10 класс
Второй день

10.6. Изначально на табло горит число 0. При нажатии на кнопку число на табло изменяется на 50 или 51. На кнопку нажали 2025 раз. Могло ли после этого на табло гореть число 25, если известно, что на табло не появлялись более чем двузначные числа, а также не появлялись отрицательные числа?

10.7. Дана трапеция $ABCD$. Известно то, что $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке E, лежащей внутри трапеции. Докажите, что описанные окружности треугольников ABE и CDE касаются.

10.8. В клетчатом прямоугольнике 2×100 каждую клетку красят в белый или чёрный цвет. *Доминошкой* будем называть клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1. Оказалось, что существует единственный способ разбить данный прямоугольник 2×100 на доминошки так, чтобы каждая доминошка покрывала хотя бы 1 чёрную клетку. Какое наибольшее количество клеток могло быть покрашено в чёрный цвет?

10.9. Назовём натуральное число *однобоким*, если оно больше 1, и все его простые делители заканчиваются на одну и ту же цифру. (Например, числа 19 и $117 = 3\cdot3\cdot13$ – однобокие, а число $682 = 2\cdot11\cdot31$ – нет.) Верно ли, что существует возрастающая арифметическая прогрессия с разностью, не превышающей 2025, состоящая из 150 натуральных чисел, каждое из которых – однобокое?

10.10. На графике функции $y = x^2$ отметили 1000 различных точек, абсциссы которых – целые числа из отрезка $[0;100000]$. Докажите то, что можно выбрать шесть различных отмеченных точек A, B, C, A', B', C' таких, что площади треугольников ABC и $A'B'C'$ равны.