

11 класс
Первый день

11.1. Существуют ли четыре попарно различных положительных числа a, b, c, d , при которых все четыре числа $\frac{a+b}{a-b}, \frac{b+c}{b-c}, \frac{c+d}{c-d}, \frac{d+a}{d-a}$ – целые?

11.2. Вещественные числа x, y, z таковы, что $2x > y^2 + z^2, 2y > z^2 + x^2, 2z > x^2 + y^2$. Докажите, что каждое из чисел x, y, z меньше 1.

11.3. В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, Даша начинает. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня – на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша?

11.4. Найдите все такие пары целых чисел m и $n > 2$, что $((n-1)! - n) \cdot (n-2)! = m(m-2)$. Напомним, что $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до k .

11.5. В треугольнике ABC с углом 100° при вершине A медианы BK и CN пересекаются в точке M . Прямая, проходящая через точку M и параллельная BC , пересекает описанную окружность треугольника AKN в точках Q и P . Найдите сумму углов BQC и BPC .