

**Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 7 класса**

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задача 1.

Несколько мальчиков купили в магазине по 5 пачек печенья, а экономная девочка Таня купила меньше. В каждой пачке по 12 печений. У всех детей вместе оказалось 396 печений. Сколько пачек печенья купила Таня?

Ответ: 3.

Решение. Общее количество пачек печенья равно $396 : 12 = 33$. Если из всех пачек вычесть Танины, останутся только пачки мальчиков, поэтому их количество делится на 5. Кроме того, количество пачек Тани меньше 5 по условию. Значит, количество пачек у Тани равно остатку при делении 33 на 5, то есть 3.

Задача 2.

Четыре числа a , b , c и d таковы, что верна пропорция $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$ и $ad = 60$. Найдите произведение всех четырех чисел.

Ответ: 3600.

Решение. По свойству пропорции $(a - b)(c + d) = (a + b)(c - d)$. После упрощения получаем: $ad - bc = bc - ad$, то есть $ad = bc$, $abcd = 60^2 = 3600$.

Задача 3.

Андрей, Борис и Виктор хотели позавтракать пончиками. Оказалось, что Андрею не хватает 50 рублей для покупки трех пончиков, Борису – 25 рублей на два пончика, а Виктору – 13 рублей на один пончик. Тогда они сложили свои деньги, и выяснилось, что у них 500 рублей на всех. Сколько стоит пончик?

Ответ: 98.

Решение. Пусть один пончик стоит x рублей. Тогда у Андрея $3x - 50$ рублей, у Бориса $2x - 25$ рублей, у Виктора $x - 13$ рублей. По условию $3x - 50 + 2x - 25 + x - 13 = 500$, то есть $6x = 588$, $x = 98$. Значит, один пончик стоит 98 рублей.

Задача 4.

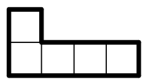
При нажатии на кнопку этажа в лифте 23-этажного дома кнопка загорается, а при повторном нажатии - гаснет. В лифт зашли Вася, Коля и Петя. Вася нажал на 12 различных кнопок, Коля - на 14, и Петя - на 19. Изначально ни одна кнопка не горела. В результате все кнопки загорелись. Сколько кнопок были нажаты трижды?

Ответ: 11.

Решение. Каждый мальчик нажимал разные кнопки, поэтому каждая кнопка была нажата не более трех раз. Отменим последнее нажатие каждой кнопки. Останется $12+14+19-23=22$ нажатия, при этом каждая кнопка была нажата четное количество раз, но не больше двух. Значит, ровно 11 кнопок были нажаты дважды, а именно они в исходной ситуации были нажаты трижды.

Задача 5.

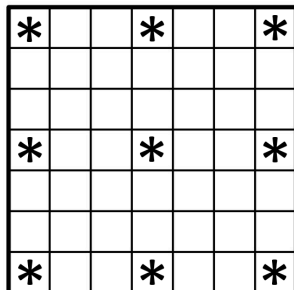
Квадрат 7×7 , показанный на рисунке, разрезан без остатка по линиям клеток на фигурки вида



и

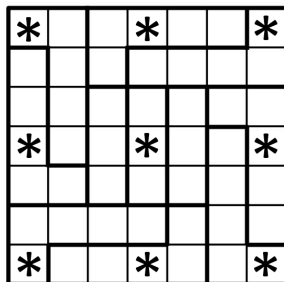


. Найдите максимально возможное количество пятиклеточных фигурок, содержащих звездочки (одну или больше). Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Ответ: 8.

Решение. Площадь квадрата 7×7 равна 49. Это число не делится на 5, так что обойтись только пятиклеточными фигурками не удастся. Так как $49 - 4 \cdot 5 = 9$ не делится на 3, то не может быть ровно 9 пятиклеточных фигурок. Заметим, что $49 = 40 + 9$, так что теоретически возможен вариант, в котором окажется $8 = 40 : 5$ пятиклеточных фигурок и $3 = 9 : 3$ трехклеточных. Тогда наибольшее количество пятиклеточных фигурок, содержащих звездочки, не может быть больше 8. Тем не менее, существует пример, когда их ровно 8.



Задача 6.

На балу присутствует не более 60 человек. Они танцуют в парах (один мужчина и одна женщина). В настоящий момент танцуют $\frac{3}{4}$ всех мужчин и $\frac{4}{5}$ всех женщин. Сколько людей присутствует на балу?

Ответ: 31.

Решение. Пусть мужчин m , а женщин g . Тогда $\frac{3}{4}m = \frac{4}{5}g$. Откуда $15m = 16g$. Следовательно, m кратно 16, а g кратно 15, то есть $m = 16k$, $g = 15k$. Всего людей, значит, $15k + 16k = 31k$. Откуда $k \leq 1$. То есть $k = 1$. Таким образом, всего людей 31.

Задача 7.

Среди трех друзей один выше всех по росту, другой старше всех, а третий - самый хитрый. Самый высокий всегда говорит правду, самый старший всегда лжёт, а самый хитрый может иногда говорить правду, а иногда лгать. И Петя, и Вася сказали: «Я - самый хитрый!», а Алеша добавил: «Петя выше самого старшего из нас». Кто из ребят старше всех?

Ответ: Вася.

Решение. Самый высокий не мог сказать, что он самый хитрый. Поэтому самый высокий - Алеша. Он сказал правду, значит, Петя - не самый старший, то есть он - самый хитрый, а самый старший - Вася.

Задача 8.

В левой верхней клетке прямоугольной клетчатой поляны 10×12 сидят 7 жуков. За один ход один из жуков переползает на одну клетку вправо или на одну клетку вниз. Через несколько ходов все жуки собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наименьшее количество клеток, не посещенных ни одним жуком?

Ответ: 15.

Решение. Рассмотрим диагонали, идущие снизу-слева вверх-вправо. Каждую из них каждый жук пересечет ровно один раз. Их длины: 1, 2, ..., 9, 10, 10, 10, 9, ..., 1, где чисел, равных 10, 3 штуки. Поэтому на них, начиная с диагонали длины $7+1$, останутся не посещенными минимум 1, 2, 3, 3, 3, 2, 1 клетки. Сумма этих чисел равна 15. Пример легко строится. Первый жук ползет направо до конца, потом вниз до конца. Второй сначала сползает на вторую сверху горизонталь, потом ползет вправо до предпоследней вертикали, спускается вниз до конца, и ползет направо, и так далее. Пути жуков показаны на картинке.

