Материалы для проведения регионального этапа

LI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2024–2025 учебный год

Первый день

31 января – 1 февраля 2025 г.

Москва, 2025

Сборник содержит материалы для проведения III этапа LI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. Г. Храмцов. Г. Р. Челноков.

А также: С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, А. И. Храбров, И. И. Фролов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024–2025 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024–2025 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2025 г.** (I тур) и **1 февраля 2025 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2024–2025 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.1. Существуют ли четыре попарно различных положительных числа a, b, c, d, при которых все четыре числа $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{b+c}{b-c}$, $\frac{c+d}{c-d}$, $\frac{d+a}{d-a}$ — целые? (*В. Шурыгин*)

Ответ. Существуют.

Решение. Пусть $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 6$. Тогда $\frac{a+b}{a-b} = -7$, $\frac{b+c}{b-c} = -9$, $\frac{c+d}{c-d} = -11$, $\frac{d+a}{d-a} = 9$.

11.2. Вещественные числа x, y, z таковы, что $2x > y^2+z^2$, $2y > z^2+x^2$, $2z > x^2 + y^2$. Докажите, что каждое из чисел x, y, z меньше 1. (*Н. Агаханов*)

Первое решение. Сложим первые два неравенства. Преобразуя, получаем неравенство:

$$0 > (x-1)^2 + (y-1)^2 + 2(z^2-1).$$

Следовательно, $z^2 < 1$. Тогда $z < 1$, аналогично для других двух переменных.

Второе решение. Не умаляя общности, предположим, что $x \geqslant y \geqslant z$. Тогда $2y \geqslant 2z > x^2 + y^2$. Добавив к обеим частям неравенства $1 - 2y$, имеем: $1 > x^2 + (y-1)^2 \geqslant x^2$, откуда наибольшее из чисел $x < 1$. Значит, и все числа меньше 1.

Третье решение. Из условия следует, что $2x > y^2+z^2 \geqslant 0$, аналогично y, $z > 0$. Также $2x > y^2 + z^2 \geqslant 2yz$ по неравенству о средних. Значит, $x > yz$, аналогично $y > zx$ и $z > xy$. Не умаляя общности можно считать, что x — минимальное из чисел x, y, z, тогда $y \geqslant x > yz$, откуда $z < 1$, аналогично $y < 1$, а тогда и $x < 1$.

11.3. В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, начинает Даша. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня — на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша? (*А. Кузнецов*)

Ответ. 300.

Решение. Сначала приведём стратегию за Соню. Пока она не получила больше 299 монет, перед её ходом на доске остаётся хотя бы 101 монета. Разобьем доску на 100 квадратов 2×2. Получается, что какие-то две монеты лежат в одном и том же квадрате 2×2. Если эти две монеты соседние по стороне, то Соня надвигает одну на другую, и получает ещё одну монету. Если они стоят по диагонали, то Соня сдвигает одну из них в столбец к другой (здесь и далее столбец имеет длину 2, строка — длину 200). Теперь, какой бы ход ни сделала Даша, эти две монетки всё ещё будут соседними по стороне (либо одна будет снята и уйдёт в доход Сони), значит, своим следующим ходом Соня сможет получить ещё одну монетку. Таким образом, Соня всегда сможет увеличивать свой выигрыш, пока он меньше 300.

Теперь покажем, как играть за Дашу, чтобы Соня не получила больше 300 монет. Пронумеруем столбцы числами от 1 до 200 по порядку, выберем в каждом нечётном столбце по одной монетке и мысленно покрасим их в красный цвет. Даше достаточно обеспечить, чтобы красные монетки всегда оставались на доске. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы две красные монеты никогда не попадали в одну клетку, потому что когда в клетку попадают красная и не красная монеты, можно считать, что с доски снимается не красная.

Назовём расположение монет на доске *стабильным*, если по одной красной монете лежит в столбцах $1, 3, 5, \ldots, 197$, а ещё одна располагается в одном из двух последних столбцов 199, 200. Легко видеть, что после любого хода из стабильной позиции две красные монеты не окажутся в одной клетке. Даша будет играть так, чтобы после каждого её хода получалась стабильная позиция. Если после хода Сони позиция осталась стабильной, то Даша двигает сотую красную фишку между двумя последними столбцами, так же Даша поступит и своим первым ходом. Если же после хода Сони позиция перестала быть стабильной, то Соня подвинула одну из красных монет из некоторого столбца x в соседний столбец. Тогда Даша своим ходом вернёт её в столбец x. Таким образом, на доске всегда останется хотя бы 100 монет, и Соня заработает не более трёхсот рублей.

Комментарий.

Решение разбивается на две части: (A) — стратегия за Соню, (B) — стратегия за Дашу. Баллы, набранные за разные части, суммируются.

(A) Полная стратегия за Соню с обоснованием — 3 балла.

Эта часть состоит из трёх шагов:

(A1) Указано, что пока на столе есть хотя бы 101 монета, то какие-то две монеты располагаются в двух соседних строках и столбцах.

(A2) Показано, что Соня может забрать себе одну монету, когда две монеты лежат в соседних клетках.

(A3) Показано, что Соня может забрать себе одну монету за два хода, если они лежат в соседних по диагонали клетках.

Ситуация 1: Если а решении есть формулировки всех трёх шагов (A1)–(A3) с необходимыми логическими связями между ними, но в некоторых шагах допущены ошибки — выставляется 2 балла, если ошибка допущена в одном из пунктов, и 1 балл, если ошибки хотя бы в двух шагах.

Приведём примеры возможных ошибок.

Ошибка в (A1): неверное доказательство утверждения (например, с использованием «худшего случая»).

Ошибки в (A3). Во-первых, может быть сказано, что Соня ходит одной монетой просто в клетку, соседнюю с другой (а не в клетку того же столбца) — такая стратегия не работает. Во-вторых, после хода в соседний столбец может быть разобран лишь один из случаев, в котором Даша двигает или не двигает одну из монет.

Ситуация 2: В решении нет одного из шагов (A1), (A2), (A3).

Если есть любые два из этих шагов или лишь шаг (A3) — 1 балл, иначе 0 баллов.

(B) Стратегия за Дашу с обоснованием — 4 балла.

(B0) Лишь идея сохранять все красные монеты — 0 баллов.

(B1) Стратегия с возвратом монеты в тот же столбец, которая не работает, если Соня подвинула красную монету, не меняя её столбца — 2 балла.

11.4. Найдите все такие пары целых чисел m и $n > 2$, что $((n-1)! - n) \cdot (n-2)! = m(m-2)$.

Напомним, что $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до k. (*А. Кузнецов*)

Ответ. $m = 1$, $n = 3$.

Решение. Заметим, что $((n-1)!-1)((n-2)!-1) = (n-1)! \cdot (n-2)! - (n-1)! - (n-2)! + 1 = ((n-1)! - n) \cdot (n-2)! + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$. Пусть $n > 4$. Заметим, что числа $(n-1)! - 1$ и $(n-2)! - 1$ взаимно просты. Предположим, что это не так, и оба этих числа делятся на простое число p. Тогда число $(n-1)! - 1 - ((n-2)! - 1) \cdot (n-1) = n - 2$ тоже делится на p. Тогда $(n-2)!$ делится на p, а $(n-2)! - 1$ не кратно p, противоречие. Таким образом, произведение взаимно простых чисел $(n-1)! - 1$ и $(n-2)! - 1$ — точный квадрат, тогда и каждое из них точный квадрат. Однако, число $(n-1)! - 1$ при $n > 4$ даёт остаток 3 при делении на 4, поэтому оно точным квадратом быть не может. Остаётся разобрать случаи $n \leqslant 4$. При $n = 4$ получается $(m-1)^2 = 5$, решений нет. При $n = 3$ мы получаем: $(m-1)^2 = 0$, что даёт единственное решение $m = 1, n = 3$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Потерян хотя бы один случай — не более 6 баллов.

Получено равенство $((n-1)!-1)((n-2)!-1) = (m-1)^2$ — 3 балла.

Доказано, что оба сомножителя в левой части являются квадратами (при $m > 1$) — ещё 1 балл.

Доказано, что не существует решений при $n \geqslant 10$ — не менее 5 баллов.

11.5. В треугольнике ABC с углом 100° при вершине A медианы BK и CN пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через точку M и параллельная BC, пересекает описанную окружность треугольника AKN в точках P и Q. Найдите сумму углов BPC и BQC. (*К. Бельский*)

Ответ. 280°.

Решение. Обозначим через R точку пересечения прямой PQ с отрезком BN (см. рис. 7). Заметим, что NK — средняя линия треугольника ABC, поэтому $NK \parallel BC \parallel PQ$. Значит, по теореме Фалеса $\frac{RN}{RB} = \frac{MK}{MB} = \frac{1}{2}$, последнее равенство следует из того, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

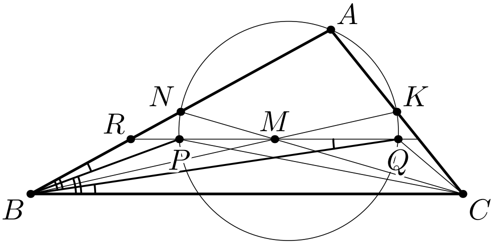

Рис. 7

Обозначим $RN = x$. Тогда $BR = 2x$, $BN = AN = 3x$, $AR = 4x$. Поскольку четырёхугольник $ANPQ$ вписанный, имеем $RP \cdot RQ = RN \cdot RA = x \cdot 4x = (2x)^2 = BR^2$. Следовательно, прямая BR касается описанной окружности треугольника BPM, поэтому $\angle ABP = \angle BQP = \angle QBC$, а тогда и $\angle ABQ = \angle CBP$. Рассуждая аналогично, получаем, что $\angle ACP = \angle QCB$. Значит,

$$\begin{gathered}\angle BPC + \angle BQC = \\ = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB + 180^\circ - \angle QBC - \angle QCB = \\ = 360^\circ - \angle PBC - \angle PCB - \angle PBA - \angle PCA = \\ = 180^\circ + \angle BAC = 280^\circ.\end{gathered}$$