10 класс

Задача 10.1. Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит $2n$ членов. Известно, что разность суммы последних n и суммы первых n членов равна 450. Укажите все возможные значения n, если известно, что $n > 1$.

Ответ: 3, 5, 15.

Решение. Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, ..., a_{2n}$, и пусть d — её разность. Тогда разность суммы последних n и первых n членов считается по формуле $(a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{2n})-(a_1+a_2+...+a_n) = (a_{n+1}-a_1)+(a_{n+2}-a_2)+...+(a_{2n}-a_n) = \underbrace{nd+nd+...+nd}_{n} = n^2d$. Итак, $n^2d = 450$. Т.к. $450 = 2\cdot 3^2\cdot 5^2$, то возможные значения n, большие 1 — 3, 5 и 15. □

Вариант 10.1.2. Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит $2n$ членов. Известно, что разность суммы последних n и суммы первых n членов равна 882. Укажите все возможные значения n, если известно, что $n > 1$.

Ответ: 3, 7, 21

Вариант 10.1.3. Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит $2n$ членов. Известно, что разность суммы последних n и суммы первых n членов равна 2450. Укажите все возможные значения n, если известно, что $n > 1$.

Ответ: 5, 7, 35

Вариант 10.1.4. Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит $2n$ членов. Известно, что разность суммы последних n и суммы первых n членов равна 2178. Укажите все возможные значения n, если известно, что $n > 1$.

Ответ: 3, 11, 33

Задача 10.2. На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение

$$(\ldots((((1\star 2)\diamond 3)\star 4)\diamond 5)\star \ldots)\star 2024$$

Ответ: 4047

Решение. Рассмотрим выражение $\big(n \star (n+1)\big) \diamond (n+2)$ для произвольного числа n, оно равно

$$\big(n\star(n+1)\big)\diamond(n+2) = \big((n+1)^2-n^2\big)\diamond(n+2) = (2n+1)\diamond(n+2) = (2n+1)-(n+2)+3 = n+2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(\ldots((((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \ldots)\star 2024 &= \\
= (\ldots((3 \star 4) \diamond 5) \star \ldots)\star 2024 &= \\
= (5 \star \ldots)\star 2024 &= \\
\ldots& \\
= 2023\star 2024 &= 4047
\end{aligned}$$

$\square$

Вариант 10.2.2. На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение

$$(\ldots((((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \ldots) \star 2022$$

Ответ: 4043

Вариант 10.2.3. На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение

$$(\ldots((((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \ldots) \star 2026$$

Ответ: 4051

Вариант 10.2.4. На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2,$$

$$a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражение

$$(\ldots((((1 \star 2) \diamond 3) \star 4) \diamond 5) \star \ldots) \star 2028$$

Ответ: 4055

Задача 10.3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD. Вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются AD в точках P и Q соответственно и касаются BC в точках X и Y соответственно. Пусть прямые PX и QY пересекаются в точке Z. Найдите площадь треугольника XYZ, если известно, что $BC = 22$, $AD = 12$ а периметр треугольника ABC равен 56.

Ответ: 9

Решение. Заметим, что треугольники XPD и YQD прямоугольные и равнобедренные. Отсюда следует, что треугольник XYZ также прямоугольный и равнобедренный.

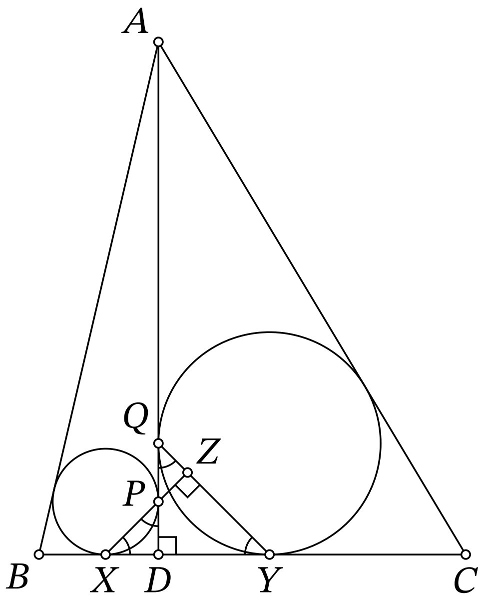


Рис. 23: К решению задачи 10.3.1

Отрезок $DX = \frac{BD+AD-AB}{2}$, $DY = \frac{CD+AD-AC}{2}$, откуда

$$XY = \frac{BC + 2AD - AB - AC}{2} = \frac{BC - (P_{ABC} - BC)}{2} + AD = \frac{44 - 56}{2} + 12 = 6.$$

Поскольку треугольник XZY равнобедренный и прямоугольный с гипотенузой XY, то

$$S_{XYZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{XY}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{XY^2}{4} = \frac{36}{4} = 9.$$

□

Вариант 10.3.2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD. Вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются AD в точках P и Q соответственно и касаются BC в точках X и Y соответственно. Пусть прямые PX и QY пересекаются в точке Z. Найдите площадь треугольника XYZ, если известно, что $BC = 48$, $AD = 28$ а периметр треугольника ABC равен 124.

Ответ: 49

Вариант 10.3.3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD. Вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются AD в точках P и Q соответственно и касаются BC в точках X и Y соответственно. Пусть прямые PX и QY пересекаются в точке Z. Найдите площадь треугольника XYZ, если известно, что $BC = 36$, $AD = 28$ а периметр треугольника ABC равен 108.

Ответ: 25

Вариант 10.3.4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD. Вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются AD в точках P и Q соответственно и касаются BC в точках X и Y соответственно. Пусть прямые PX и QY пересекаются в точке Z. Найдите площадь треугольника XYZ, если известно, что $BC = 20$, $AD = 28$ а периметр треугольника ABC равен 80.

Ответ: 16

Задача 10.4. Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 81% учеников знает C++ и 62% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть a — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.
(а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение a?
(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение a?

Ответ: а) 64, б) 12

Решение. Пусть всего в школе N учеников. Для упрощения вычислений будем считать, что $N = 100$ (на самом деле все дальнейшие вычисления производятся в процентах от N).

Посчитаем суммарное количество знаемых языков программирования: $93+81+62 = 236$. Получается, что есть хотя бы 36 учеников, которые знают все три языка, т.е. не более 64 учеников знают по два языка. При этом возможен вариант, когда таких учеников ровно 64: пусть есть 36 учеников, которые знают все языки; 38 учеников, которые знают Python и C++; 19 учеников, которые знают Python и Java и 7 учеников, которые знают C++ и Java.

Для ответа на второй вопрос поймём, что есть не более 62 учеников, которые знают все три языка (т.к. только 62 ученика знает Java). Далее, обозначим через a количество учеников, знающих все 3 языка, через b — знающих 2 языка, через c — знающих 1 язык и через d — знающих 0 языков. Получаем, что $3a+2b+c=236$, $a+b+c+d=100$ и $a \leqslant 62$. Тогда

$$b = 236 - 3a - b - c = 236 + d - 2a - 100 = 136 - 2a + d \geqslant 136 - 62 \cdot 2 = 12$$

При этом вариант, когда $b=2$ возможен: пусть есть 62 ученика, знающих все 3 языка; 12 учеников, знающих Python и C++; 19 учеников, знающих Python; 7 учеников, знающих C++.

□

Вариант 10.4.2. Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 82% учеников знает C++ и 62% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть a — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.
(а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение a?
(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение a?

Ответ: а) 63, б) 13

Вариант 10.4.3. Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 81% учеников знает C++ и 59% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть a — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.
(а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение a?
(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение a?

Ответ: а) 67, б) 15

Вариант 10.4.4. Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 82% учеников знает C++ и 59% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть a — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.
(а) (3 балла) Чему равно наибольшее возможное значение a?
(б) (4 балла) Чему равно наименьшее возможное значение a?

Ответ: а) 66, б) 16

Задача 10.5. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD отметили такую точку X, что $AX = CD$ и $\angle BXD = \angle CDA$. Найдите BX, если известно, что $AB = 8$, $BC = 10$, $CD = 3$.

Ответ: 6.75

Решение. Отметим точку E пересечения BC и AD. Заметим, что треугольники ABX и CED равны, поскольку $AX = CD$ и $\angle AXB = \angle CDE$ по условию, а также $\angle BAX = \angle EDC$, поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный. Тогда $AB = CE$. Заметим, что треугольники CDE и ABE подобны, поэтому

$$\frac{BX}{AX} = \frac{BE}{AB}$$

Откуда получаем, что

$$BX = CD \cdot \frac{AB + BC}{AB} = 3 \cdot \frac{18}{8} = 6.75$$

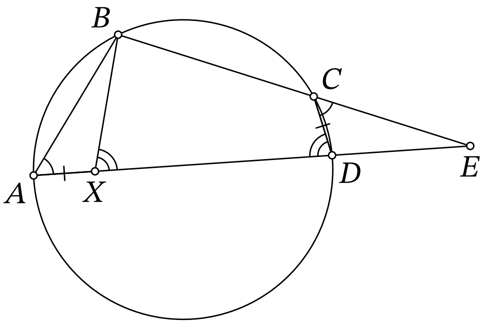


Рис. 24: К решению задачи 10.5.1

$\square$

Вариант 10.5.2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD отметили такую точку X, что $AX = CD$ и $\angle BXD = \angle CDA$. Найдите BX, если известно, что $AB = 10$, $BC = 6$, $CD = 4$.

Ответ: 6.4

Вариант 10.5.3. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD отметили такую точку X, что $AX = CD$ и $\angle BXD = \angle CDA$. Найдите BX, если известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, $CD = 3$.

Ответ: 7.5

Вариант 10.5.4. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD отметили такую точку X, что $AX = CD$ и $\angle BXD = \angle CDA$. Найдите BX, если известно, что $AB = 10$, $BC = 7$, $CD = 5$.

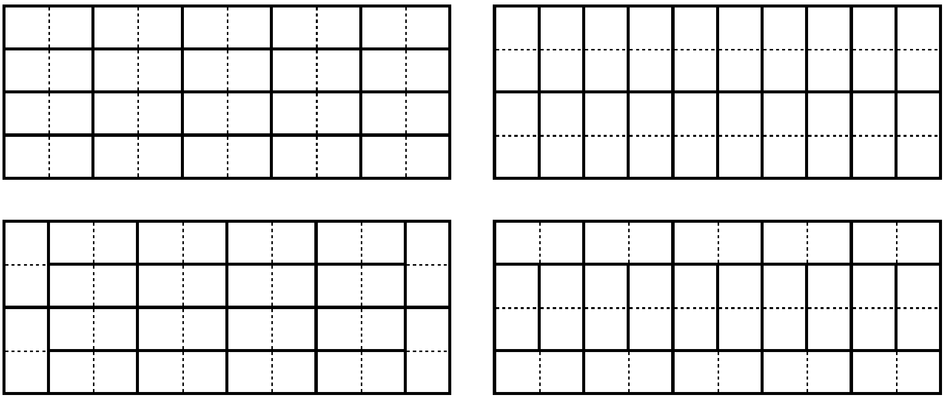
Ответ: 8.5

Задача 10.6. При каком наименьшем n во все клетки таблицы 4×10 можно расставить некоторые из чисел от 1 до n, каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

Ответ: 41.

Решение. Поскольку в таблице 4×10 всего 40 клеток, то $n \geqslant 40$. Предположим, что $n = 40$. Тогда каждое число используется ровно 1 раз.

Покрасим клетки доски в шахматную раскраску. Заметим, что никакие два из чисел от 21 до 40 не могут стоять рядом. А так как их всего 20, то они должны целиком занимать либо все белые клетки, либо все чёрные. Действительно, всю доску без любого прямоугольника 1×2 можно разбить на прямоугольники 1×2 (см. рисунок), и тогда если в каком-то из них нет чисел от 21 до 40, то в каком-то будет 2 таких числа, противоречие. А если в каждом прямоугольнике 1×2 есть ровно одно из этих чисел, то они занимают либо все белые клетки, либо все чёрные.



Тогда числа от 1 до 20 будут занимать все клетки другого цвета. Значит, рядом с числом 20 будут хотя бы 2 числа от 21 до 40, т.е. числа, большие 20. Но оба они не смогут быть хотя бы в 2 раза больше чем число 20. Значит, при $n = 40$ так сделать не получится.

На рисунке 25 нарисован пример для $n = 41$.

27	8	31	12	35	16	39	19	41	20
4	26	7	30	11	34	15	38	18	40
23	3	25	6	29	10	33	14	37	17
1	22	2	24	5	28	9	32	13	36

Рис. 25: К решению задачи 10.6.1

□

Вариант 10.6.2. При каком наименьшем n во все клетки таблицы 4×11 можно расставить некоторые из чисел от 1 до n, каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

Ответ: 45.

Вариант 10.6.3. При каком наименьшем n во все клетки таблицы 4×12 можно расставить некоторые из чисел от 1 до n, каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

Ответ: 49.

Вариант 10.6.4. При каком наименьшем n во все клетки таблицы 4×13 можно расставить некоторые из чисел от 1 до n, каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

Ответ: 53.

Задача 10.7. У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером n и ставит её непосредственно справа от книги с номером m, где m — наибольший собственный делитель n. Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

(а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 33?
(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 33?

Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.

Ответ: а) 99, б) 1760.

Решение. **(а)** Сначала справа от 33 будут какие-то числа, пока какое-то число не встанет непосредственно справа от 33. Это будет число, у которого наибольший собственный делитель равен 33. Это число имеет вид $33t$. Заметим, что $t \leqslant 3$, поскольку иначе у числа будет делитель $11t > 33$. При этом если $t = 2$ или $t = 3$, то наибольший собственный делитель как раз будет равен 33. Значит, сначала справа от 33 Маша поставит 66, а потом справа от 33 Маша поставит 99. Больше справа от 33 Маша ничего не поставит, поэтому в конце справа от 33 будет 99.

(б) Когда Маша поставит число 33, она поставит его справа от 11. Значит, в дальнейшем книга слева от 33 будет обновляться, когда справа от левого соседа 33 что-то ставят. Справа от 11 сначала поставится 22, но это будет до того как поставится 33, а после этого момент первая книга, которая поставится, будет 55 (т.к. 44 поставится справа от 22). Далее за 55 первая книга, которая поставится, будет $55 \cdot 2 = 110$. Далее аналогично её номер будет увеличиваться в 2 раза, пока это возможно. Получим последовательность 110, 220, 440, 880, 1760. Значит, в конце слева от 33 будет стоять 1760.

□

Вариант 10.7.2. У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером n и ставит её непосредственно справа от книги с номером m, где m — наибольший собственный делитель n. Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

(а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 39?
(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 39?

Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.

Ответ: а) 117, б) 1040.

Вариант 10.7.3. У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером n и ставит её непосредственно справа от книги с номером m, где m — наибольший собственный делитель n. Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

(а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 51?
(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 51?

Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.

Ответ: а) 153, б) 1360.

Вариант 10.7.4. У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером n и ставит её непосредственно справа от книги с номером m, где m — наибольший собственный делитель n. Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

(а) (2 балла) Чему равен номер книги справа от книги с номером 57?
(б) (5 баллов) Чему равен номер книги слева от книги с номером 57?

Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.

Ответ: а) 171, б) 1520.

Задача 10.8. Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1-3x_1+3x_1^2}+\frac{x_2^3}{1-3x_2+3x_2^2}+\ldots+\frac{x_{101}^3}{1-3x_{101}+3x_{101}^2},$$

если для всех i от 1 до 101 выполнено, что $x_i=\frac{i}{101}$.

Ответ: 51

Решение. Заметим, что

$$\frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2} = \frac{x_i^3}{x_i^3+(1-x_i)^3} = \frac{x_i^3}{x_i^3+x_{101-i}^3}$$

Откуда следует, что

$$\frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2} + \frac{x_{101-i}^3}{1-3x_{101-i}+3x_{101-i}^2} = \frac{x_i^3}{x_i^3+x_{101-i}^3} + \frac{x_{101-i}^3}{x_i^3+x_{101-i}^3} = 1$$

Рассмотрев 100 слагаемых кроме последнего, заметим что они разбиваются на 50 пар для i и $101-i$, и их сумма равна 50. Прибавляя последнее слагаемое, которое равно 1, получаем ответ 51.

□

Вариант 10.8.2. Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1-3x_1+3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1-3x_2+3x_2^2} + \ldots + \frac{x_{201}^3}{1-3x_{201}+3x_{201}^2},$$

если для всех i от 1 до 201 выполнено, что $x_i = \frac{i}{201}$.

Ответ: 101

Вариант 10.8.3. Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1-3x_1+3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1-3x_2+3x_2^2} + \ldots + \frac{x_{301}^3}{1-3x_{301}+3x_{301}^2},$$

если для всех i от 1 до 301 выполнено, что $x_i = \frac{i}{301}$.

Ответ: 151

Вариант 10.8.4. Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1-3x_1+3x_1^2} + \frac{x_2^3}{1-3x_2+3x_2^2} + \ldots + \frac{x_{401}^3}{1-3x_{401}+3x_{401}^2},$$

если для всех i от 1 до 401 выполнено, что $x_i = \frac{i}{401}$.

Ответ: 201