Материалы для проведения регионального этапа

LI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2024–2025 учебный год

Первый день

31 января – 1 февраля 2025 г.

Москва, 2025

Сборник содержит материалы для проведения III этапа LI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. Г. Храмцов. Г. Р. Челноков.

А также: С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, А. И. Храбров, И. И. Фролов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024–2025 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024–2025 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2025 г.** (I тур) и **1 февраля 2025 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2024–2025 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два различных вещественных корня x_1 и x_2. Известно, что $f(x_1 + x_2) = 2025$. Чему может равняться c? (*Н. Агаханов*)

Ответ. 2025.

Первое решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Значит, $f(x_1 + x_2) = f(-\frac{b}{a}) = a \cdot (-\frac{b}{a})^2 + b \cdot (-\frac{b}{a}) + c = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a} + c = c$. Тогда из условия следует, что $c = 2025$.

Второе решение. График $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ — вертикальной прямой, проходящей через вершину параболы. Поэтому для любых двух значений $x = t_1$, $x = t_2$ таких, что $\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, будет выполнено $f(t_1) = f(t_2)$. В частности, $f(x_1 + x_2) = f(0)$. Но $f(0) = c$.

Третье решение. Подставим: $f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c = ax_1^2 + 2ax_1x_2 + ax_2^2 + bx_1 + bx_2 + c = (ax_1^2 + bx_1 + c) + (ax_2^2 + bx_2 + c) + 2ax_1x_2 - c = f(x_1) + f(x_2) + (2ax_1x_2 - c)$. Так как x_1 и x_2 — корни, то $f(x_1) = f(x_2) = 0$, а по теореме Виета $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, получаем, что $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + (2ax_1x_2 - c) = 0 + 0 + 2c - c = c$.

Комментарий. Присутствует верный ответ (без обоснования) — добавляется 1 балл.

Сумма $x_1 + x_2$ выражена через коффициенты уравнения — 2 балла.

10.2. В стране 30 городов и 30 двусторонних авиалиний, соединяющих города по циклу. Можно ли добавить дополнительно ещё 10 авиалиний так, чтобы после этого из любого города можно было добраться до любого другого не более чем за 4 перелёта? (*П. Кожевников*)

Ответ. Можно.

Решение. Занумеруем города числами 0, 1, 2, ..., 29 так, чтобы изначально у нас был цикл $0 - 1 - 2 - 3 - \ldots - 28 - 29 - 0$. Добавим 9 авиалиний $0 - 3$, $0 - 6$, $0 - 9$, ..., $0 - 27$ (а 10-ю авиалинию добавим какую угодно).

Покажем, что условие выполняется. Возьмем любые два города A и B. От A можно не более чем за 1 перелёт добраться до города C с номером, кратным 3. Аналогично, от B можно не более чем за 1 перелёт добраться до города D с номером, кратным 3. А между городами C и D либо есть путь не более, чем из двух перелётов, так как все города с номерами, кратными 3, соединены с городом номер 0.

Комментарий. Если приведён верный пример, но отсутствует обоснование его правильности — 6 баллов (т.е. снимается 1 балл).

Если приведён верный пример, в котором добавлено менее 10 авиалиний — баллы не снижаются.

10.3. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 2$ и $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 4$. Докажите, что из чисел a, b, c какие-то два отличаются более чем на 2. (*А. Кузнецов*)

Решение. Вычтем из второго равенства первое и разложим левую часть на множители, получим:

$$(a-b)(b-c)(c-a) = 2. \quad (*)$$

Не умаляя общности (в условии имеется циклическая симметрия переменных a, b, c), будем считать, что c — наибольшее из данных чисел. Тогда $c - a \geqslant 0$, но из $(*)$ видим, что $c - a \neq 0$. Значит, $c - a > 0$. Аналогично $b - c < 0$. Тогда из $(*)$ следует $a - b < 0$. Получается $a < b < c$.

Обозначим $z = c - a$, $x = b - a$, $y = c - b$, так что $x > 0$, $y > 0$, $z = x + y$; тогда $(*)$ принимает вид $xyz = 2$. Нам нужно доказать, что $z > 2$.

Заметим, что $4xy \leqslant (x+y)^2$, так как это неравенство преобразуется к виду $(x-y)^2 \geqslant 0$ (или следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом). Отсюда $4xy \leqslant z^2$ и далее

$$2 = xyz = 4xy \cdot \frac{z}{4} \leqslant z^2 \cdot \frac{z}{4} = \frac{z^3}{4}.$$

Получаем $2 \leqslant \frac{z^3}{4}$, откуда $z^3 \geqslant 8$ и поэтому $z \geqslant 2$.

Остаётся показать, что $z = 2$ невозможно. Если $x \neq y$, то $(x-y)^2 > 0$, и тогда в предыдущем рассуждении мы получим строгое неравенство $z > 2$. Значит, $z = 2$ возможно лишь при $x = y = 1$. Рассмотрим этот случай отдельно.

В этом случае $v = a + 1 > 1$, и $c = a + 2 > 2$. Тогда

$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2c > 1^2 \cdot 2 = 2,$$

что противоречит первому равенству из условия задачи.

Комментарий. При верном решении доказано только нестрогое неравенство ($c - a \geqslant 2$) (т.е. не рассмотрен или неверно рассмотрен случай обращения в равенство) — снимается 2 балла.

Получено равенство $(a - b)(b - c)(c - a) = 2$ — 2 балла (если просто сделано вычитание, но нет разложения на множители, то баллы не начисляются).

10.4. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости отметить конечное число узлов сетки так, чтобы было отмечено не менее двух точек, и для любой пары отмеченных точек нашлась бы отмеченная точка, равноудалённая от них? (*И. Ефремов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что требуемое возможно. Введём систему координат так, чтобы узлы являлись в точности точками с целыми координатами.

Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке. Предположим, что нашлись два отмеченных узла разных цветов: A — белый, B — чёрный. Пусть нашёлся узел C, равноудалённый от них, и пусть, не умаляя общности, C — белый. Тогда у вектора $\vec{CA}$ координаты одной чётности, значит, по теореме Пифагора CA^2 равно сумме квадратов целых чисел одной чётности, т.е. CA^2 чётно. Аналогично рассуждая, получаем, что CB^2 нечётно — противоречие.

Итак, все отмеченные узлы имеют один цвет. Проведём через все узлы этого цвета прямые с угловым коэффициентом ± 1 — получилась новая квадратная сетка с шагом (длиной стороны квадрата) $\sqrt{2}$. Видим, что отмеченные точки являются узлами этой новой сетки. Продолжая рассуждать аналогично, получим, что отмеченные узлы лежат на квадратной сетке с шагом $(\sqrt{2})^2$, $(\sqrt{2})^3$, $(\sqrt{2})^4$, $\ldots$. Но шаг сетки не может превышать константы — расстояния между двумя фиксированными отмеченными точками. Противоречие.

Замечание 1. Утверждение задачи станет неверным, если в условии задачи позволить отмеченным точкам не быть узлами решетки. Контрпримером может служить множество вершин правильного нечётноугольника.

Замечание 2. После доказательства того, что все отмеченные точки имеют один цвет (в шахматной раскраске), завершить решение можно по-другому.

Предположим теперь, что есть два отмеченных узла P и Q с абсциссами разной чётности. Рассмотрим узел R такой, что $RP = RQ$. Пусть, для определённости, $\vec{RP}$ имеет нечётную абсциссу (а значит, и нечётную ординату). Тогда $\vec{RQ}$ имеет чётную абсциссу (а значит, и чётную ординату). Тогда RQ^2 делится на 4, RP^2 имеет вид $(2k+1)^2 + (2l+1)^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$ — не делится на 4 — противоречие.

Итак, мы доказали, что все отмеченные узлы лежат на клетчатой сетке со стороной 2. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что все отмеченные узлы лежат в некоторой сетке с шагом 2^k для любого натурального k, что, очевидно, невозможно.

Комментарий. Доказано, что все отмеченные точки должны иметь один цвет в шахматной раскраске (или, эквивалентно, иметь одинаковую (или разную) чётность координат) — 2 балла.

10.5. Высоты BD и CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, высоты треугольника ADE пересекаются в точке F, точка M — середина стороны BC. Докажите, что $BH + CH \geqslant 2FM$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Отразим H относительно AB, получим точку C', лежащую на CH и такую, что E — середина HC' и $BC' = BH$ (см. рис. 6). Аналогично, точка B', симметричная H относительно AC, такова, что D — середина HB' и $CB' = CH$.

Так как $DF \perp AB$, имеем $DF \parallel CE$. Аналогично $EF \parallel BD$. Значит, $HEFD$ — параллелограмм. В треугольнике $HC'B'$ точки E и D — середины сторон. Отметим также середину F' стороны $B'C'$, тогда $HEF'D$ — параллелограмм. Получается, что F' совпадает с F, т.е. F — середина $B'C'$. Так как M и F — середины BC и $B'C'$, имеем векторное равенство

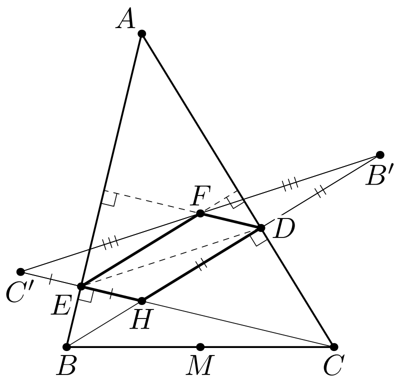

Рис. 6

$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CB'})$. Тогда по неравенству треугольника ($|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$) получаем $MF \leqslant \frac{1}{2}(BC' + CB')$, что равно $\frac{1}{2}(BH + CH)$. Этим доказано нужное неравенство.

Замечание. Из решения несложно понять, что указанное в условии неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $BC' \parallel CB'$, что эквивалентно $\angle BAC = 60^\circ$.

Используемую «векторную теорему о средней линии» можно доказать, сложив равенства $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'F}$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'F}$ и воспользовавшись тем, что $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{C'F} + \overrightarrow{B'F} = \vec{0}$.

Комментарий. Использованы точки, симметричные H относительно AB и AC — 1 балл.

За начальные наблюдения ($HEFD$ — параллелограмм, и т.п.) баллы не добавляются.

При использовании «векторной теоремы о средней линии» достаточно наличия её верной формулировки (т.е. если её доказательство не приведено в работе, баллы не снимаются).