ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2024 г.
ПРИГЛАСИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. 8 КЛАСС

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Максимальное количество баллов — 8.

Задание № 1

Натуральные числа a, b, c (не обязательно различные) таковы, что каждое из них не превосходит 28. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\frac{a-b}{c^2}?$$

Ответ: 27.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Если взять a = 28, b = 1, c = 1, то значение[1] дроби будет равно $\frac{a-b}{c^2}=\frac{28-1}{1^2}=27$.

Заметим, что числитель данной дроби не больше, чем 27, а знаменатель положителен и не меньше, чем 1, поэтому значение дроби точно не больше, чем $\frac{27}{1}=27$.

Задание № 2

Для получения идеальной фиолетовой краски нужно смешать красный, синий и зелёный красители в определённых пропорциях. Юный художник Денис немного ошибся и добавил синего и зелёного красителей вдвое больше, чем нужно, а красного добавил, сколько надо. В итоге краски получилось в 1,4 раза больше, чем нужно. Сколько процентов составляет красный краситель в идеальной фиолетовой краске?

Ответ: 60.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Обозначим нужное количество красного красителя за a, синего — за b, зелёного — за c, а нужное количество получившейся краски — за x. Тогда $a + b + c = x$ и $a + 2b + 2c = 1{,}4x$. Домножив первое уравнение на 2 и вычитая из него второе, получим $a = 0{,}6x$. Значит, в правильном рецепте красный цвет составляет 60 процентов.

Задание № 3

Гриша придумал способ шифровать шестизначные числа, состоящие из всех цифр от 1 до 6. Он придумал правило: для каждой цифры числа он записывает, сколько цифр справа от неё делятся на неё, а затем убирает само число. Например, если бы у Гриши было число 123456, то он бы его зашифровал как 521000.
Какое число было зашифровано с помощью последовательности цифр 042010?

Ответ: 512436.

Точное совпадение ответа — 1 балл

*Решение***.**

аметим, что на вторую цифру делятся все четыре справа стоящие от неё цифры. Это возможно, только если вторая цифра равна 1.
Теперь рассмотрим третью цифру, она не равна 1, но на неё делятся две справа стоящие от неё цифры. Это возможно, только если третья цифра равна 2 (только на двойку делятся две другие цифры: 4 и 6). Таким образом, третья цифра — это 2, а где-то справа от неё стоят цифры 4 и 6.
Теперь заметим, что шестая цифра делится на пятую. Среди оставшихся цифр есть только одна возможная делимость: 6 делится на 3, поэтому пятая цифра равна 3, а шестая цифра равна 6.
Как мы помним, справа от цифры 2 где-то должна стоять цифра 4, поэтому четвёртая цифра — это 4. Методом исключения получаем, что первая цифра равна 5.
Таким образом, получаем число 512436.
Замечание. В этой задаче далеко не каждая последовательность цифр расшифровывается однозначно.

Задание № 4

В каждой клетке таблицы, состоящей из 7 строк и 18 столбцов, стоит кре-стик или нолик. Известно, что в каждой строке есть хотя бы 5 ноликов, а в каждом столбце есть хотя бы 2 нолика. Какое наибольшее количество крестиков может быть в таблице?

Ответ: 90.

Точное совпадение ответа — 1 балл

*Решение***.**

Переформулируем условие: в каждой строке должно быть не более $18 - 5 = 13$ крестиков, а в каждом столбце — не более $7 - 2 = 5$ крестиков. Просуммировав по столбцам, получаем, что в таблице не более $18 \cdot 5 = 90$ крестиков.

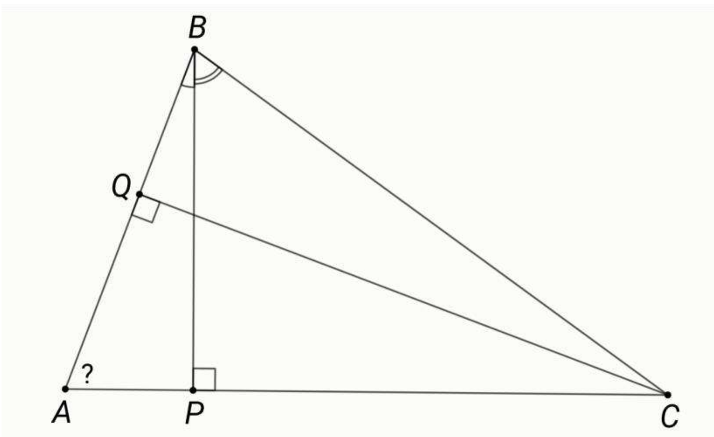
Приведём пример, как в таблице может быть ровно 90 крестиков.

×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○	○	○	○	○
×	×	×	×	×	×	×	×	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×
×	×	×	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
○	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○	○
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○	○	○	○	○	×	×
×	×	×	×	×	×	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×
○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Замечание. Этот пример построен по следующему принципу. В первой строке мы отме-чаем крестиками первые k клеток (здесь $k = 13$), во второй — следующие k, и так далее (когда мы упираемся в конец строки, мы продолжаем с её начала). В последней строке один крестик мы не ставим, чтобы не превысить ограничение в столбце. Таким образом получается «равномерное» распределение крестиков по столбцам.

Задание № 5

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BP и CQ. Известно, что $\angle CBP = 2\angle ABP$ и $\angle ACQ = \angle BCQ + 6°$. Сколько градусов составляет угол BAC?



Ответ: 66.

Точное совпадение ответа — 1 балл

*Решение***.**

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Треугольники ABP и ACQ являются прямоугольными, поэтому $\angle ABP = \angle ACQ = 90° - \alpha$. Из условия имеем $\angle CBP = 2\angle ABP = 180° - 2\alpha$ и $\angle BCQ = \angle ACQ - 6° = 84° - \alpha$. По сумме углов треугольника ABC получаем уравнение:

$$180° = \alpha + (90° - \alpha + 180° - 2\alpha) + (84° - \alpha + 90° - \alpha),$$
$$180° = 444° - 4\alpha,$$
$$\alpha = 66°.$$

Задание № 6

По кругу стоят 100 детей, каждый из них одет в красную или синюю кофту. Каждый из них заявил: «Хотя бы один из двоих моих соседей — в кофте того же цвета, что и я». Оказалось, что 67 детей сказали правду, а 33 — соврали. Какое наибольшее количество детей в красных кофтах могло быть?
Ответ: 83.

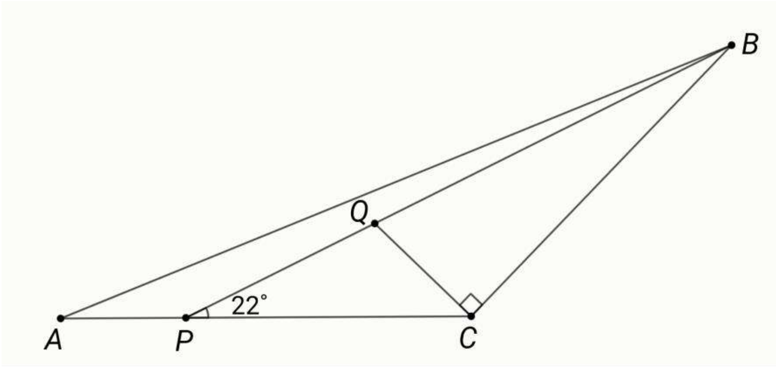
Точное совпадение ответа — 1 балл

*Решение***.**

Приведём пример, когда в красных кофтах 83 ребёнка. Пусть между 17 детьми в синих кофтах будет по одному ребёнку в красных кофтах. А оставшиеся дети пусть будут в красных кофтах. Тогда каждый из детей в синей кофте соврёт, т. к. рядом с ним стоят только дети в красных кофтах. Кроме того, каждый из 16 детей, стоящих между двумя детьми в синих кофтах, тоже соврёт. Оставшиеся $100 - 17 - 16 = 67$ детей в красных кофтах скажут правду, т.к. рядом с ними будет хотя бы один человек в красной кофте.
Предположим, детей в красных кофтах может быть больше 83, тогда детей в синих кофтах не более 16. Заметим, что если два человека в красных кофтах стоят рядом, то они точно говорят правду. Разобьём круг на 50 пар рядом стоящих детей. Поскольку дети в синих кофтах находятся не более чем в 16 парах, хотя бы в 34 парах оба ребёнка будут в красных кофтах. Но тогда детей, сказавших правду, будет хотя бы $34 \cdot 2 = 68$, противоречие.

Задание № 7

Дан треугольник ABC с тупым углом при вершине C. На стороне AC нашлась точка P такая, что $\angle CPB = 22°$. На отрезке BP нашлась точка Q такая, что $BQ = 2PC$ и $QC \perp BC$. Сколько градусов составляет угол ACB?



Ответ: 147.

Точное совпадение ответа — 1 балл

*Решение***.**

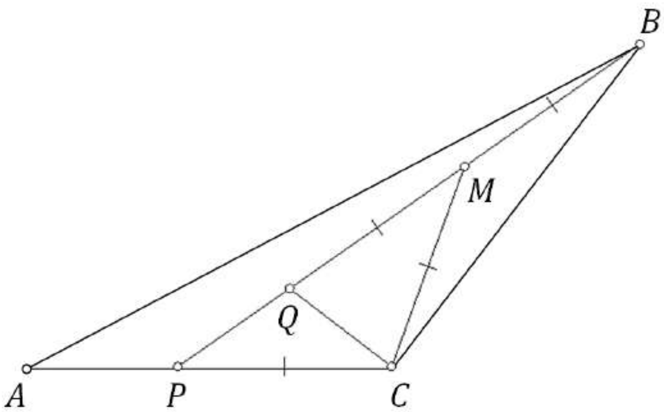


Рисунок к решению задачи 8.

Пусть M — середина отрезка BQ (см. рисунок). Отрезок CM является медианой прямоугольного треугольника BCQ, поэтому $CM = BM = MQ = \frac{1}{2} \cdot BQ = PC$. Из равнобедренного треугольника PCM получаем $\angle PMC = \angle CPM = 22°$. У равнобедренного треугольника BCM внешний угол при вершине M равен сумме двух равных внутренних, поэтому $\angle CBM = \frac{1}{2} \cdot 22° = 11°$. По сумме углов в треугольнике BCP находим искомый угол:

$$\angle ACB = 180° - 22° - 11° = 147°.$$

Задание № 8

Дима записывает в тетрадку в произвольном порядке натуральные числа от 2 до 40 включительно, каждое по разу. Первое число он записывает синей ручкой.

Для каждого из последующих чисел Дима пользуется следующим правилом: если число, которое он собирается написать, является делителем хотя бы одного из ранее выписанных чисел или делится хотя бы на одно из них, то он записывает его красной ручкой, в противном случае — синей. Какое наибольшее количество чисел Дима может написать красной ручкой?

Ответ: 34.

Точное совпадение ответа — 1 балл

*Решение***.**

Докажем, что Дима напишет синей ручкой не менее 5 чисел. Заметим, что числа 23, 29, 31 и 37 простые, и они не делятся ни на какое другое число из данных. Кроме того, они больше 40/2, и никакое другое число на них не делится. Значит, они точно за-писаны синей ручкой. Кроме того, первое число из оставшихся, которое выпишет Дима, также будет записано синей ручкой, поскольку до него могут быть выписаны только числа 23, 29, 31 и 37 (или ничего). Таким образом, синей ручкой записано хотя бы 5 чисел, а значит, красной — не более $39 - 5 = 34$.

Теперь приведём пример, когда красной ручкой будет записано ровно 34 числа. Пусть Дима сначала запишет число 2, затем все числа, кратные 2, потом число 3, потом все числа, кратные 3, потом 5, потом все числа, кратные 5, и так далее. Каждый раз Дима выписывает либо число, кратное какому-то ранее выписанному числу (и тогда он точно записывает его красной ручкой), либо новое простое число. Поскольку после выписывания числа 2 Дима записал и все числа вида $2p$ для $p < 20$, то выписывая очередное простое число, меньшее 20, Дима выпишет его красной ручкой. Значит, синей ручкой Дима выпишет только числа 2, 23, 29, 31 и 37, а красной — остальные $39 - 5 = 34$ числа.