7 класс

7.1 Наступит утро ясное

На Северном полюсе после долгой полярной ночи показался первый луч Солнца. Оцените, как изменился азимут Солнца, прежде чем его диск полностью оторвался от горизонта. Восход Солнца начался 18 марта в 09:34 и закончился 19 марта в 18:10 по московскому времени.

Возможное решение:

Для наблюдателя на Северном полюсе Земли Северный полюс мира находится в зените, а суточное движение звёзд происходит параллельно горизонту (рис. 1) слева направо. Солнце также движется практически параллельно горизонту: на географическом полюсе его восход связан не с суточным движением, а с перемещением по эклиптике вследствие орбитального движения Земли.

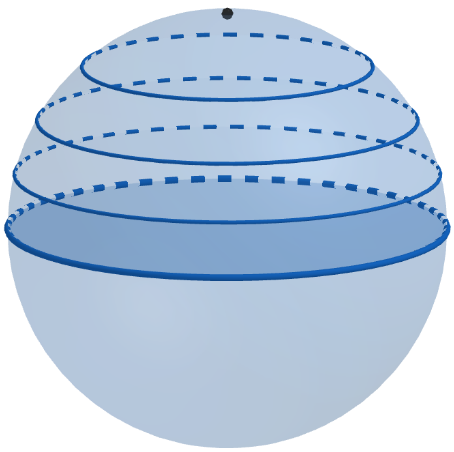

Рис. 1: Суточные параллели светил на географическом полюсе

Вычислим продолжительность восхода Солнца:

$$(24 \text{ ч} - 9 \text{ ч } 34 \text{ мин}) + 18 \text{ ч } 10 \text{ мин} =$$
$$= 32 \text{ ч } 36 \text{ мин} = 32.6 \text{ ч}.$$

Азимут Солнца, отсчитываемый вдоль горизонта по часовой стрелке, равномерно увеличивается со временем, за сутки изменяясь на 360°. Составим пропорцию и вычислим искомый путь Солнца за время восхода:

$$\frac{\Delta A}{360^\circ} = \frac{32.6 \text{ ч}}{24 \text{ ч}} \quad \Longrightarrow \quad \Delta A = 360^\circ \times \frac{32.6 \text{ ч}}{24 \text{ ч}} = 32.6 \text{ ч} \times 15^\circ/\text{ч} = 489^\circ.$$

Изменение азимута на 360° означает возвращение к той же точке горизонта. Следовательно, азимут Солнца **увеличился на** 489° − 360° = **129°.**

Критерии оценивания:

1	Вычисление продолжительности восхода *Арифметическая ошибка*	5 *−2*
2	Движение происходит (практически) параллельно горизонту	4
3	Указание на увеличение азимута в ходе суточного движения	2
4	Вычисление пути Солнца за всё время восхода (погрешность $\pm 2^\circ$) *Арифметическая ошибка*	2 *−1*
5	Вычитание оборота, итоговый ответ (погрешность $\pm 2^\circ$) *Арифметическая ошибка*	2 *−1*
	Всего	**15**

7.2 Однажды в декабре

Определите, в какой день и в каком созвездии в декабре 2024 года можно было наблюдать Луну рядом с Юпитером. Известно, что в 2024 году на декабрь пришлось два новолуния, а 7 декабря Юпитер оказался в противостоянии с Солнцем.

Возможное решение:

Период смены фаз Луны (синодический месяц) составляет 29.5 суток, а в декабре 31 день. По условию задачи на декабрь пришлось два новолуния. Это значит, что первое новолуние произошло не позже полудня 2 декабря, а второе — не раньше полудня 30 декабря. Для удобства можем пренебречь половиной суток и считать, что новолуния пришлись на 1 и 31 декабря (что, кстати, полностью соответствует действительности).

И полнолуние, и противостояние Юпитера происходят вблизи точки, противоположной Солнцу. Юпитер перемещается относительно звёзд довольно медленно (на 1 оборот требуется почти 12 лет), поэтому его смещением по небу в течение месяца можно пренебречь. Тогда в первом приближении можно сказать, что Луна оказалась рядом с Юпитером в полнолуние (рис. 2), которое наступило между двумя новолуниями, в середине месяца — наиболее вероятно, 15 декабря.

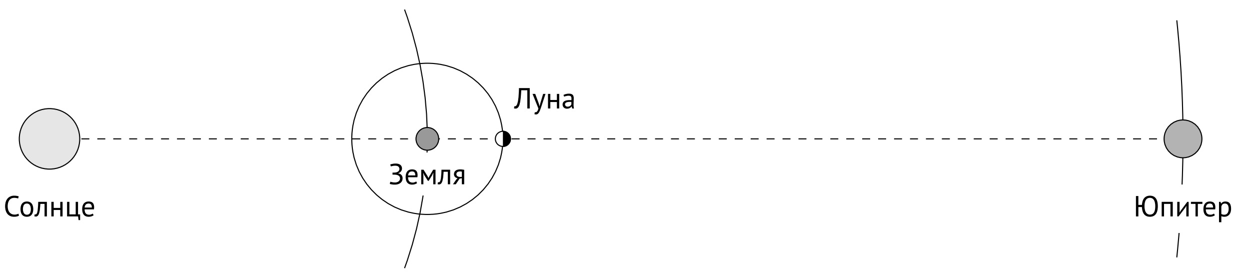

Рис. 2: Относительное расположение Солнца, Земли, Луны и Юпитера в полнолуние вблизи противостояния Юпитера. Размеры тел и орбит не в масштабе

Однако этот ответ можно уточнить. В отличие от Юпитера, «противосолнечная точка», в которой наступает полнолуние, движется относительно звёзд существенно быстрее — со скоростью, равной угловой скорости перемещения Земли по орбите, а Солнца по эклиптике, то есть $360^\circ/\text{год} \approx 1^\circ/\text{сут}$.

Противосолнечная точка находилась рядом с Юпитером 7 декабря, когда тот был в противостоянии. За промежуток времени между противостоянием и полнолунием, который составляет чуть больше недели, противосолнечная точка сдвинется на $7^\circ \div 8^\circ$ на восток, в сторону годового движения Солнца по эклиптике (см. рис. 3).

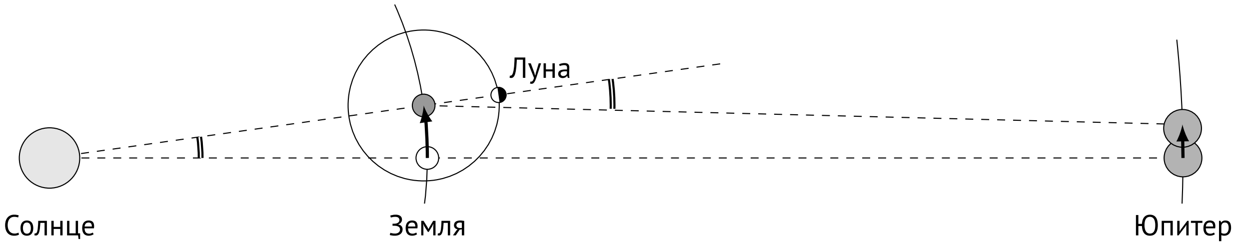

Рис. 3: Относительное расположение Солнца, Земли, Луны и Юпитера в полнолуние вблизи противостояния Юпитера (уточнённое). Размеры тел и орбит не в масштабе, направления Земля–Юпитер практически параллельны

Луна относительно звёзд движется в ту же сторону (с запада на восток) с периодом 27.3 суток (сидерический месяц), поэтому сближение Луны и Юпитера произойдёт немного раньше, чем Луна «догонит» противосолнечную точку и наступит полнолуние. На преодоление этого углового расстояния Луне потребуется примерно $8°/360° \times 27.3$ сут. ≈ 0.6 сут. Эта поправка сопоставима с погрешностью определения моментов новолуний. Сделаем вывод, что сближение Луны и Юпитера будет наблюдаться **в ночь с 14 на 15 декабря,** что в точности соответствует данным астрономического календаря.

Осталось определить созвездие. Сближение Луны и Юпитера происходит в области неба, противоположной Солнцу. Таким образом, само Солнце окажется в этой области спустя ровно половину года, то есть в первой половине июня. В июне Солнце находится в созвездиях Тельца и Близнецов, переходя из первого созвездия во второе практически сразу после момента летнего солнцестояния. Летнее солнцестояние наступает 20–21 июня, соответственно, до этой даты Солнце находится в созвездии Тельца. Следовательно, в декабре 2024 года Юпитер и Луна соединились **в Тельце.**

Критерии оценивания:

1	Определение дат новолуний с точностью 1.5 сут. *Использование сидерического месяца вместо синодического*	3 *−2*
2	Указание на то, что Юпитер практически неподвижен (или корректный учёт его движения)	2
3	Противостояние рядом с полнолунием	3
4	Вычисление даты (засчитывается ответ в пределах 14–16 декабря)	3
5	Уточнение даты: перемещение противосолнечной точки учтено ***либо*** показано, что им можно пренебречь	2
6	Верное указание созвездия (Телец) *Близнецы*	2 1
	Всего	**15**

7.3 На всех парусах

Для целей межпланетной навигации космический аппарат предлагается оснастить квадратным солнечным парусом из алюминия с длиной стороны 3000 сантиметров и толщиной 6 микрон. Определите массу такого паруса, если плотность алюминия составляет 2700 кг/м^3.

Подсказка: 1 микрон равен миллионной доле метра.

Возможное решение:
Для удобства вычислений переведём размеры паруса в метры:

$$a = 3000 \text{ см} = 30 \text{ м}, \qquad h = 6 \text{ мкм} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Определим объём паруса как объём параллелепипеда, домножив площадь квадратной грани на толщину паруса:

$$V = Sh = a^2 h = (30 \text{ м})^2 \times 6 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0.0054 \text{ м}^3.$$

Далее вычислим массу паруса, умножив объём на плотность алюминия:

$$M = \rho V = 2700 \text{ кг/м}^3 \times 0.0054 \text{ м}^3 = 14.58 \text{ кг} \approx \mathbf{15\ кг.}$$

Критерии оценивания:

1	Запись формулы для объёма паруса как произведения площади квадрата на толщину ***либо*** запись перемножения соответствующих численных величин	5
	Вместо формулы для объёма используется только формула площади грани ***либо*** *площади бокового сечения ($a \cdot h$)*	1
2	Вычисление объёма паруса с указанием единиц измерения ***либо*** подстановка формулы в итоговое выражение для массы	5
	Вместо объёма вычислена только площадь грани ***либо*** *бокового сечения*	2
	Арифметическая ошибка	*−1*
	Единицы измерения длин при вычислениях не приведены к единой	*−3*
3	Запись верной формулы связи массы, плотности и объёма	3
4	Вычисление массы паруса	2
	Арифметическая ошибка	*−1*
	Отсутствие единиц измерения в ответе	*−1*
	Всего	**15**

7.4 Тайны египетских пирамид

На одной картинке из интернета было указано:

> Скорость света: 299 792 458 м/с.
> Координаты Великой пирамиды Гизы: 29.9792458° с. ш.

И ведь действительно, указанная параллель проходит через пирамиду Хеопса! Вычислите, насколько различаются широты северного и южного краёв пирамиды. Основание пирамиды представляет собой квадрат со сторонами длиной 230 метров, ориентированными по сторонам света.
Выразите ответ в градусах.

Возможное решение:
Длина окружности Земли составляет $l = 2\pi R_{\oplus} = 2 \times 3.14 \times 6371$ км $\approx 40 \cdot 10^3$ км.

Тогда дуге в 1° соответствует расстояние $40 \cdot 10^3$ км $\times \dfrac{1^\circ}{360^\circ} \approx 111$ км.

Протяжённость пирамиды Хеопса с севера на юг равна 230 м $=$ 0.23 км, что соответствует

$$1^\circ \times \frac{0.23\text{ км}}{111\text{ км}} \approx \mathbf{0.002^\circ.}$$

Выходит, «шокирующее совпадение» значений на самом деле искусственно: речь идёт о совпадении всего лишь 3–4 цифр. Указывать координаты пирамиды с большей точностью просто не имеет смысла.

Критерии оценивания:

1	Длина окружности Земли (вычисление или использование известного значения)	5
	Арифметическая ошибка	−2
2	Выражение 1° в единицах длины (вычисление или использование известного значения). *Если участник приводит верное значение 1° в единицах длины как известный факт, за критерий 1 также полный балл*	5
	Арифметическая ошибка	−2
3	Вычисление разности широт сторон пирамиды	5
	Арифметическая ошибка	−2
	Всего	**15**

7.5 В кругу друзей

В таблице приведены экваториальные координаты звёзд некоторого скопления, находящегося на расстоянии 43 пк от Солнца.

α, °	11.1	10.4	11.6	9.4	12.4	11.2	10.2	12.3	9.0	11.0
δ, °	1.7	1.4	1.5	1.0	1.1	0.8	0.6	0.4	0.1	−0.1
α, °	12.9	9.9	12.1	9.1	10.9	12.8	9.5	12.4	10.5	11.6
δ, °	0.0	−0.5	−0.6	−1.0	−0.9	−0.9	−1.5	−1.6	−1.9	−2.1

а) Отметьте положения всех звёзд скопления:

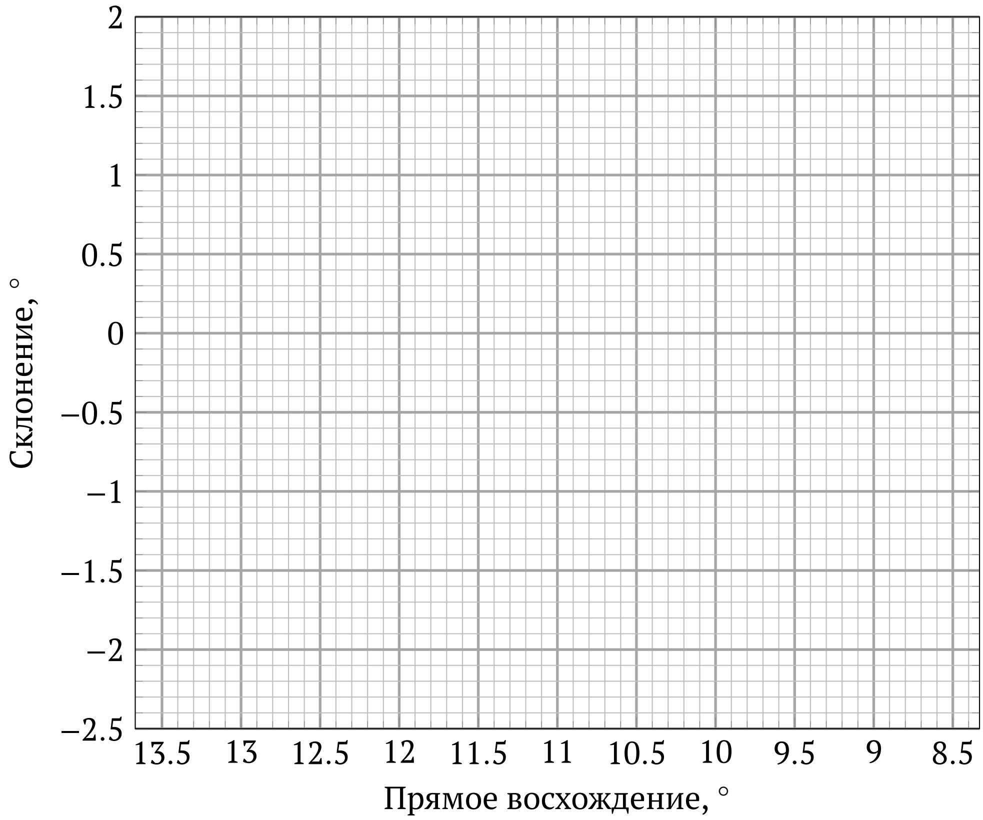

Рис. 4: Заготовка для построения диаграммы

б) Оцените угловой и пространственный диаметры скопления.

Возможное решение. Соответствие экваториальных координат (прямого восхождения и склонения) и их обозначений (α и δ соответственно) нетрудно установить, обратив внимание на разметку осей заготовки. Ось прямых восхождений направлена влево, а склонений — вверх: так увидел бы скопление житель Северного полушария Земли. На численные оценки параметров направление оси, разумеется, не влияет.

Отметим звёзды на диаграмме (рис. 5).

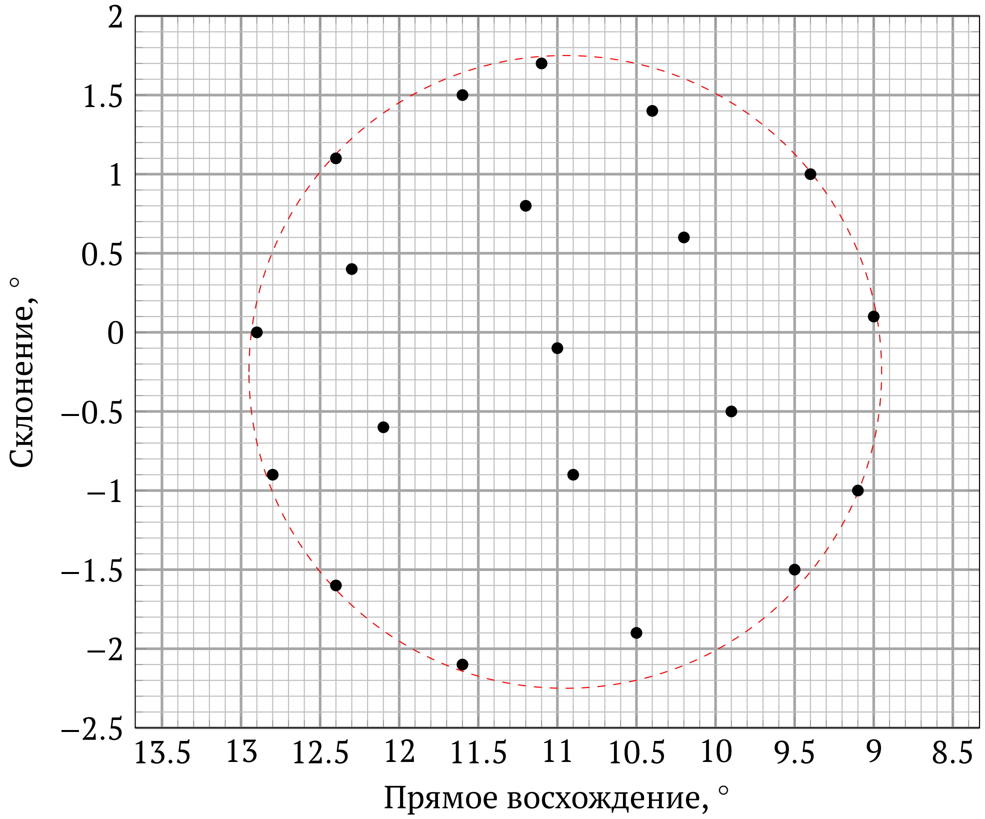

Рис. 5: Расположение звёзд скопления. Радиус пунктирной окружности = 2.0°

Заметим, что скопление выглядит округлым, поэтому для оценки углового размера скопления можно просто измерить его диаметр на рисунке линейкой. Пусть 1° на изображении соответствует отрезку длиной x см, а диаметр скопления равен y см. Тогда, подставляя конкретные значения x и y, полученные в результате измерений, определим угловой размер (диаметр) скопления:

$$\rho = 1.0^\circ \times \frac{y}{x} \approx \mathbf{4.0^\circ.}$$

Угловой размер — это угол ρ, под которым объект с линейным размером D видит наблюдатель, удалённый на расстояние r (рис. 6). В случае малого углового размера (центрального угла) дуга окружности радиусом r при малом центральном угле ρ неотличима от стягивающей её хорды. Длина дуги окружности прямо пропорциональна соответствующему ей центральному углу, а полному углу в 360° соответствует длина всей окружности $2\pi r$.

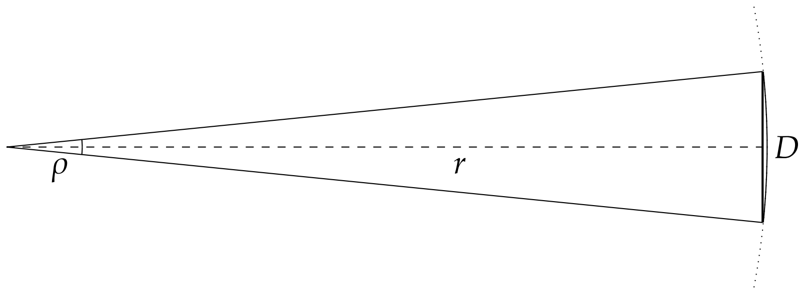

Рис. 6: К определению углового размера

В таком случае для длины хорды справедливо выражение

$$D \approx 2\pi r \cdot \frac{\rho}{360^\circ},$$

так что диаметр скопления

$$D = 2\pi r \cdot \frac{\rho}{360^\circ} = 2 \times 3.14 \times 43 \text{ пк} \times \frac{4^\circ}{360^\circ} = \mathbf{3.0\ пк.}$$

Аналогичный ответ можно получить, составив пропорцию. Например, известно, что угловой размер Солнца при наблюдении с Земли составляет около $\rho_\odot \approx 0.5^\circ$. Подставляя линейный размер Солнца $D_\odot = 2R_\odot$, расстояние от Земли до Солнца $r_\odot = 1$ а. е. и принимая во внимание, что 1 пк = 206 265 а. е., получаем:

$$\frac{\rho}{\rho_\odot} = \frac{D}{r} \cdot \frac{r_\odot}{D_\odot} \quad \Longrightarrow$$

$$D = D_\odot \cdot \frac{\rho}{\rho_\odot} \cdot \frac{r}{r_\odot} = 1.4 \cdot 10^6 \text{ км} \times \frac{4.0^\circ}{0.5^\circ} \times \frac{43 \times 206\,265 \text{ а. е.}}{1 \text{ а. е.}} \approx 1 \cdot 10^{14} \text{ км} \approx 3 \text{ пк}.$$

Отметим, что речь не идёт о шаровом скоплении в строгом понимании этого термина: настоящие шаровые скопления расположены в тысячах парсек от Солнечной системы и состоят из гораздо большего количества звёзд: от десятков тысяч до миллиона звёзд.

Критерии оценивания:

а	Все точки нанесены на график корректно	8
	Неверно отмечена одна точка	7
	Неверно отмечены 2–3 точки	5
	Неверно отмечены 4–5 точек	3
	Неверно отмечены 6–7 точек	1
	Неверно отмечены 7 и более точек	0
	Наличие более одного исправления на рисунке	*−1*
б1	Понимание углового диаметра как расстояния между наиболее удаленными точками на графике	1
	Перепутаны понятия радиуса и диаметра ⇒ следующие пункты оцениваются в полной мере, как если бы ошибки допущено не было	*−1*
б2	Масштаб графика при измерении углового диаметра (хотя бы неявно)	2
б3	Оценка углового диаметра скопления (в любых угловых единицах), допустима погрешность $\pm 0.8^\circ$	2
б4	Указание правильной связи между расстоянием, пространственным и угловым диаметрами скопления (приближённой или точной)	3
б5	Вычисление пространственного диаметра в парсеках или иных единицах длины; допустима погрешность ± 0.6 пк	4
	Арифметическая ошибка	*−1*
	Отсутствие единиц измерения в ответе	*−1*
	Всего	**20**

7.6 Щели Кирквуда

В Главном поясе астероидов существуют так называемые «щели Кирквуда» — области, где астероидов практически нет. Их появление связано с воздействием гравитации Юпитера: если периоды обращения Юпитера и астероида вокруг Солнца соотносятся как небольшие целые числа (например, $5:2$, $7:3$, $2:1$), такая орбита нестабильна.

Определите аналогичное соотношение периодов для одной из самых заметных «щелей», обозначенной буквой A на рисунке 7.

Подсказка. Известно, что период обращения тела вокруг Солнца T связан с радиусом орбиты r соотношением

$$T^2 = kr^3,$$

где k — некоторая константа.

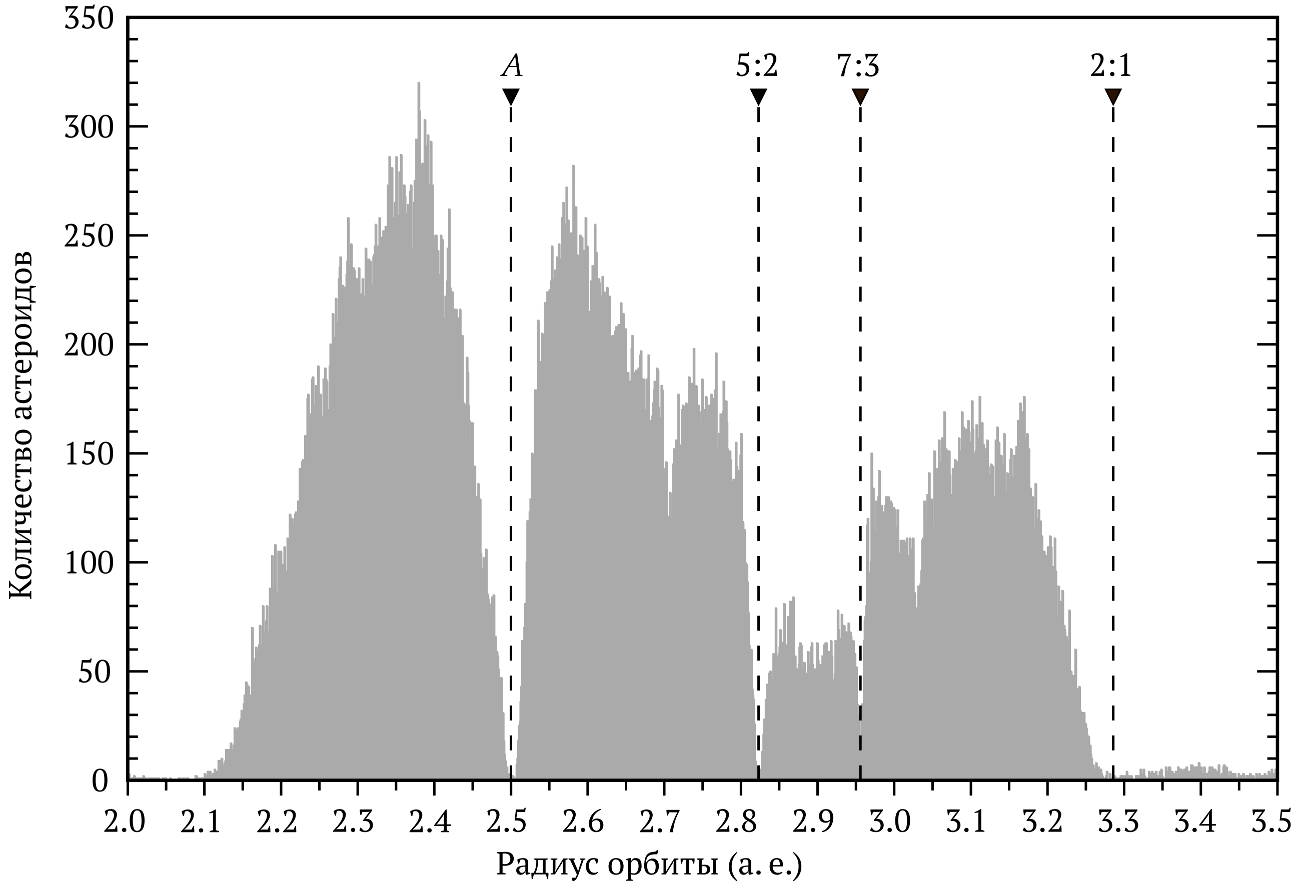

Рис. 7: Распределение астероидов Главного пояса

Возможное решение. Из рис. 7 видно, что характерный радиус орбит астероидов из «щели» A составляет $r_A = 2.5$ а. е.

Выразим отношения орбитальных периодов Юпитера и астероидов через радиусы их орбит, используя соотношение из подсказки к условию (третий закон Кеплера):

$$\frac{T_{♃}^2}{T_A^2} = \frac{kr_{♃}^3}{kr_A^3} = \frac{r_{♃}^3}{r_A^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{T_{♃}}{T_A} = \sqrt{\frac{r_{♃}^3}{r_A^3}} = \sqrt{\frac{5.2^3}{2.5^3}} = 3.00.$$

Искомое соотношение равно **3 : 1**. Период обращения Юпитера больше, так как он находится дальше от Солнца.

Альтернативное решение. Нетрудно найти значение коэффициента k для Солнечной системы. Действительно, раз выражение $T^2 = kr^3$ справедливо для любого тела, обращающегося вокруг Солнца, то оно справедливо и для Земли:

$$(1\ \text{год})^2 = k \cdot (1\ \text{а. е.})^3,$$

так что $k = 1$ год^2/а. е.^{3}, а третий закон Кеплера возможно переписать в виде

$$T^2_{[\text{год}]} = r^3_{[\text{а. е.}]}.$$

Тогда период обращения астероидов из «щели» A

$$T_A = \sqrt{kr_A^3} = \sqrt{2.5^3}\ [\text{год}] = 3.95\ \text{год} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{T_{♃}}{T_A} = \frac{11.86\ \text{год}}{3.95\ \text{год}} = 3.00 = 3 : 1.$$

Ещё одно решение. Возможно решить задачу не используя справочные данные о Юпитере. В самом деле, достаточно заметить, что диаграмма содержит сведения о радиусах орбит астероидов в а. е., а также о периодах их обращения вокруг Солнца в относительных единицах (периодах обращения Юпитера вокруг Солнца $T_{♃}$). Поставленная задача сводится к нахождению периода обращения астероидов с радиусом орбиты r_A в тех же относительных единицах.

Например, для щели на $r_B = 2.82$ а. е. имеем $T_B = \frac{2}{5}T_{♃}$. С учётом третьего закона Кеплера имеем

$$T_A = \sqrt{\frac{r_A^3}{r_B^3}}T_B = \sqrt{\frac{2.50^3}{2.82^3}} \times \frac{2}{5}T_{♃} \approx 0.333\,T_{♃},$$

то есть $T_{♃} : T_A \approx 3 : 1$.

Критерии оценивания:

1	Определение радиуса орбиты, соответствующего щели A, с погрешностью не более ± 0.01 а. е.	6
2	Выражение для отношения периодов или определение коэффициента k	7
3	Вычисление ответа и запись в требуемом виде $(3 : 1)$ *Арифметическая ошибка* *Ответ вида* $1 : 3$ *(инвертированный порядок) без указания, что период Юпитера больше, чем у астероидов Главного пояса* *Запись ответа в виде обыкновенной дроби с большими числителем и знаменателем (например,* $900 : 299$*), поскольку периоды должны соотноситься как «небольшие целые числа»*	$4 + 3$ *−3* *−3* *−2*
	Всего	**20**

Справочные данные

Некоторые основные физические и астрономические постоянные

Гравитационная постоянная	G	$= 6.674 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$
Скорость света в вакууме	c	$= 2.998 \cdot 10^8$ м/с
Масса протона	m_p	$= 1.673 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса электрона	m_e	$= 9.109 \cdot 10^{-31}$ кг
Астрономическая единица	1 а. е.	$= 1.496 \cdot 10^{11}$ м
Парсек	1 пк	$=$ 206 265 а. е. $= 3.086 \cdot 10^{16}$ м

Данные о Солнце, Земле и Луне

Светимость Солнца	$L_\odot$	$= 3.88 \cdot 10^{26}$ Вт
Видимая звёздная величина Солнца	$m_\odot$	$= -26.8^{\mathrm{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot,\,\mathrm{eff}}$	$= 5.8 \cdot 10^3$ К
Поток энергии на расстоянии Земли	$E_\odot$	$= 1.4 \cdot 10^3$ Вт/м^2
Тропический год		= 365.24219 сут.
Средняя орбитальная скорость		= 29.8 км/с
Звёздные сутки		= 23 ч 56 мин 04 с
Наклон экватора к эклиптике	ε	$= 23.44^\circ$
Сидерический месяц		= 27.32 сут.
Синодический месяц		= 29.53 сут.
Видимая звёздная величина полной Луны	$m_☾$	$= -12.7^{\mathrm{m}}$

Характеристики Солнца, планет Солнечной системы и Луны

		Радиус орбиты, а. е.	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, 10^3 км	Осевой период
☉	Солнце			$1.989 \cdot 10^{30}$	697	25.38 сут.
☿	Меркурий	0.3871	87.97 сут.	$3.302 \cdot 10^{23}$	2.44	58.65 сут.
♀	Венера	0.7233	224.70 сут.	$4.869 \cdot 10^{24}$	6.05	243.02 сут.
⊕	Земля	1.0000	365.26 сут.	$5.974 \cdot 10^{24}$	6.37	23.93 ч
☾	$\hookrightarrow$ Луна	0.0026	27.32 сут.	$7.348 \cdot 10^{22}$	1.74	*синхр.*
♂	Марс	1.5237	686.98 сут.	$6.419 \cdot 10^{23}$	3.40	24.62 ч
♃	Юпитер	5.2028	11.862 лет	$1.899 \cdot 10^{27}$	71.5	9.92 ч
♄	Сатурн	9.5388	29.458 лет	$5.685 \cdot 10^{26}$	60.3	10.66 ч
⛢	Уран	19.1914	84.01 лет	$8.683 \cdot 10^{25}$	25.6	17.24 ч
♆	Нептун	30.0611	164.79 лет	$1.024 \cdot 10^{26}$	24.7	16.11 ч