметили точку P так, что $BC = BP$. Найдите площадь четырехугольника $ABPD$.

Ответ: $\frac{336}{5}$

Вариант 11.2.4. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 18$, $BC = 12$ отметили точку M — середину стороны CD. На отрезке BM отметили точку P так, что $BC = BP$. Найдите площадь четырехугольника $ABPD$.

Ответ: $\frac{756}{5}$

Задача 11.3. Петя случайно выбирает натуральное число d от 1 до 5 (вероятность выбрать каждое равна 1/5). Затем Петя случайно выбирает натуральное число a от 1 до 1300 (вероятность выбрать каждое равна 1/1300). Найдите вероятность того, что один из членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d будет равен 1825.

Ответ: 2969/6500

Решение. Заметим, что если 1825 лежит в этой арифметической прогрессии, то существует такое целое неотрицательное n, что $a + nd = 1825$, то есть числа a и 1825 дают одинаковый остаток при делении на d. Разберем все возможные варианты числа d, и посмотрим, сколько возможных чисел a будут нам подходить.

- Если $d = 1$, то будут подходить все 1300 чисел.
- Если $d = 2$, то будут подходит только нечетные числа a от 1 до 1300, которых 650 штук.
- Если $d = 3$, то будут подходит только числа a от 1 до 1300, имеющие остаток 1 при делении на 3, которых 434 штуки.

- Если $d = 4$, то будут подходит только числа a от 1 до 1300, имеющие остаток 1 при делении на 4, которых 325 штук.
- Если $d = 3$, то будут подходит только числа a от 1 до 1300, имеющие остаток 0 при делении на 5, которых 260 штук.

Искомая вероятность будет равна

$$\frac{1300 + 650 + 434 + 325 + 260}{5 \cdot 1300} = \frac{2969}{6500}$$

□

Вариант 11.3.2. Петя случайно выбирает натуральное число d от 1 до 5 (вероятность выбрать каждое равна 1/5). Затем Петя случайно выбирает натуральное число a от 1 до 1400 (вероятность выбрать каждое равна 1/1400). Найдите вероятность того, что один из членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d будет равен 1825.

Ответ: 3197/7000

Вариант 11.3.3. Петя случайно выбирает натуральное число d от 1 до 5 (вероятность выбрать каждое равна 1/5). Затем Петя случайно выбирает натуральное число a от 1 до 1600 (вероятность выбрать каждое равна 1/1600). Найдите вероятность того, что один из членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d будет равен 1825.

Ответ: 1827/4000

Вариант 11.3.4. Петя случайно выбирает натуральное число d от 1 до 5 (вероятность выбрать каждое равна 1/5). Затем Петя случайно выбирает натуральное число a от 1 до 1700 (вероятность выбрать каждое равна 1/1700). Найдите вероятность того, что один из членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d будет равен 1825.

Ответ: 1941/4250

Задача 11.4. У Пети есть натуральное число N. Он рассматривает все пары цифр числа N, одна из которых четная, а другая нечетная, и записывает на доску произведение цифр в каждой паре.

Например, если бы у него было число 2338, то на доске были бы записаны числа 6, 6, 24 и 24.

Оказалось, что сумма чисел на доске равна 26. Какое минимальное N могло быть у Пети?

Ответ: 1239

Решение. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — все четные цифры числа N, а $b_1, \ldots, b_k$ — все нечетные цифры числа N. Тогда у Пети на доске написаны числа

$$a_1b_1, a_1b_2, \ldots, a_1b_k, a_2b_1, \ldots, a_nb_k,$$

сумма которых равна $(a_1 + \ldots a_n)(b_1 + \ldots + b_k) = 26$, причем первый множитель является чётным. Заметим, что 26 имеет два разложения на множители: $26 = 1 \times 26$ и $26 = 2 \times 13$.

В первом случае мы получаем, что наше число содержит 13 двоек и одну единицу, минимальное такое число равно 12222222222222.

Во втором случае мы получаем, что наше число содержит одну двойку, а также несколько нечетных чисел, в сумме дающих 13. Наименьшее количество слагаемых, их которых можно получить 13, равно трем. Минимизируя первые цифры, представим 13 в виде суммы 1, 3 и 9. Таким образом, получаем ответ 1239. □

Вариант 11.4.2. У Пети есть натуральное число N. Он рассматривает все пары цифр числа N, одна из которых четная, а другая нечетная, и записывает на доску произведение цифр в каждой паре.

Например, если бы у него было число 2338, то на доске были бы записаны числа 6, 6, 24 и 24.

Оказалось, что сумма чисел на доске равна 34. Какое минимальное N могло быть у Пети?

Ответ: 1279

Вариант 11.4.3. У Пети есть натуральное число N. Он рассматривает все пары цифр числа N, одна из которых четная, а другая нечетная, и записывает на доску произведение цифр в каждой паре.

Например, если бы у него было число 2338, то на доске были бы записаны числа 6, 6, 24 и 24.

Оказалось, что сумма чисел на доске равна 22. Какое минимальное N могло быть у Пети?

Ответ: 1129

Вариант 11.4.4. У Пети есть натуральное число N. Он рассматривает все пары цифр числа N, одна из которых четная, а другая нечетная, и записывает на доску произведение цифр в каждой паре.

Например, если бы у него было число 2338, то на доске были бы записаны числа 6, 6, 24 и 24.

Оказалось, что сумма чисел на доске равна 38. Какое минимальное N могло быть у Пети?

Ответ: 1299

Задача 11.5. Рассмотрим правильную десятиугольную призму $A_1A_2 \dots A_{10}B_1B_2 \dots B_{10}$. Найдите количество прямых, проходящих через две вершины этой призмы и скрещивающихся с диагональю A_1B_6.

Ответ: 144

Решение. Рассмотрим все прямые, которые не проходят ни через A_1, ни через B_6, их количество равно $\frac{18\cdot 17}{2} = 153$. Теперь посчитаем количество прямых, которые не скрещиваются с A_1B_6. Заметим, что такая прямая лежит в одной плоскости с A_1B_6. Посмотрим на все плоскости, которые проходят через A_1B_6 и вершины призмы и заметим, что они также проходят через две другие диагональные вершины, и никакие другие. Таким образом, нам не подходят только 9 ”диагоналей” призмы. Итого, ответ равн $153 - 9 = 144$. □

Вариант 11.5.2. Рассмотрим правильную двенадцатиугольную призму $A_1A_2 \dots A_{12}B_1B_2 \dots B_{12}$. Найдите количество прямых, проходящих через две вершины этой призмы и скрещивающихся с диагональю A_1B_7.

Ответ: 220

Вариант 11.5.3. Рассмотрим правильную четырнадцатиугольную призму $A_1A_2 \dots A_{14}B_1B_2 \dots B_{14}$. Найдите количество прямых, проходящих через две вершины этой призмы и скрещивающихся с диагональю A_1B_8.

Ответ: 312

Вариант 11.5.4. Рассмотрим правильную шестнадцатиугольную призму $A_1A_2 \dots A_{16}B_1B_2 \dots B_{16}$. Найдите количество прямых, проходящих через две вершины этой призмы и скрещивающихся с диагональю A_1B_9.

Ответ: 420

Задача 11.6. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве действительных значений и принимают действительные значения. Также известно, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, при этом значения функций $f(x)$ и $\frac{1}{2}x$ во всех точках отличаются меньше чем на 5. Уравнение $g(x) = 25 - x^2$ имеет целый корень. Найдите все возможные значения этого корня.

Напомним, что функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на множестве действительных значений и принимающие действительные значения, являются взаимно обратными, если $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ для всех действительных x.

Ответ: -6; 4

Решение. Из условия следует, что $\frac{1}{2}x - 5 < f(x) < \frac{1}{2}x + 5$ для любого x. Если подставить $g(x)$ вместо x, получим $\frac{1}{2}g(x) - 5 < f(g(x)) < \frac{1}{2}g(x) + 5$, т.е. $\frac{1}{2}g(x) - 5 < x < \frac{1}{2}g(x) + 5$. Пусть

x_0 — корень уравнения $g(x) = 25 - x^2$. Т.к. $\frac{1}{2}g(x_0) - 5 < x_0 < \frac{1}{2}g(x_0) + 5$, то $\frac{1}{2}(25 - x_0^2) - 5 < x_0 < \frac{1}{2}(25 - x_0^2) + 5$. Решая это двойное неравенство, получаем $x_0 \in (-7; -5) \cup (3; 5)$. Значит, возможные целые значения — только -6 и 4. $\square$

Вариант 11.6.2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве действительных значений и принимают действительные значения. Также известно, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, при этом значения функций $f(x)$ и $\frac{1}{2}x$ во всех точках отличаются меньше чем на 6. Уравнение $g(x) = 36 - x^2$ имеет целый корень. Найдите все возможные значения этого корня.

Напомним, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными, если $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ для всех действительных x.

Ответ: -7; 5

Вариант 11.6.3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве действительных значений и принимают действительные значения. Также известно, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, при этом значения функций $f(x)$ и $\frac{1}{2}x$ во всех точках отличаются меньше чем на 7. Уравнение $g(x) = 49 - x^2$ имеет целый корень. Найдите все возможные значения этого корня.

Напомним, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными, если $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ для всех действительных x.

Ответ: -8; 6

Вариант 11.6.4. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве действительных значений и принимают действительные значения. Также известно, что $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, при этом значения функций $f(x)$ и $\frac{1}{2}x$ во всех точках отличаются меньше чем на 8. Уравнение $g(x) = 64 - x^2$ имеет целый корень. Найдите все возможные значения этого корня.

Напомним, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными, если $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ для всех действительных x.

Ответ: -9; 7

Задача 11.7. В остроугольном треугольнике провели высоту BH. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B, отметили такую точку X такую, что $BX = BC$. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если $AB = 7$, $AC = 10$, $AH = 3$.

Ответ: 4.2

Решение. Отметим точку D повторного пересечения прямой XP с описанной окружностью треугольника ABC. Поскольку $ABDX$ — вписанная трапеция, то $AD = BX = BC$. Заметим, что поскольку $AD = BC$, то тогда $ABDC$ — также вписанная трапеция, причем $BD \parallel AC$. Заметим, что $\angle DCP = \angle CAB = \angle CPD$, поэтому треугольник CPD равнобедренный. Опустим перпендикуляр DS из точки D на прямую AC. Получим, что прямоугольные треугольники DCS, DPS, ABH равны, откуда будет следовать, что $CP = 2AH$.

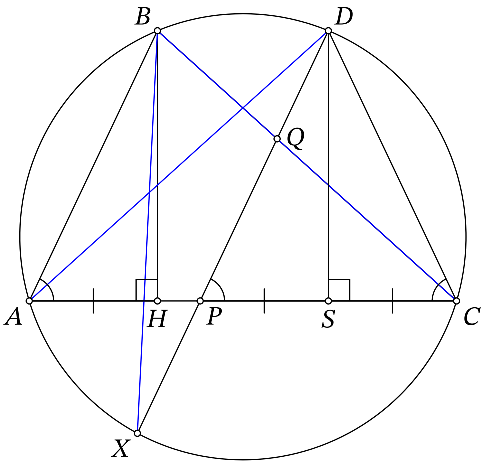

Рис. 27: К решению задачи 11.7.1

Далее, из подобия треугольников CPQ и CAB получаем, что

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{CP}{AC}$$

Что означает, что

$$PQ = AB \cdot \frac{2AH}{AC} = 7 \cdot \frac{6}{10} = 4.2$$

□

Вариант 11.7.2. В остроугольном треугольнике провели высоту BH. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B, отметили такую точку X такую, что $BX = BC$. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если $AB = 8$, $AC = 10$, $AH = 3$.

Ответ: 4.8

Вариант 11.7.3. В остроугольном треугольнике провели высоту BH. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B, отметили такую точку X такую, что $BX = BC$. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если $AB = 9$, $AC = 10$, $AH = 3$.

Ответ: 5.4

Вариант 11.7.4. В остроугольном треугольнике провели высоту BH. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B, отметили такую точку X такую, что $BX = BC$. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если $AB = 11$, $AC = 10$, $AH = 3$..

Ответ: 6.6

Задача 11.8. Петя и Вася играют в следующую игру. На доске 5×5 в каждой клетке лежит по n конфет. Петя и Вася по очереди, начиная с Пети, выбирают непустую клетку и съедают из неё несколько конфет. При этом из угловых клеток разрешается съедать не более двух конфет, из клеток, имеющих 3 соседа по стороне, — не более 3 конфет, из всех остальных — не более 5 конфет. Игрок, после чьего хода появляется пустая строка или пустой столбец, побеждает. Для скольких n в диапазоне от 1 до 1000 у Пети есть выигрышная стратегия?

Ответ: 834

Решение. Докажем, что при n, делящихся на 6, выигрывает Вася. Стратегия за Васю:

- Если у Васи есть ход, после которого появляется пустая строка или столбец, то он его делает.
- Иначе, если Петя взял из центральной клетки i конфет, то Вася берёт из неё $6 - i$ конфет.
- Иначе Петя берёт i конфет из не центральной клетки. Тогда Вася должен взять i конфет из центрально-симметричной клетки.

Заметим, что после каждого хода Васи либо Вася побеждает этим ходом, либо на столе остаётся центрально-симметричная расстановка конфет, в центральной клетке которой количество конфет делится на 6. Покажем, что это стратегия действительная выигрышная, предположим противное. Тогда после некоторого своего хода выиграл Петя. Рассмотрим его последний ход.

Случай 1. Последний ход Пети был из центральной клетки. Так как перед его ходом в ней было кратное 6 количество конфет, по после хода останется не кратное 6 количество конфет, в частности, не 0. Таким образом, Петя не мог своим ходом опустошить центральную клетку, и, следовательно, победить.

Случай 2. Последний ход Пети был не в центральную клетку. Рассмотрим ряд, которых после хода Пети стал пустым. Заметим, что этот ряд не может быть центральной строкой или столбцом, так как центрально-симметричная клетка к клетке, из которой был сделан последних ход, не пустая. Рассмотрим ряд, центрально симметричный к ряду, ставшему пустым после хода Пети.

Перед ходом Пети положение конфет в этих рядах было центрально-симметрично, поэтому в любой из этих рядов был выигрышный ход. Своим последних ходом Вася менял не более одного из этих двух рядов. Но тогда у Васи был выигрышный ход в другой из этих рядов, который он и должен был бы сделать, согласно своей стратегии.

Таким образом, при n, делящихся на 6 выигрывает Вася. При n, не делящихся на 6, выигрывает Петя: первым ходом он берёт несколько конфет из центральной клетки так, чтобы в ней осталось кратное 6 количество монет; а после играет по описанной выше стратегии. От 1 до 1000 ровно $[\frac{1000}{6}] = 166$ чисел, кратных 6, поэтому у Пети есть выигрышная стратегия для $1000 - 166 = 834$ значений n. $\square$

Вариант 11.8.2. Петя и Вася играют в следующую игру. На доске 5×5 в каждой клетке лежит по n конфет. Петя и Вася по очереди, начиная с Пети, выбирают непустую клетку и съедают из неё несколько конфет. При этом из угловых клеток разрешается съедать не более двух конфет, из клеток, имеющих 3 соседа по стороне, — не более 3 конфет, из всех остальных — не более 5 конфет. Игрок, после чьего хода появляется пустая строка или пустой столбец, побеждает. Для скольких n в диапазоне от 1 до 1600 у Пети есть выигрышная стратегия?

Ответ: 1334

Вариант 11.8.3. Петя и Вася играют в следующую игру. На доске 5×5 в каждой клетке лежит по n конфет. Петя и Вася по очереди, начиная с Пети, выбирают непустую клетку и съедают из неё несколько конфет. При этом из угловых клеток разрешается съедать не более двух конфет, из клеток, имеющих 3 соседа по стороне, — не более 3 конфет, из всех остальных — не более 5 конфет. Игрок, после чьего хода появляется пустая строка или пустой столбец, побеждает. Для скольких n в диапазоне от 1 до 2000 у Пети есть выигрышная стратегия?

Ответ: 1667

Вариант 11.8.4. Петя и Вася играют в следующую игру. На доске 5×5 в каждой клетке лежит по n конфет. Петя и Вася по очереди, начиная с Пети, выбирают непустую клетку и съедают из неё несколько конфет. При этом из угловых клеток разрешается съедать не более двух конфет, из клеток, имеющих 3 соседа по стороне, — не более 3 конфет, из всех остальных — не более 5 конфет. Игрок, после чьего хода появляется пустая строка или пустой столбец, побеждает. Для скольких n в диапазоне от 1 до 1400 у Пети есть выигрышная стратегия?

Ответ: 1167