

9 класс

Задача 9.1. (4 балла) Про положительные числа a и b известно, что $a^2 + ab = 36$ и $b^2 + ab = 64$. Найдите значение $a + b$.

Задача 9.2. Катя написала на доске натуральное число. За один ход она может взять две подряд идущие цифры этого числа, произведение которых является двузначным числом, и заменить их на это произведение.

Например, если бы число Кати было равно 1358, то она могла бы получить за один ход из него 1158 или 1340.

Известно, что после того как Катя произвела 3 операции со своим числом, она получила число 2345.

(а) (2 балла) Какое число Катя могла написать изначально? Приведите один пример.

Задача 9.3. (б) (2 балла) Укажите в любом порядке все числа, которые могли быть у Кати изначально.

Задача 9.4. (4 балла) Петя и Вася плавают в бассейне размера $10\text{ м} \times 17\text{ м}$. Известно, что кратчайшее расстояние от Пети до края бассейна равно 2 метра, а кратчайшее расстояние от Васи до края — 3 метра. Какое максимальное расстояние может быть между Петей и Васей?

Задача 9.5. (4 балла) В футбольном турнире участвовало десять команд, каждая сыграла с каждой один раз. Команды, занявшие первое и второе место, в сумме набрали всего лишь на пять очков меньше, чем все остальные команды вместе. Сколько очков набрала команда с минимальным количеством очков? За победу в футбольном турнире дают 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.

Задача 9.6. (4 балла) Простое число p таково, что числа $15p - 15$ и $16p - 15$ являются точными квадратами. Чему может быть равно p ? Укажите все возможные варианты в любом порядке.

Задача 9.7. (4 балла) Петя выписал на доску выражение $1 + 2 + \dots + 1000$. Его младший брат Вася в каждом числе вставил между всеми соседними цифрами знак умножения. Например, число 547 превратилось в $5 \cdot 4 \cdot 7$. Чему равно значение полученного выражения?

Задача 9.8. Лёня мечтает в будущем полететь на Марс и основать там свою страну. Пока он хочет придумать флаг этой страны. Он собирает различные варианты флага размером 8×8 из плиток 1×1 серого, бурого и малинового цветов, причём плитки каждого из цветов должны присутствовать.

(а) (1 балл) Лёня решил, что плитки каждого цвета должны образовывать прямоугольник. Кроме того, плитки серого и бурого цвета в объединении тоже должны образовывать прямоугольник, а также плитки бурого и малинового цвета в объединении должны образовывать прямоугольник. Сколько вариантов флага придётся рассмотреть Лёня?

(б) (3 балла) Лёне не понравился ни один вариант флага из пункта (а), и он решил отказаться от условий про объединения цветов. Осталось лишь требование, что клетки каждого цвета должны образовывать прямоугольник. Сколько **новых** вариантов флага придётся рассмотреть Лёне?

Задача 9.9. (4 балла) В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BB_1 и CC_1 . Точки M и N являются серединами сторон AC и AB соответственно. Прямая C_1M повторно пересекает описанную окружность треугольника BCC_1 в точке X . Точка O является центром описанной окружности треугольника B_1MX . Найдите ON , если $AB = 10$, $B_1M = 3$, $\angle A = 60^\circ$.