10 класс

10.6. Изначально на табло горит число 0. При нажатии на кнопку число на табло изменяется на 50 или 51. На кнопку нажали 2025 раз. Могло ли после этого на табло гореть число 25, если известно, что на табло не появлялись более чем двузначные числа, а также не появлялись отрицательные числа?

(*А. Кузнецов*)

Ответ. Не могло.

Первое решение. Назовём числа $0, 1, \ldots, 49$ *маленькими*, а остальные числа, которые могут появиться на табло, т.е. числа $50, 51, \ldots, 99$ — *большими*. Заметим, что после нажатия из маленького числа обязательно получается большое, а из большого числа — маленькое. Значит, после нечётного количества операций на табло будет гореть большое число.

Второе решение. Выстроим все целые числа от 0 до 99 в цепочку

$$50-0-51-1-52-2-53-3-54-4-\ldots-97-47-98-48-99-49.$$

Заметим, что если какое-то число горит на табло, то следующим числом может быть только соседнее число в цепочке. Но так как числа 0 и 25 стоят в цепочке на местах одной чётности, получить из числа 0 число 25 за нечётное количество шагов невозможно.

Комментарий. Только верный ответ без обоснования — 0 баллов.

10.7. Дана трапеция $ABCD$. Известно, что $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке E, лежащей внутри трапеции. Докажите, что описанные окружности треугольников ABE и CDE касаются. (*А. Терёшин*)

Решение. По условию $BC \perp AB$ и $AD \perp AB$, поэтому $BC \parallel AD$ — основания трапеции. Пусть M и N — середины AB и CD, так что MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (см. рис. 2). При этом MN параллельна основаниям, поэтому $MN \perp AB$, и значит, MN — серединный перпендикуляр к AB. Значит, центр окружности (ABE) лежит на прямой MN.

Положим $x = \angle BCE = \angle ECD = \frac{1}{2}\angle BCD$, $y = \angle CDE =$

$= \angle EDA = \frac{1}{2}\angle CDA$. Из параллельности $BC \parallel AD$ следует, что $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$, поэтому $x + y = 90^\circ$.

Видим, что треугольник CED — прямоугольный ($\angle CED = 90^\circ$), а значит, N — центр окружности (CED).

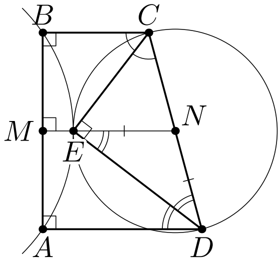

Рис. 2

Далее, в прямоугольном треугольнике CED имеем $EN = ND$, поэтому $\angle NED = \angle EDN = y$, а из равенства углов $\angle NED = \angle EDA$ следует $EN \parallel AD$, поэтому E лежит на прямой MN.

Итак, E — общая точка окружностей (ABE) и (CDE), лежащая на их линии центров MN. Значит, эти окружности касаются (в точке E).

Замечание. Если доказано, что E лежит на средней линии, завершить решение можно следующим образом, без привлечения центров окружностей. Пусть K и L — проекции точки E на основания BC и AD. Так как E лежит на средней линии, получаем, что E — середина KL. Тогда KL касается окружности (ABE) (из симметрии ABE относительно серединного перпендикуляра к AB). Далее $\angle CEK = 90^\circ - \angle BCE = 90^\circ - x = y$. Так как $\angle CEK = \angle CDE$, получаем, что KL касается окружности (CED). Таким образом, KL является общей касательной окружностей (ABE) и (CDE).

Комментарий. Доказано, что центр окружности (ABE) лежит на средней линии — добавляется 1 балл.

Доказано, что E лежит на средней линии или что касательная к окружности (ABE), проведённая в точке E, перпендикулярна основаниям трапеции — добавляется 1 балл.

Доказано, что $\angle CED = 90^\circ$ — добавляется 1 балл.

10.8. В клетчатом прямоугольнике 2×100 каждую клетку красят в белый или чёрный цвет. *Доминошкой* будем называть клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1. Оказалось, что существует единственный способ разбить данный прямоугольник 2×100 на доминошки так, чтобы каждая доминошка покрывала хотя бы 1 чёрную клетку. Какое наибольшее количество клеток могло быть покрашено в чёрный цвет? (*И. Лобацкий*)

Ответ. 120.

Решение. Пусть прямоугольник 2×100 разбит на доминошки. Двигаясь слева направо, понимаем, что горизонтальные доминошки объединяются в *блоки* 2×2. Далее под *блоком* понимаем такой блок 2×2 из двух горизонтальных доминошек.

Назовём *хорошим* разбиение на доминошки, в котором в каждой доминошке хотя бы одна клетка чёрная. Назовём раскраску *хорошей*, если при ней существует ровно одно хорошее разбиение.

1) Приведём *пример* хорошей раскраски, в которой 120 чёрных клеток. Красим первый столбец белым, следующие 3 столбца — черным, пятый столбец — белым, и далее продолжаем с периодом 5 (см. рис. 3).

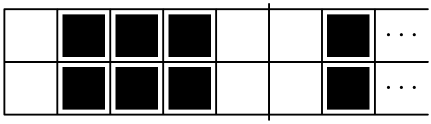

Рис. 3

Тогда разобьём наш прямоугольник на прямоугольники $2 \times \times 5$ и в каждом из них пусть слева и справа находятся блоки, а посередине — вертикальная доминошка. Видим, что получено хорошее разбиение.

Покажем, что оно единственно. Посмотрим на границу между 5-м и 6-м столбцами. Эта граница не может находиться внутри блока, значит, эта граница обязательно должна присутствовать в разбиении и отрезать прямоугольник $2 \times \times 5$. Далее продолжим аналогичные рассуждения с отрезанием прямоугольников 2×5. Остаётся разобраться, как может быть устроено хорошее разбиение для прямоугольника 2×5. В первом столбце не может быть вертикальная доминошка, поэтому в 1-м и 2-м столбцах точно находится блок. Аналогично в 4-м и 5-м столбцах находится вертикальный блок. Тем самым хорошее разбиение однозначно восстановлено. Обоснование того, что наша раскраска хорошая, завершено.

2) *Оценка.*

Рассмотрим хорошее разбиение прямоугольника 2×100. В каждом блоке не более двух чёрных клеток, иначе мы можем заменить две горизонтальные доминошки этого блока на вертикальные, и разбиение останется хорошим.

В вертикальной доминошке может быть одна чёрная клетка или две чёрных клетки. В первом случае вертикальную домношку назовём *светлой*, а во втором — *тёмной*. Если у нас k тёмных доминошек, то в них $2k$ чёрных клеток, а остальная площадь $(200-2k)$ разбита на блоки и светлые доминошки, т.е. в ней не более половины площади занимают чёрные клетки. Итого чёрных клеток не более $2k+(100-k) = 100+k$. Остаётся понять, что тёмных доминошек не более 20.

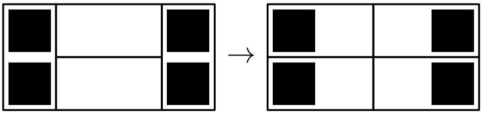

Рис. 4

Вертикальная доминошка не может граничить с тёмной доминошкой, иначе эту пару можно заменить на блок (из двух горизонтальных доминошек), и разбиение останется хорошим. Значит, граничить с тёмной доминошкой может только блок. К одному и тому же блоку слева и справа не могут примыкать две тёмные доминошки, иначе в образованном ими прямоугольнике 2×4 можно заменить все доминошки на горизонтальные, и разбиение останется хорошим (см. рис. 4). Рассмотрим две ближайшие друг к другу тёмные доминошки. Промежуток (по горизонтали) между ними не может составлять 0, 1, 2 или 3 клетки (в последнем случае два блока, соседних с этими тёмными доминошками, должны пересекаться, что невозможно). Суммируя длины промежутков для $k-1$ пар ближайших тёмных доминошек, получаем, что количество вертикалей не менее $k + 4(k-1) = 5k-4$. Но оно равно 100. Отсюда $5k-4 \leqslant 100$ и $5k \leqslant 104$, что невозможно при $k \geqslant 21$. Неравенство $k \leqslant 20$ установлено. Доказательство оценки завершено.

Комментарий. Только верный ответ — баллы не добавляются.

Приведён верный пример раскраски с обоснованием существования и единственности хорошей раскраски — 3 балла (в случае, если не доказана единственность — снимается 1 балл, если предъявлена только раскраска без хорошего разбиения — снимается 2 балла).

Полностью доказана оценка $N \leqslant 120$ — 4 балла.

(Баллы за продвижения в оценке и примере суммируются.)

За отсутствие доказательства того, что в разбиении на доминошки горизонтальные доминошки встречаются блоками «одна над другой», баллы не снижаются.

10.9. Назовём натуральное число *однобоким*, если оно больше 1, и все его простые делители заканчиваются на одну и ту же цифру. (Например, числа 19 и $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$ — однобокие, а число $682 = 2 \cdot 11 \cdot 31$ — нет.) Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия с разностью, не превышающей 2025, состоящая из 150 натуральных чисел, каждое из которых — однобокое?

(*А. Чиронов*)

Ответ. Не существует.

Решение. Пусть у нас есть возрастающая прогрессия с разностью d из 150 однобоких чисел. Разберёмся, что мешает числу d быть слишком маленьким.

Будем использовать такое известное *утверждение.*

Пусть d взаимно просто с натуральным m. Тогда среди любых m последовательных членов арифметической прогрессии с разностью d есть член, делящийся на m. (Более того, числа $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(m-1)d$ дают все m различных остатков при делении на m; поскольку если остатки у чисел $a+\ell d$ и $a+kd$ для некоторых $0 \leqslant k < \ell < m$ совпали, то $\ell d - kd = (\ell - k)d$ должно делиться на m, а значит, в силу взаимной простоты d и m, $(\ell - k)$ должно делиться на m, что неверно.)

Далее, пусть p и q — два простых числа, оканчивающиеся на разные цифры, причём такие, что $pq \leqslant 150$; назовем такую пару *вредной.* Тогда если d не делится ни на одно из чисел p, q, то, согласно *утверждению*, в нашей прогрессии есть член, делящийся на pq, что невозможно для однобокого числа.

Вывод: для каждой вредной пары простых чисел d делится хотя бы на одно из них.

Теперь рассмотрим простые числа 2, 5, 7, 11, 13. Любые два из них образуют вредную пару, значит, d делится на все эти числа, кроме, возможно, одного. Кроме того, 3 и 19 — тоже вредная пара, значит, d делится хотя бы на одно из них. Отсюда $d \geqslant (2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) \cdot 3 = 2310 > 2025$. Противоречие.

Комментарий. Задача верно решена для d с некоторыми ограничениями, например, для нечётных d, для d, кратных 3, и т.д. — 2 балла (не суммируется с другими продвижениями).

Доказано для некоторых пар простых чисел, что d делится хотя бы на одно из чисел этой пары — 2 балла.

При использовании *утверждения*, при верной его формулировке за отсутствие его доказательства баллы не снимаются.

10.10. На графике функции $y = x^2$ отметили 1000 различных точек, абсциссы которых — целые числа из отрезка $[0; 100000]$. Докажите, что можно выбрать шесть различных отмеченных точек A, B, C, A', B', C' таких, что площади треугольников ABC и $A'B'C'$ равны. (*А. Терёшин*)

Решение. Докажем лемму.

Лемма. *Пусть 6 точек A, B, C, A', B', C' лежат на параболе, и их абсциссы равны a, b, c, a', b', c' соответственно. Пусть $a' - a = b' - b = c' - c$. Тогда $S_{ABC} = S_{A'B'C'}$.*

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $a < b < c$. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точек A, B, C на ось Ox. Тогда S_{ABC} выражается через площади прямоугольных трапеций: $S_{ABC} = S_{ACC_1A_1} - S_{ABB_1A_1} - S_{BCC_1B_1}$. По формуле площади трапеции $S_{ACC_1A_1} = \dfrac{(AA_1 + CC_1) \cdot A_1C_1}{2} = \dfrac{(a^2 + c^2)(c - a)}{2}$. Аналогично выражаем площадь для других трапеций, и после преобразований получаем $S_{ABC} = \dfrac{a^2c - ac^2 + c^2b - cb^2 + b^2a - ba^2}{2} = \dfrac{(c - a)(c - b)(b - a)}{2}$. То же выражение получим и для $S_{A'B'C'}$, поскольку $c' - a' = c - a$, $c' - b' = c - b$, $b' - a' = b - a$. $\square$

Положим $k = 1000$, $\ell = 100000$. Упорядочим абсциссы отмеченных точек по возрастанию: $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant \ell$. Рассмотрим $k - 1$ отрезков $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\ldots$, $[x_{k-1}, x_k]$. Если среди них найдутся 5 отрезков равной длины, то мы сможем найти 6 различных отмеченных точек, удовлетворяющих условию леммы, и значит, утверждение задачи будет выполнено. Действительно, занумеруем эти 5 равных отрезков по возрастанию абсцисс левых концов. Тогда в качестве проекций точек A, B, C возьмём левые концы 1-го, 3-го и 5-го отрезков, а в качестве проекций A', B', C' возьмём правые концы тех же отрезков. Легко видеть, что выбранные таким образом точки A, B, C, A', B', C' различны.

Предположим теперь, что среди $k-1=999$ отрезков $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, $\ldots$, $[x_{k-1},x_k]$ нет пяти отрезков равной длины. Тогда для каждой длины i среди этих отрезков есть не более четырёх отрезков длины i. Следовательно, суммарная длина этих отрезков не меньше чем $4\cdot 1+4\cdot 2+\ldots+4\cdot 249+3\cdot 250 = 125250 > \ell = 100000$. Получили противоречие, завершающее решение.

Замечание 1. Если в условии задачи убрать требование различности точек, то решение можно упростить: достаточно научиться выбирать 4 отмеченные точки A, B, A', B', абсциссы a, b, a', b' которых удовлетворяют равенству $b-a=b'-a'$; в таком случае $S_{ABA'}=S_{B'BA'}$ (или, эквивалентно, $AB' \parallel A'B$).

Замечание 2. Из оценки сверху площадей треугольников решение не получается: можно показать, что площадь треугольника ABC, где A, B, C — отмеченные точки из условия, имеет вид $m/2$, где $m \leqslant \frac{\ell^3}{8}$ — натуральное; количество таких значений гораздо больше, чем количество треугольников с вершинами в отмеченных точках (равное C_k^3).

Комментарий. Получено верное решение задачи с возможностью совпадения точек в наборе A, B, C, A', B', C' — 2 балла (не суммируются с другими продвижениями).

Доказана лемма из решения — добавляется 2 балла.