Возможные решения

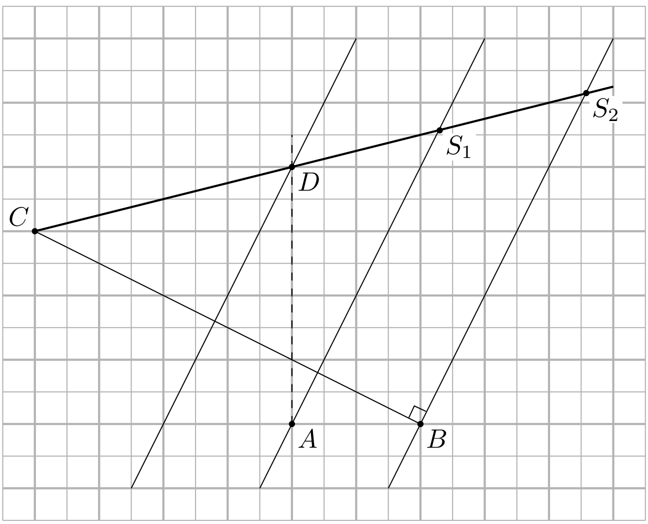
Задача №9-Т1. Дал Маха

По условию задачи микрофон в точке B зафиксировал звуковой сигнал, испущенный самолётом, когда он находился в точке C. Проведём прямую CB и построим к ней перпендикуляр, проходящий через точку B. Это позволит определить положение образующей конуса Маха в рассматриваемый момент времени.

Поскольку самолёт двигался равномерно, угол между образующими конуса Маха и его осью остаётся постоянным в любой момент времени. Чтобы найти границы области слышимости в момент регистрации сигнала микрофоном A, проведём через точку A прямую, параллельную BS_2.

Известно, что микрофон в точке A зафиксировал сигнал спустя время t после пролёта самолёта над этой точкой, а через такое же время после начала регистрации звук дошёл до микрофона B. Чтобы восстановить положение самолёта над точкой A, на расстоянии AB левее по горизонтали от A проведём ещё одну прямую, параллельную BS_2, и найдём её пересечение с вертикалью, проходящей через точку A (точка D).

Так как самолёт двигался прямолинейно, проведём прямую через точки C и D, чтобы восстановить траекторию полёта. Таким образом, точка S_1 соответствует положению самолёта в момент регистрации звука микрофоном A, а точка S_2 – в момент регистрации микрофоном B.



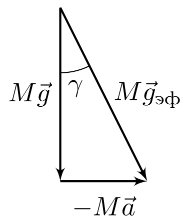
Задача №9-Т2. Сингулярность

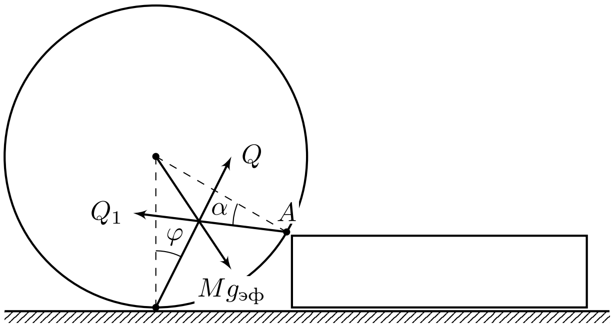
Первый способ

Перейдём в неинерциальную систему отсчёта, движущуюся влево с ускорением $\vec{a}$. В этой системе цилиндр покоится, и на него действует эффективная сила тяжести:

$$M\vec{g}_{\text{эф}} = M\vec{g} - M\vec{a}.$$

Заметим, что с увеличением ускорения a угол γ между вертикалью и вектором $M\vec{g}_{\text{эф}}$ увеличивается.





Расставим силы, действующие на цилиндр в этой системе отсчёта:

- сила реакции Q со стороны горизонтальной поверхности, направленная под углом φ к вертикали. $\operatorname{tg}\varphi = \mu$, так как происходит движение с проскальзыванием.
- Сила реакции Q_1 со стороны доски направлена под некоторым углом α к радиусу, проведённому в точку касания.

Случай 1: $\mu < \sqrt{3}$, линия действия силы Q проходит левее точки контакта цилиндра с доской (точки A). Для равновесия цилиндра необходимо, чтобы силы Q, Q_1 и $Mg_{\text{эф}}$ пересекались в одной точке (по теореме о трёх непараллельных силах). Угол φ фиксирован, а угол α увеличивается при уменьшении ускорения a. Максимальное значение угла α равно φ:

$$\alpha_{\max} = \varphi.$$

Из геометрии задачи следует, что при $\alpha = \varphi$ угол между эффективной силой тяжести и вертикалью равен 30°. Следовательно:

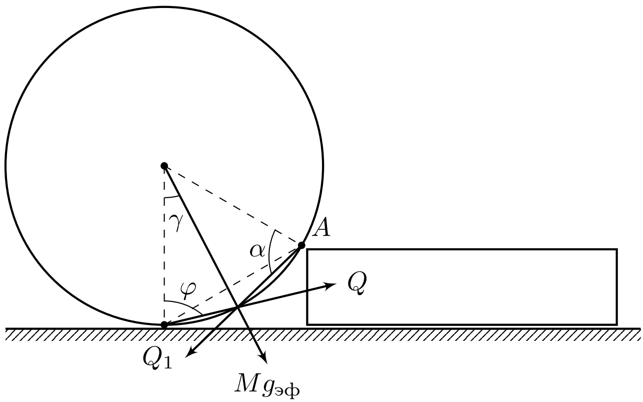
$$a_{\min} = g \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{g}{\sqrt{3}}.$$

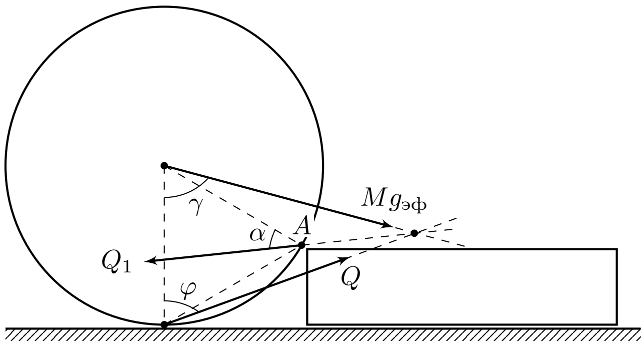
С увеличением ускорения a угол α уменьшается, пока $Mg_{\text{эф}}$ и Q_1 не станут направленными вдоль одной прямой. Дальнейшее увеличение a приведёт к нарушению равновесия, и цилиндр начнёт закатываться на доску. При этом сила реакции Q станет равной нулю. Следовательно:

$$a_{\max} = g \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} g$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} g < a < \sqrt{3} g$$

Случай 2: $\mu > \sqrt{3}$ Линия действия силы Q проходит ниже точки контакта цилиндра с доской.





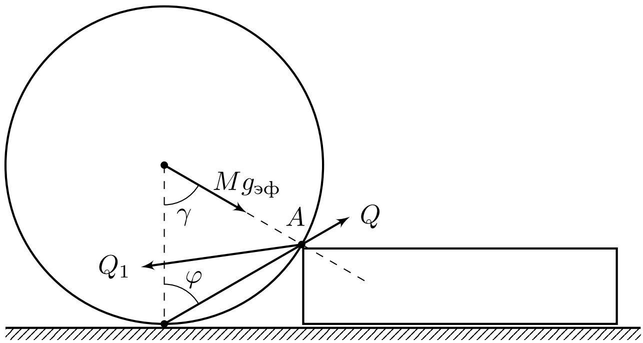
По теореме о трёх непараллельных силах, с учётом того, что $0 < \alpha \leqslant \varphi$, получаем два возможных диапазона для угла γ, при которых три силы пересекаются в одной точке:

- $\gamma \in [0; 30^\circ]$ и вектор Q направлен в точку пересечения трёх сил.
- $\gamma \in (60^\circ; 90^\circ)$ и продолжение вектора Q в обратном направлении проходит через точку пересечения трёх сил (см. рис.).

При $\gamma \in [0^\circ; 30^\circ]$ все три вектора сил направлены в одну полуплоскость, следовательно, их сумма не может быть равна нулю. Значит, равновесие в этом случае невозможно. Для $\gamma \in (60^\circ; 90^\circ)$ по аналогии с первым случаем получаем

$$a > g \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}g.$$

Случай 3: $\mu = \sqrt{3}$

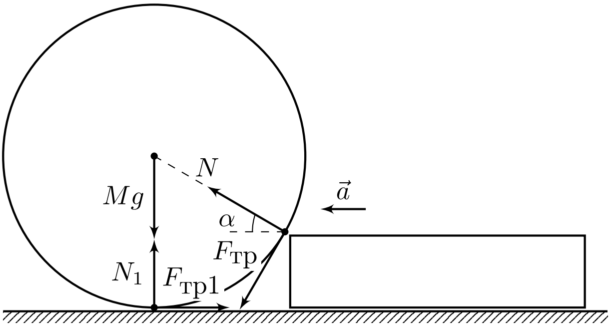


$\varphi = 60^\circ$, линия действия силы Q проходит через точку A. Тогда либо линии действия сил Q и Q_1 совпадают, либо пересекаются в точке A. Первое невозможно, так как в этом случае для выполнения условия равновесия $Mg_{эф}$ должна быть параллельна Q и Q_1, чего быть не может. Значит, линии действия сил Q и Q_1 пересекаются в точке A. Тогда по теореме о трёх непараллельных силах $Mg_{эф}$ тоже направлена в точку A, откуда однозначно находим значение ускорения:

$$a = \sqrt{3}g.$$

Второй способ

Расставим силы, действующие на цилиндр, и запишем теорему о движении центра масс для цилиндра в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:



$$\begin{cases} Oy: \quad N_1 + N\sin\alpha - F_{\text{тр}}\cos\alpha - Mg = 0; \\ Ox: \quad N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha - F_{\text{тр1}} = Ma. \end{cases}$$

Из условия задачи можем найти угол α:

$$\sin\alpha = \frac{R-h}{R} = 0{,}5 \implies \alpha = 30^\circ.$$

Так как цилиндр скользит по горизонтальной поверхности, сила трения равна соответственно:

$$F_{\text{тр1}} = \mu N_1$$

Для того чтобы цилиндр не вращался, должно выполняться правило моментов относительно его центра:

$$F_{\text{тр}}R = F_{\text{тр1}}R \implies F_{\text{тр}} = F_{\text{тр1}} = \mu N_1.$$

Формально, предыдущее уравнение необходимо писать в системе отсчёта центра масс цилиндра. Но при переходе в неинерциальные системы отсчёта, силы инерции прикладываются к центру масс тела, соответственно не создают момента сил относительно него. Подставим значения сил трения в систему уравнений:

$$\begin{cases} Oy: \quad N_1 + N\sin\alpha - \mu N_1\cos\alpha - Mg = 0 \\ Ox: \quad N\cos\alpha + \mu N_1\sin\alpha - \mu N_1 = Ma \end{cases}$$

Для выполнения условия равноускоренного движения цилиндра без вращения необходимо выполнение следующих соотношений:

$$\begin{cases} N_1 > 0, \\ F_{\text{тр}} \leqslant \mu N \implies N_1 \leqslant N. \end{cases}$$

Первое условие гарантирует контакт цилиндра с горизонтальной поверхностью, второе гарантирует отсутствие проскальзывания между цилиндром и доской. Из уравнения на вертикальную ось выразим N_1:

$$N_1 = \frac{Mg - N\sin\alpha}{1 - \mu\cos\alpha}.$$

Подставим значение N_1 в уравнение на горизонтальную ось:

$$N\cos\alpha + \mu(N\sin\alpha - Mg)\frac{1-\sin\alpha}{1-\mu\cos\alpha} = Ma.$$

Сгруппируем слагаемые с N с одной стороны равенства:

$$N\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\frac{1-\sin\alpha}{1-\mu\cos\alpha}\right) = M\left(a + \mu g\frac{1-\sin\alpha}{1-\mu\cos\alpha}\right).$$

Домножим обе стороны равенства на $(1-\mu\cos\alpha)$:

$$N\left(\cos\alpha - \mu\cos^2\alpha + \mu\sin\alpha - \mu\sin^2\alpha\right) = M[a(1-\mu\cos\alpha) + \mu g(1-\sin\alpha)],$$

откуда получаем выражение для значения N:

$$N = M\frac{a(1-\mu\cos\alpha) + \mu g(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha - \mu}.$$

Подставляя значение для угла $\alpha = 30^\circ$:

$$N = M\frac{a(2-\sqrt{3}\mu) + \mu g}{\sqrt{3} - \mu}.$$

Подставляя это выражение в выражение для силы N_1:

$$N_1 = M\frac{\sqrt{3}g - a}{\sqrt{3} - \mu}.$$

Теперь, чтобы получить возможные значения для a нам необходимо проанализировать неравенство $0 < N_1 < N$. Видим, что в знаменателе N и N_1 есть **сингулярность** при определенном значении коэффициента трения $\mu = \sqrt{3}$. Рассмотрим по отдельности три случая.

Случай 1: $\mu < \sqrt{3}$

$$N_1 > 0 \implies \sqrt{3}g > a \implies a < \sqrt{3}g$$

$N_1 < N$:

$$M\frac{\sqrt{3}g - a}{\sqrt{3} - \mu} < M\frac{a(2 - \sqrt{3}\mu) + \mu g}{\sqrt{3} - \mu} \implies \sqrt{3}g - a < a(2 - \sqrt{3}\mu) + \mu g,$$

откуда получаем $a > \dfrac{1}{\sqrt{3}}g$.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}g < a < \sqrt{3}g$$

Случай 2: $\mu > \sqrt{3}$

$$N_1 > 0 \implies \sqrt{3}g < a \implies a > \sqrt{3}g$$

$N_1 < N$:

$$M\frac{\sqrt{3}g - a}{\sqrt{3} - \mu} < M\frac{a(2 - \sqrt{3}\mu) + \mu g}{\sqrt{3} - \mu} \implies \sqrt{3}g - a > a(2 - \sqrt{3}\mu) + \mu g,$$

откуда получаем $a > \dfrac{1}{\sqrt{3}}g$. Первое условие более строгое, чем второе, откуда получаем ответ:

$$a > \sqrt{3}g$$

Случай 3: $\mu = \sqrt{3}$

Этот случай нельзя напрямую проанализировать из полученных уравнений, т. к. знаменатель дробей обращается в ноль. Чтобы получить ответ для этого случая, вернёмся к исходной системе уравнений и подставим значение угла $\alpha = 30^\circ$ и коэффициента трения $\mu = \sqrt{3}$:

$$\begin{cases} N_1 + \dfrac{1}{2}N - \dfrac{3}{2}N_1 - Mg = 0, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}N + \dfrac{\sqrt{3}}{2}N_1 - \sqrt{3}N_1 = Ma. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем:

$$N = 2Mg + N_1.$$

Подставим это выражение во второе уравнение системы:

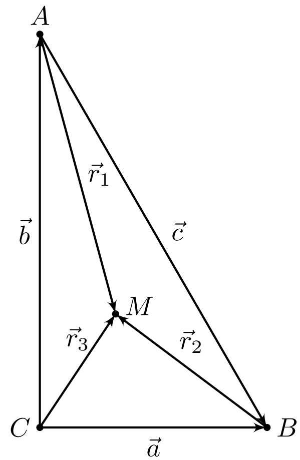
$$\sqrt{3}Mg + \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 - \sqrt{3}N_1 = Ma,$$

откуда находим единственное решение системы:

$$a = \sqrt{3}g.$$

Задача №9-Т3. Задача трёх тел

Первый способ



Рассмотрим положение корабля в точке M, расстояния до которой от вершин A, B и C прямоугольного треугольника равны $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$ соответственно. Введём векторы:

$$\vec{a} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2, \quad \vec{b} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1.$$

Суммарная сила, действующая на корабль в положении равновесия, равна нулю:

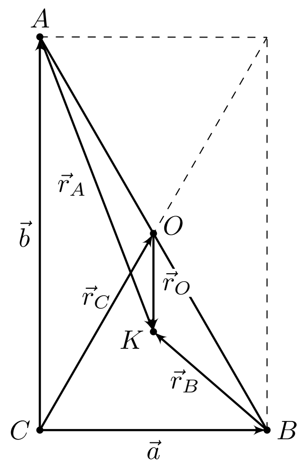
$$\vec{F} = -P\vec{r}_1 - P\vec{r}_2 - 2P\vec{r}_3 = 0 \implies$$

$$\implies \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + 2\vec{r}_3 = 0.$$

Выразим $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ через $\vec{r}_3$ и подставим в полученное выражение:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_3 - \vec{b};\ \vec{r}_2 = \vec{r}_3 - \vec{a}; \vec{r}_3 - \vec{b} + \vec{r}_3 - \vec{a} + 2\vec{r}_3 = 0 \implies \vec{r}_3 = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Второй способ



Покажем, что совместное действие двух станций, расположенных в вершинах острых углов треугольника, эквивалентно действию одной станции с коэффициентом силы $2P$, находящейся на середине гипотенузы. На рисунке эти две станции расположены в точках A и B, а космический корабль – в точке K. Сила, действующая на объект со стороны станций A и B, выражается как:

$$\vec{F}_{AB} = -P(\vec{r}_A + \vec{r}_B).$$

Учитывая, что

$$\vec{r}_A = -\vec{b} + \vec{r}_C + \vec{r}_O, \quad \vec{r}_B = -\vec{a} + \vec{r}_C + \vec{r}_O,$$

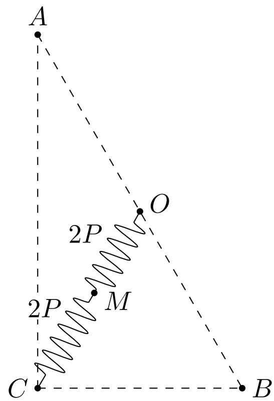
подставим эти выражения в формулу для силы:

$$\vec{F}_{AB} = -P\left(-\vec{b} + \vec{r}_C + \vec{r}_O - \vec{a} + \vec{r}_C + \vec{r}_O\right) = -2P\vec{r}_O.$$

Из полученной формулы следует, что результирующая сила в точности равна силе, создаваемой станцией с коэффициентом $2P$, расположенной в середине отрезка AB. Таким образом, в дальнейшем мы можем считать, что на корабль действуют две станции:

- одна с коэффициентом $2P$ находится в вершине прямого угла (станция C),
- другая с коэффициентом $2P$ находится на середине гипотенузы (станция O).

Далее можем заменить воздействие этих станций воздействием пружин, длины которых в недеформированном состоянии пренебрежимо малы (равны нулю), а коэффициенты жёсткости равны $2P$ (см. рисунок). С учётом коэффициентов жёсткости эквивалентных пружин легко определить положение точки равновесия для корабля – точка, которая делит медиану CO пополам.



Третий способ

Для нахождения положения равновесия рассмотрим систему из трёх точечных масс, расположенных в вершинах треугольника: по m в вершинах острых углов и $2m$ — в вершине прямого угла. Тогда радиус-вектор, проведённый из произвольной точки M до центра масс будет определяться по формуле:

$$4m\vec{r}_{\text{цм}} = m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2 + 2m\vec{r}_3.$$

В случае, если M является центром масс системы, то

$$\vec{r}_{\text{цм}} = 0 \implies \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + 2\vec{r}_3 = 0,$$

что совпадает с выражением, полученным из условия равновесия корабля. Найдём координаты центра масс системы приняв за начало отсчёта вершину C:

$$y_{\text{цм}} = \frac{ml\cos 30^\circ}{4m} = \frac{\sqrt{3}l}{8}; \quad x_{\text{цм}} = \frac{ml\sin 30^\circ}{4m} = \frac{l}{8}.$$

Далее по теореме Пифагора определяем расстояния от точки равновесия до станций:

$$CM = \frac{l}{4};\ BM = \frac{\sqrt{3}l}{4};\ AM = \frac{\sqrt{7}l}{4}.$$

В начальный момент времени космический корабль покоится, а суммарная сила, действующая на него со стороны станций, направлена вдоль отрезка CO. Это означает, что ускорение корабля также направлено вдоль CO, и, следовательно, корабль будет двигаться прямолинейно вдоль этого отрезка и достигнет максимальной скорости в точке равновесия.

Первый способ

Посмотрим на отклонение корабля от положения равновесия на вектор $\overrightarrow{MK}$. Изменение суммарной силы со стороны станций равно:

$$\Delta\vec{F} = \vec{F} - \vec{0} = \vec{F} = \Delta\vec{F}_A + \Delta\vec{F}_B + \Delta\vec{F}_C =$$
$$= -P(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM}) - P(\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BM}) - 2P(\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CM}) = -4P \cdot \overrightarrow{MK}$$

Значит, на корабль действует такая же сила, как от пружины с коэффициентом упругости $4P$ с нулевой начальной длиной, натянутой между точками M и K. Тогда при перемещении корабля от середины гипотенузы до точки M эта пружина совершит над кораблём работу:

$$A = \frac{4P\left(\frac{l}{4}\right)^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Второй способ

Воспользуемся аналогией с двумя пружинами и запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{2P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{2P\left(\frac{l}{4}\right)^2}{2} + \frac{2P\left(\frac{l}{4}\right)^2}{2} + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Третий способ

Элементарная работа силы, действующей со стороны некоторой станции, определяется выражением:

$$\delta A = (\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}) = -Pr\,\mathrm{d}r \implies A = -\int_{r_1}^{r_2} Pr\,\mathrm{d}r = \frac{Pr_1^2}{2} - \frac{Pr_2^2}{2}.$$

Максимальная скорость корабля будет достигнута при прохождении положения равновесия. Запишем закон сохранения энергии для этого случая:

$$\frac{2P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2}+2\frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2}=\frac{2P\left(\frac{l}{4}\right)^2}{2}+\frac{P\left(\frac{\sqrt{3}l}{4}\right)^2}{2}+\frac{P\left(\frac{\sqrt{7}l}{4}\right)^2}{2}+\frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

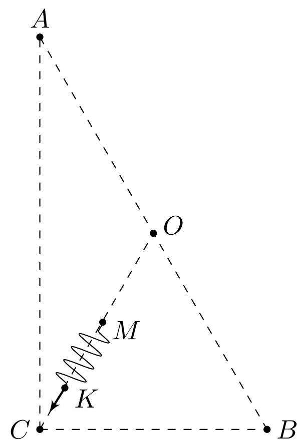
Любым из трёх способов получаем ответ:

$$v_{\max}=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{m}}$$

Первый способ

Как мы показали ранее, сила, действующая на корабль, аналогична силе со стороны пружины с началом в точке M.

Тогда движение корабля – колебания вдоль отрезка CO. Корабль, пролетев точку M, полетит к точке C и остановится около неё.



Второй способ

При движении корабля под действием пары пружин, он будет двигаться вдоль отрезка CO, останавливаясь в точке O и в точке X, где потенциальная энергия системы пружин равна её энергии при положении корабля в точке O. Это условие можно записать в виде уравнения:

$$\frac{2P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2}=\frac{2Px^2}{2}+\frac{2P\left(\frac{l}{2}-x\right)^2}{2},$$

где x — расстояние от точки C до точки X. Полученное выражение сводится к квадратному уравнению:

$$2x^2-lx=0,$$

решая которое, получаем два корня:

$$x_1=\frac{l}{2},\quad x_2=0.$$

Корень $x = l/2$ соответствует точке на середине гипотенузы, где корабль находился в начальный момент времени. Таким образом, минимальное расстояние от корабля до точки C равно нулю.

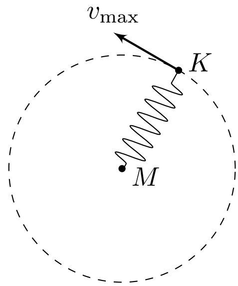
Как мы показали в решении пункта 2, сила, действующая на корабль, равна $\vec{F} = -4P \cdot \overrightarrow{MK}$, где M – центр масс системы с точечными массами $(m, m, 2m)$, расположенными в вершинах A, B и C. В отличие от предыдущих пунктов, точка M не покоится. По свойству центра масс:

$$\vec{v}_M = \frac{m\vec{v}_A + m\vec{v}_B + 2m\vec{v}_C}{4m} = \frac{\vec{v}_C}{2}.$$

Следовательно, скорость точки M постоянна по направлению и равна $v_{\max}$ по модулю.

Для окончательного упрощения системы перейдем в инерциальную систему отсчета точки M.

В этой системе отсчета начальная скорость $v_{\max}$ точки K направлена перпендикулярно пружине. Заметим, что $v_{\max}$ – это скорость движения по окружности радиусом $MK = l/4$ под действием силы $4P \cdot MK$:



$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = 4P \cdot \frac{MK^2}{2}.$$

$$\frac{mv_{\text{окр}}^2}{MK} = 4P \cdot MK.$$

$$v_{\max} = v_{\text{окр}}$$

Следовательно, в системе отсчета точки M корабль будет равномерно двигаться по окружности радиусом $l/4$ со скоростью $v_{\max}$, найденной в пункте 2.

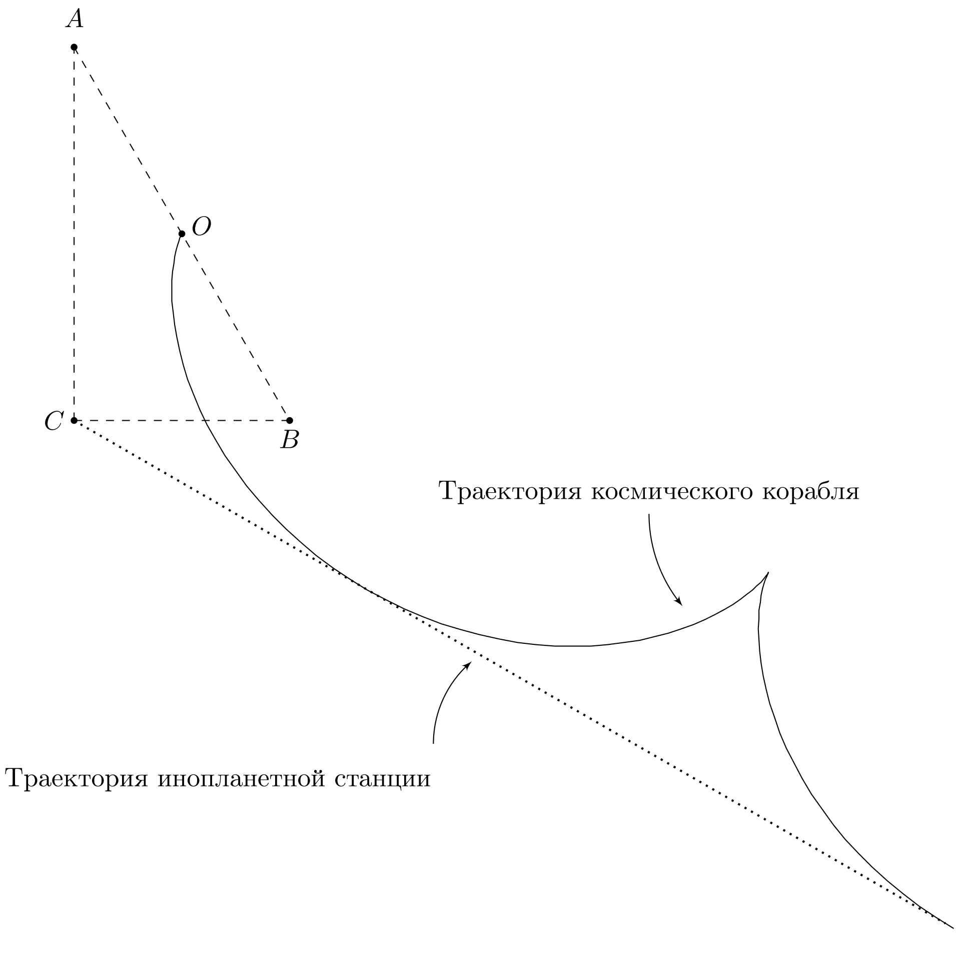
Когда корабль совершит один оборот вокруг точки M, его скорость в лабораторной системе отсчёта впервые обнулится. Это произойдет через время:

$$T = \frac{2\pi l/4}{v_{\max}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{P}{m}}} = \pi\sqrt{\frac{m}{P}}.$$

В системе отсчета точки M перемещение корабля за один период равно нулю. Значит, в ЛСО корабль сместился на такое же расстояние, что и точка M.

$$S = v_{\max}T = \frac{\pi l}{2}.$$

Обратим внимание, что траектория движения корабля, представляющая собой наложение движения по окружности и равномерного движения её центра, представляет собой циклоиду, как показано на рисунке.



Задача №9-Т4. Горячо-холодно

Первый способ

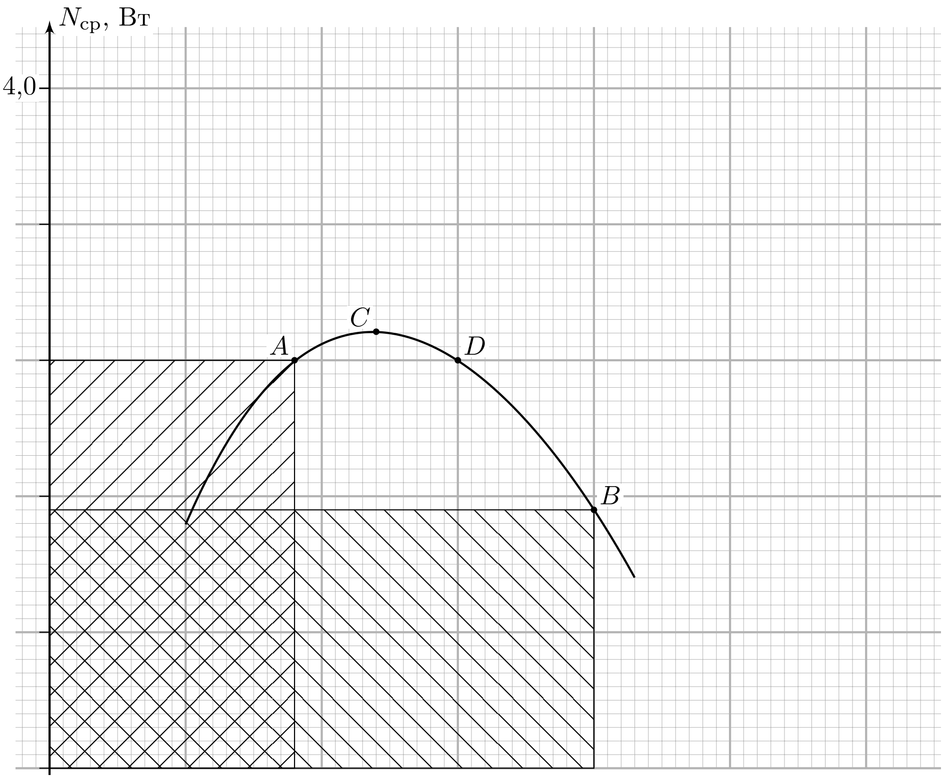


Рис. 1

Для нагрева слитка серебра от начальной температуры t_0 до температуры t необходимо сообщить ему суммарное количество теплоты:

$$Q = cm(t - t_0).$$

С другой стороны, количество теплоты Q можно выразить через среднюю мощность $N_{ср}$ и время теплообмена τ:

$$Q = N_{ср}\tau.$$

По условию задачи температуры в состояниях A и B равны, следовательно, суммарное количество теплоты, сообщённое слитку в моменты времени τ_A и τ_B, также одинаково. Это означает, что площади прямоугольников, соответствующих этим процессам на графике (см. рисунок 1), равны, так как они пропорциональны количеству теплоты. Таким образом, выполняется равенство:

$$N_{A\text{ср}}\tau_A = N_{B\text{ср}}\tau_B.$$

Для восстановления оси времени необходимо обеспечить равенство площадей прямоугольников с одинарной штриховкой на графике.

Второй способ

По условию задачи температуры в состояниях A и B равны, следовательно, эти точки лежат на одной гиперболе. Если две вершины прямоугольника расположены на одной гиперболе, то прямая, проходящая через две другие вершины, должна пересекать начало координат. Это следует из подобия треугольников, образованных описанной прямой и осями координат (см. рисунок 2).

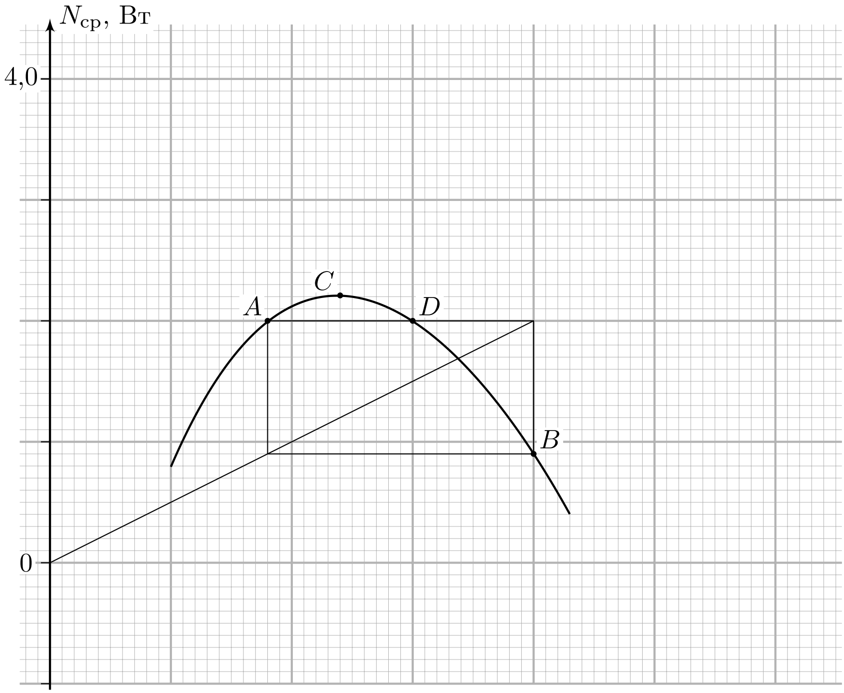


Рис. 2

Зная, что $\tau_B - \tau_A = 2{,}2$ мин, восстановим график зависимости:

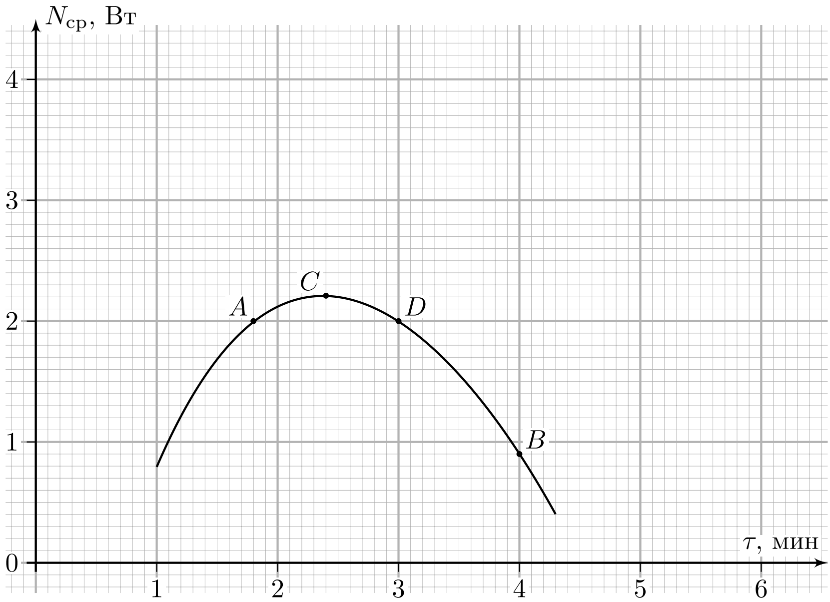


Рис. 3

Из графика известно, что $N_{A\text{ср}} = 2$ Вт и $\tau_A = 1{,}8$ мин $= 108$ с, тогда:

$$N_{A\text{ср}}\tau_A = cm(t_A - t_0) \implies t_0 = t_A - \frac{N_{A\text{ср}}\tau_A}{cm}.$$

$$t_0 = 22\,^\circ\text{C}.$$

Из графика известно, что $N_{C\text{ср}} \approx 2{,}2$ Вт, $\tau_C = 2{,}4$ мин $= 144$ с, $N_{D\text{ср}} = 2$ Вт и $\tau_D = 3$ мин $= 180$ с. Тогда:

$$N_{C\text{ср}}\tau_C = cm(t_C - t_0); \qquad N_{D\text{ср}}\tau_D = cm(t_D - t_0).$$

$$N_{C\text{ср}} \approx 2{,}2 \text{ Вт}; \qquad N_{D\text{ср}} = 2 \text{ Вт};$$

$$t_C = t_0 + \frac{N_{C\text{ср}}\tau_C}{cm} \approx 48{,}4\,^\circ\text{C};$$

$$t_D = t_0 + \frac{N_{D\text{ср}}\tau_D}{cm} = 52\,^\circ\text{C}.$$

Получим выражение, позволяющее найти значение мгновенной мощности в произвольный момент времени. Для этого рассмотрим малый промежуток времени $\Delta\tau \to 0$. За этот промежуток времени количество теплоты ΔQ можно выразить через мгновенную мощность $N_{\text{мгн}}$:

$$\Delta Q = N_{\text{мгн}} \Delta\tau.$$

С другой стороны, ΔQ можно выразить через изменение площади прямоугольника на графике зависимости $N_{\text{ср}}(\tau)$:

$$\Delta Q = (N_{\text{ср}} + \Delta N_{\text{ср}})(\tau + \Delta\tau) - N_{\text{ср}}\tau = \Delta N_{\text{ср}}\tau + N_{\text{ср}}\Delta\tau + \Delta N_{\text{ср}}\Delta\tau.$$

Пренебрегая малыми величинами второго порядка ($\Delta N_{\text{ср}}\Delta\tau \approx 0$), получаем:

$$\Delta Q \approx \Delta N_{\text{ср}}\tau + N_{\text{ср}}\Delta\tau.$$

Приравнивая выражения для ΔQ, находим:

$$N_{\text{мгн}}\Delta\tau = \Delta N_{\text{ср}}\tau + N_{\text{ср}}\Delta\tau.$$

Разделив на $\Delta\tau$, получаем выражение для мгновенной мощности:

$$N_{\text{мгн}} = \frac{\Delta N_{\text{ср}}}{\Delta\tau}\tau + N_{\text{ср}},$$

где величина $k = \frac{\Delta N_{\text{ср}}}{\Delta\tau}$ пропорциональна угловому коэффициенту касательной к графику $N_{\text{ср}}(\tau)$. Аналогичное выражение можно получить, используя дифференцирование:

$$N_{\text{мгн}} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}(N_{\text{ср}}\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}N_{\text{ср}}}{\mathrm{d}\tau}\tau + N_{\text{ср}}.$$

Построим касательные к графику в точках C и D и рассчитаем их угловые коэффициенты наклона:

$$k_C = 0\ \text{Вт/с}, \quad k_D = -\frac{2}{3}\ \text{Вт/с}.$$

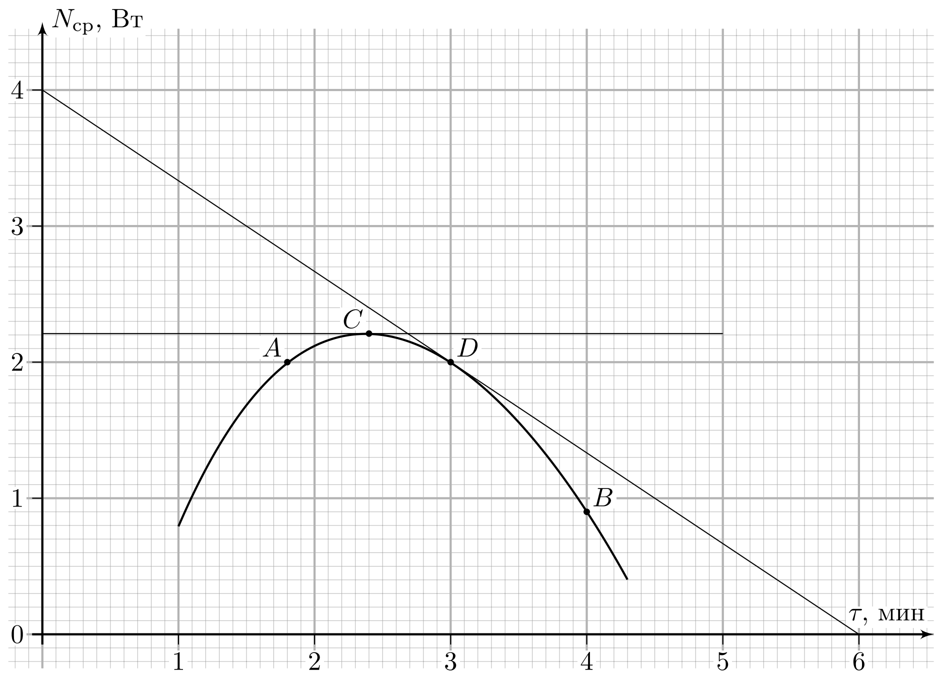


Рис. 4

Возможен другой способ решения.

Зная $N_{ср}(\tau)$, построим график зависимости $Q(\tau) = N_{ср} \cdot \tau$ для моментов времени $\tau \in [0; 4]$ мин, проведём гладкую кривую и построим касательные к графику $Q(\tau)$ в указанные моменты времени. Угловые коэффициенты касательных будут равны мгновенной мощности:

$$N_{мгн} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau}.$$

Тогда:

$$N_{C мгн} = k_C \tau_C + N_{C ср} \approx 2{,}2 \text{ Вт};$$

$$N_{D мгн} = k_D \tau_D + N_{D ср} = 0 \text{ Вт}.$$

Задача №9-Т5. Неламповый диод

Пусть сила тока источника равна I_0. Показания амперметра равны нулю при сбалансированном мосте, сила тока через резистор R_2 (и через нелинейный элемент, подключённый к точкам A и B) равна:

$$I_{AB} = I_0 \frac{R_3}{R_2 + R_3}.$$

Сила тока через резисторы R_1 и R_3 равна:

$$I_1 = I_3 = I_0 \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

Тогда напряжение между точками A и B равно:

$$U_{AB} = I_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_3}.$$

Введём статическое сопротивление нелинейного элемента, подключённого к точкам A и B:

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_{AB}},$$

где I_{AB} — сила тока, протекающего через элементы, подключенные к точкам A и B. В таком случае, показания амперметра равны нулю, если $R_{AB} R_3 = R_1 R_2$. Вольтамперные характеристики лампы и диода задаются соотношениями:

$$I_{\text{л}} = \alpha U_{\text{л}}^{2/3}, \quad I_{\text{д}} = \beta U_{\text{д}}^2,$$

или, выражая напряжение через ток:

$$U_{\text{л}} = \frac{I_{\text{л}}^{3/2}}{\alpha^{3/2}}, \quad U_{\text{д}} = \frac{\sqrt{I_{\text{д}}}}{\sqrt{\beta}}.$$

Статическое сопротивление лампы и диода соответственно равны:

$$R_{\text{л}} = \frac{U_{\text{л}}}{I_{\text{л}}} = \frac{I_{\text{л}}^{1/2}}{\alpha^{3/2}}; \quad R_{\text{д}} = \frac{U_{\text{д}}}{I_{\text{д}}} = \frac{1}{\sqrt{I_{\text{д}} \beta}}.$$

Тогда при их последовательном соединении сопротивление выражается следующим образом:

$$R_{AB} = R_{\text{л}} + R_{\text{д}} = \frac{\sqrt{I_{AB}}}{\alpha^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\beta I_{AB}}}.$$

Это уравнение сводится к квадратному, для решения которого используем теорему Виета:

$$I_{AB} - R_{AB}\alpha^{3/2}\sqrt{I_{AB}} + \frac{\alpha^{3/2}}{\sqrt{\beta}} = 0;$$

$$\sqrt{I_{AB1}I_{AB2}} = \frac{\alpha^{3/2}}{\sqrt{\beta}}, \quad \sqrt{I_{AB1}} + \sqrt{I_{AB2}} = \alpha^{3/2}R_{AB}.$$

Так как

$$I_{AB1} = I_{01}\frac{R_3}{R_2+R_3}, \quad I_{AB2} = I_{02}\frac{R_3}{R_2+R_3},$$

то

$$\alpha^{3/2} = \frac{\sqrt{I_{01}}+\sqrt{I_{02}}}{R_{AB}}\sqrt{\frac{R_3}{R_2+R_3}}, \quad \sqrt{\beta} = \frac{\sqrt{I_{01}}+\sqrt{I_{02}}}{\sqrt{I_{01}I_{02}}R_{AB}}\sqrt{\frac{R_2+R_3}{R_3}}.$$

Статическое сопротивление лампы равно $R_{AB} = R_1R_2/R_3$ при силе тока через неё:

$$I_{\text{л}} = \frac{R_3}{R_2+R_3}\left(\sqrt{I_{01}}+\sqrt{I_{02}}\right)^2.$$

Тогда ток через источник:

$$I_{03} = \left(\sqrt{I_{01}}+\sqrt{I_{02}}\right)^2$$

Статическое сопротивление диода равно $R_{AB} = R_1R_2/R_3$ при силе тока через него:

$$I_{\text{д}} = \frac{R_3}{R_2+R_3}\frac{I_{01}I_{02}}{\left(\sqrt{I_{01}}+\sqrt{I_{02}}\right)^2}.$$

Тогда ток через источник:

$$I_{04} = \frac{I_{01}I_{02}}{\left(\sqrt{I_{01}}+\sqrt{I_{02}}\right)^2}.$$