

Возможные решения

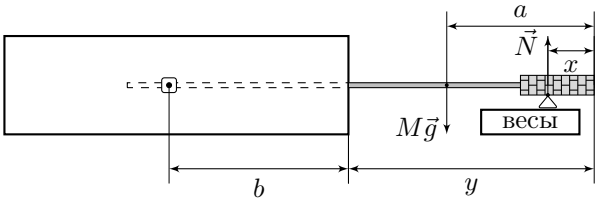
Задача №9-Е1. Долгий ящик

Метод 1.1. Разная точка приложения силы реакции

Зафиксируем расстояние $y = (25,9 \pm 0,2)$ см и положим конец шпильки с гайками на клипсу, находящуюся на расстоянии x от края (см. рисунок). В таком случае на шпильку с гайками действует сила тяжести, сила реакции опоры N и сила, приложенная в шарнире. При этом показания m весов равны силе реакции опоры N , деленной на g .

Горизонтальность шпильки можно контролировать измерением расстояния до поверхности стола в различных точках, при этом небольшие отклонения от идеального горизонтального положения не влияют на результаты.

Получим экспериментальные точки зависимости показаний весов m от расстояния x . Примем погрешность измерения длин за 0,2 см в связи с точностью определения точки касания шпильки и клипсы. Погрешность измерения «массы» $\Delta m = 0,03$ г.



m , г	27,21	28,53	30,82	32,13	38,67	43,71	52,16
x , см	0	1,8	4,6	6,7	12,7	16,4	20,6
$\frac{1}{m}$, $\frac{1}{\text{кг}}$	36,8	35,1	32,4	31,1	25,9	22,9	19,2

Запишем правило моментов для рычага относительно оси вращения, проходящей через шарнир:

$$Mg(y + b - a) = N(b + y - x).$$

Учитывая $N = mg$, где m - показания весов, линеаризуем получившееся выражение:

$$\frac{M}{m}(y + b - a) = b + y - x \Rightarrow x = b + y - \frac{M}{m}(y + b - a).$$

Графиком зависимости x от $1/m$ является прямая линия с отрицательным коэффициентом наклона, причем пересечение этой прямой с осью x происходит в точке $x = b + y$. Из графика получим $b + y = (43,4 \pm 0,4)$ см. Погрешность определения величины $b+y$ определим графически. Если по точкам приведённого графика провести прямые с наименьшим и наибольшим сдвигом по вертикали, то будет видно, что погрешность равна $\Delta(b + y) = 0,4$ см.



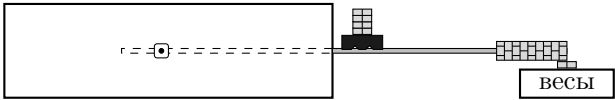
Кресты ошибок на графике по обеим осям оказываются маленькими. С учетом зафиксированного $y = (25,9 \pm 0,2)$ см получим $b = (17,5 \pm 0,6)$ см.

Метод 1.2. Измерение момента дополнительной силы

Выкрутим шпильку практически до упора так, что $y = (26,0 \pm 0,2)$ см. Положим шпильку с гайками на опору. В качестве опоры возьмем гайку. Нажмём кнопку «Таге» на весах. Если на шпильку будет действовать дополнительная сила, поменяется сила реакции N , действующая со стороны опоры на шпильку, то весы покажут величину $m^* = \Delta N/g$, где ΔN — изменение силы реакции.

В качестве дополнительной силы выберем силу тяжести клипсы и n гаек, расположенных рядом со стенкой короба. Их суммарная масса $m = m_{\text{к}} + n \cdot m_{\text{г}}$, где $m_{\text{к}} = (1,33 \pm 0,03)$ г и $m_{\text{г}} = [(3,14 \pm 0,03) \text{ г}]/5 = (0,628 \pm 0,006)$ г. Расстояние от середины клипсы (ее центра масс) до края шпильки $l = (25,0 \pm 0,2)$ см.

Измерим показания весов m^* при разных n .

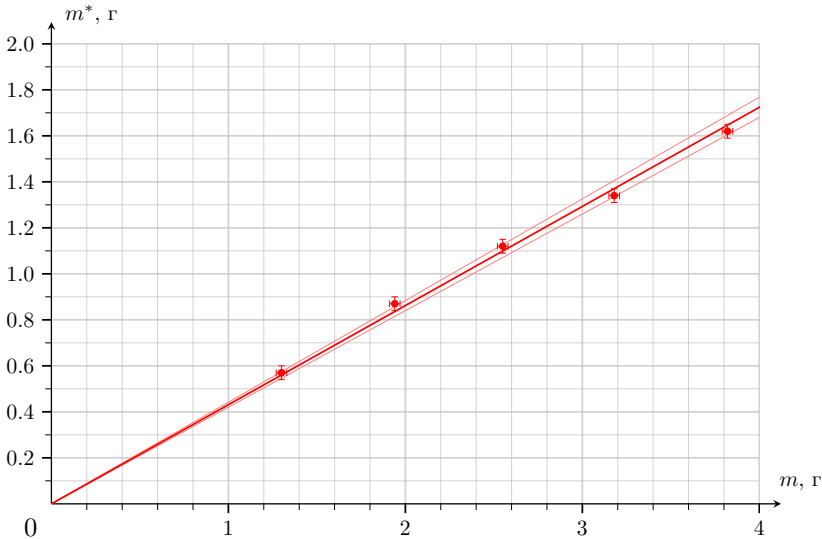


n	4	3	2	1	0
m , г	3,82	3,18	2,55	1,94	1,30
m^* , г	1,62	1,34	1,12	0,87	0,57

Перед тем, как мы расположили клипсу с гайками на шпильке, для системы «шпилька + гайки» были выполнены оба условия равновесия. Но когда вес клипсы с гайками начинает действовать на шпильку, то относительно оси вращения он создает момент $mg(b + y - l)$, который компенсируется изменением момента силы реакции $\Delta N(b + y)$:

$$mg(b + y - l) = m^*g(b + y) \Rightarrow m^* = m \left(1 - \frac{l}{b + y} \right).$$

Тогда график m^* от m должен быть линейным и проходящим через ноль. Его коэффициент наклона равен $1 - l/(b + y)$.



Проведя прямую из точки $(0,0)$, получаем коэффициент наклона $k = (0,431 \pm \pm 0,011)$ и

$$b = \frac{l}{1 - k} - y = (17,9 \pm 1,4) \text{ см.}$$

Погрешность коэффициента наклона найдем, проводя прямые с максимальным и минимальным наклоном. Рассчитаем погрешность итогового результата:

$$\Delta b = \left(\frac{\Delta k}{1 - k} + \frac{\Delta l}{l} \right) \frac{l}{k - 1} + \Delta y = 1,4 \text{ см.}$$

Метод 2.1. Изменение силы, поддерживающей шпильку, при её вкручивании

Будем измерять величину силы реакции, действующую на шпильку, с помощью показания весов m так же, как мы это делали в первом пункте. В качестве параметра выберем длину внешней части шпильки y и будем её постепенно уменьшать. Клипсу расположим под краем шпильки с гайками ($x = 0$).

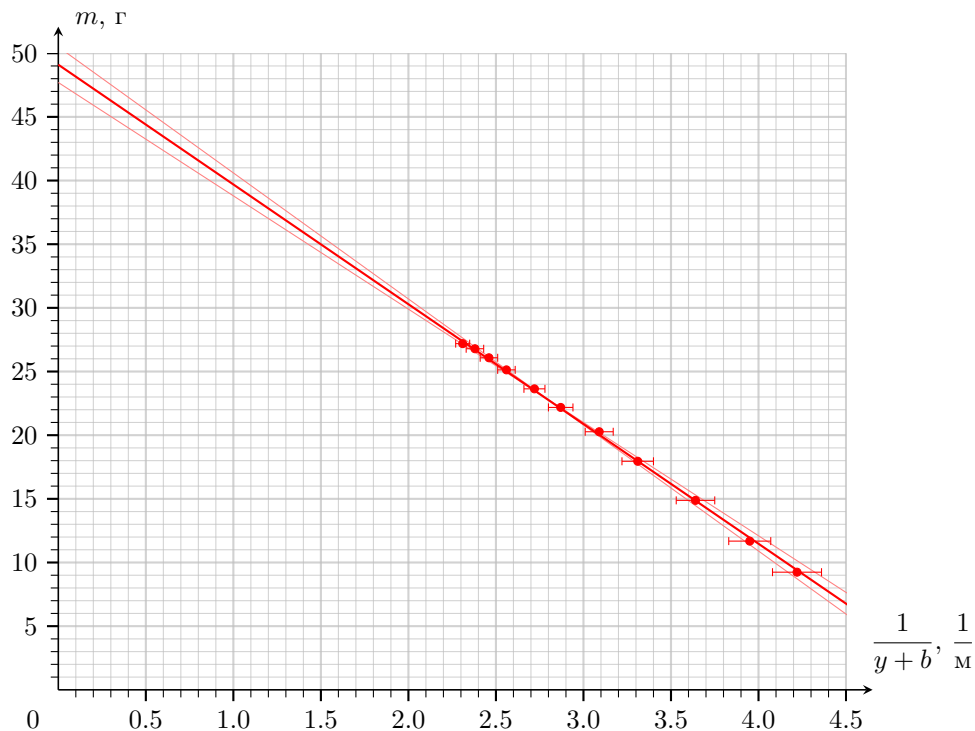
y , см	25,5	24,3	22,4	21,1	18,9	17,5	16,5
$\frac{1}{y+b}$, м ⁻¹	2,33	2,4	2,51	2,6	2,75	2,87	2,95
m , г	28,28	27,52	26,31	25,64	24,06	22,93	22,04
y , см	14,8	13,7	12,0	10,7	9,3	7,8	6,7
$\frac{1}{y+b}$, м ⁻¹	3,11	3,22	3,4	3,56	3,75	3,97	4,15
m , г	20,46	19,27	17,49	15,85	14,15	11,67	9,88

Запишем уравнение моментов относительно оси вращения:

$$Mg(y + b - a) = mg(y + b) \Rightarrow m = M \left(1 - \frac{a}{y + b} \right),$$

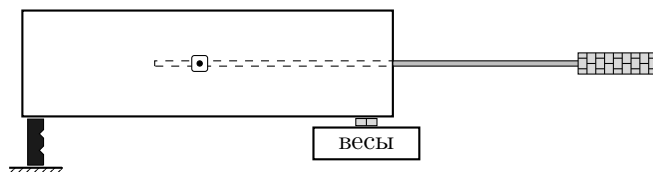
поэтому график зависимости m от $1/(y + b)$ оказывается линейным с коэффициентом наклона, равным $-Ma$, и свободным членом, равным M . Для вычисления $1/(y + b)$ возьмем значение $b = (17,5 \pm 0,6)$ см. Тогда погрешность $\Delta[1/(y + b)] = (\Delta y + \Delta b)/(y + b)^2$.

Кресты ошибок на графике по вертикальной оси оказываются маленькими. С помощью графика определим, что масса шпильки с гайками $M = (49,1 \pm 0,4)$ г и $Ma = (9,4 \pm 0,5)$ г · м. Погрешности коэффициента наклона и свободного члена определим графически.



Метод 2.2. Изменение силы реакции, действующей на короб при выкручивании шпильки

Установим один конец короба на клипсу, а второй – на весы с опорой в виде гайки. Расстояние между точками опоры короба $l_0 = (51,0 \pm 0,2)$ см.



Далее, выкручивая шпильку, мы изменяем момент силы тяжести системы «короб + шпилька + гайки» относительно клипсы. Измерим изменение показаний весов $m^* = (20,52 \pm 0,03)$ г при изменении длины свободной части шпильки на $y^* = (21,0 \pm 0,2)$ см.

Запишем правило моментов относительно клипсы:

$$mgl_0 = \mathcal{M}_{\text{короб}} + Mg(y - a + l_0),$$

где $\mathcal{M}_{\text{короб}}$ — момент сил, создаваемый силой тяжести короба, l_0 — расстояние от точки клипсы до стенки ящика.

Когда мы выкручиваем шпильку, меняются только m и y :

$$l_0 m^* = My^* \Rightarrow M = (49,8 \pm 0,7) \text{ г.}$$

Погрешность вычисляется через сумму относительных погрешностей:

$$\Delta M = M \cdot \left(\frac{\Delta l_0}{l_0} + \frac{\Delta m^*}{\Delta m} + \frac{\Delta y^*}{\Delta y} \right) = 0,7 \text{ г.}$$

В методе **2.1** с помощью графика получено, что $Ma = (9,4 \pm 0,5) \text{ г} \cdot \text{м}$, поэтому $a = (19,2 \pm 1,0) \text{ см}$.

Если для определения массы использовался альтернативный метод (например, метод **2.2**), то для определения a все равно требуется провести исследование, аналогичное методу **2.1**.

$$a = (19,2 \pm 1,0) \text{ см}$$

Рассмотрим систему «шпилька + гайки». Двадцать навинченных гаек можно представить как однородный стержень длиной $c = (5,9 \pm 0,2) \text{ см}$ и массой $20m_{\text{г}}$. Выражение для центра масс системы имеет вид:

$$Ma = (M - 20m_{\text{г}}) \frac{L}{2} + 20m_{\text{г}} \frac{c}{2} \Rightarrow L = 2 \frac{Ma - 10m_{\text{г}}c}{M - 20m_{\text{г}}} = 49 \text{ см.}$$

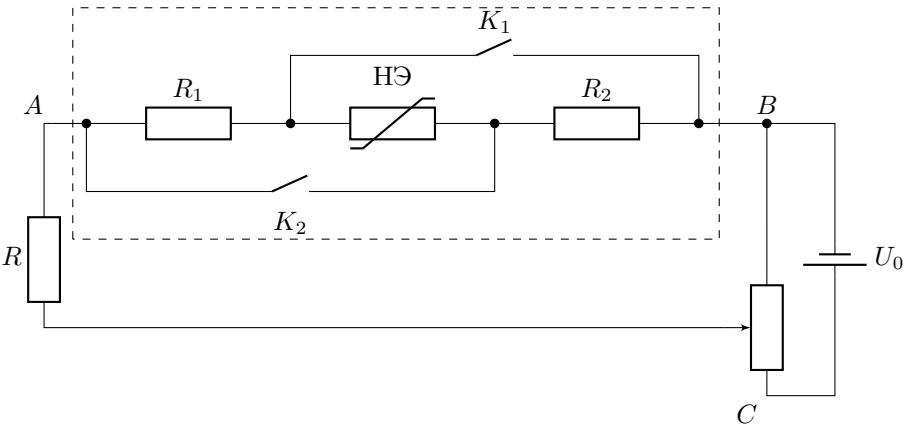
Оценка погрешности длины стержня ΔL :

$$\Delta L = L \left(\frac{\Delta(Ma) + 10c\Delta m_{\text{г}} + 10m_{\text{г}}\Delta c}{Ma - 10m_{\text{г}}c} + \frac{\Delta M + 20\Delta m_{\text{г}}}{M - 20m_{\text{г}}} \right) = 4 \text{ см.}$$

Задача №9-Е2. Трижды два

Мультиметром в режиме вольтметра определим напряжение источника:

$$U_0 = (9,5 \pm 0,1) \text{ В.}$$



Соберем электрическую цепь для снятия ВАХ (рис. 2 из условия). Для удобства промаркируем провода (буквами A , B , C , написанными на наклейках). Силу тока через серый ящик определяем через напряжение на известном резисторе $I_{СЯ} = U_R/R$, напряжение на сером ящике $U_{СЯ}$ измеряем непосредственно.

K_1 вправо, K_2 влево

$U_{СЯ}$, В	U_R , В	$I = U_R/R$, мА
0,00	0,00	0,00
0,50	0,35	0,80
1,00	0,70	1,62
1,51	1,04	2,43
2,01	1,39	3,24
2,48	1,72	3,99
2,92	2,02	4,70
3,51	2,44	5,67
4,04	2,80	6,51
4,52	3,12	7,26
5,04	3,48	8,09
5,55	3,83	8,91

K_1 влево, K_2 влево

$U_{\text{СЯ}}, \text{ В}$	$U_R, \text{ В}$	$I = U_R/R, \text{ мА}$
0,00	0,00	0,00
0,17	0,00	0,00
0,44	0,00	0,00
0,51	0,00	0,00
0,63	0,01	0,02
1,06	0,09	0,22
1,52	0,20	0,46
1,99	0,31	0,71
2,50	0,43	0,99
2,98	0,54	1,25
3,50	0,66	1,53
3,99	0,77	1,80
4,55	0,91	2,11
5,03	1,02	2,37
5,52	1,13	2,63
5,99	1,24	2,89
6,61	1,39	3,23
7,07	1,50	3,48
7,82	1,67	3,89

K_1 вправо, K_2 вправо

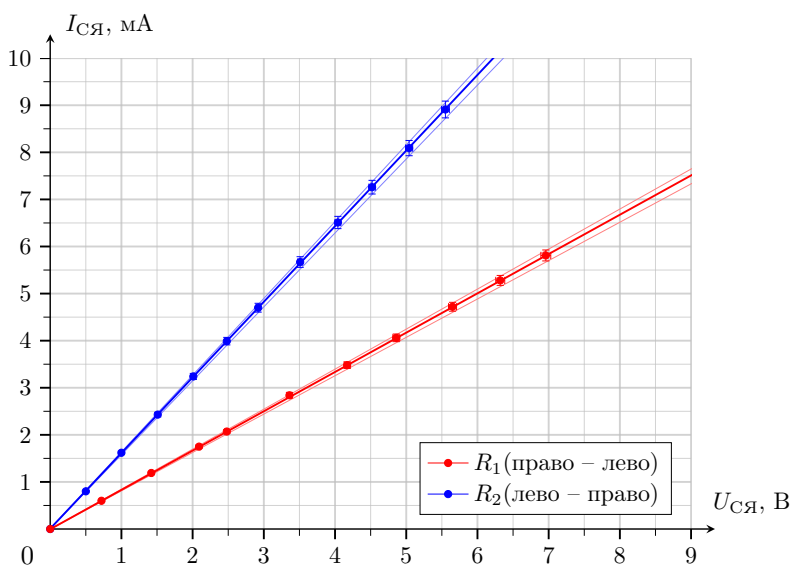
$U_{\text{СЯ}}, \text{ В}$	$U_R, \text{ В}$	$I = U_R/R, \text{ мА}$
0,00	0,00	0,00
0,30	0,32	0,74
0,61	0,64	1,49
0,87	0,92	2,13
1,21	1,28	2,97
1,44	1,51	3,52
1,68	1,78	4,13
1,90	2,01	4,67
2,02	2,17	5,05
2,36	2,63	6,12
2,55	2,95	6,86
2,8	3,52	8,19
3,04	4,33	10,07
3,22	5,17	12,02
3,35	5,96	13,86

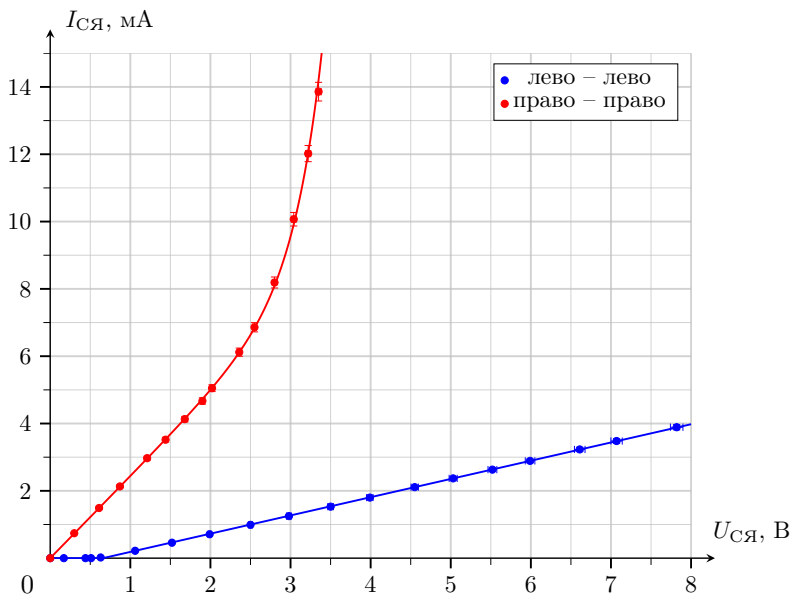
Заметим, что при разомкнутых ключах элементы серого ящика соединены последовательно, а при замкнутых – параллельно. Тогда при разомкнутых ключах сопротивление серого ящика максимально, а при замкнутых – минимально. По графику однозначно определяем положения ключей.

	Влево	Вправо
Верхний ключ	разомкнут	замкнут
Нижний ключ	разомкнут	замкнут

K_1 влево, K_2 вправо

$U_{\text{СЯ}}, \text{ В}$	$U_R, \text{ В}$	$I = U_R/R, \text{ мА}$
0,00	0,00	0,00
0,72	0,26	0,60
1,42	0,51	1,19
2,09	0,75	1,75
2,48	0,89	2,07
3,36	1,22	2,84
4,17	1,49	3,48
4,86	1,75	4,06
5,65	2,03	4,72
6,32	2,27	5,28
6,96	2,50	5,81





Сопротивления R_1 и R_2 определим с помощью коэффициентов наклона ВАХ резисторов. Для оценки их погрешностей проведём прямые, проходящие через кресты погрешностей с максимально и минимально возможными углами наклонами.

	min	max	Среднее
$k_1, (\text{кОм})^{-1}$	0,815	0,850	0,835
$R_1, \text{Ом}$	1176	1227	1198
$k_2, (\text{кОм})^{-1}$	1,57	1,63	1,60
$R_2, \text{Ом}$	613	637	625

$R_1 = (1200 \pm 30) \text{ Ом}; R_2 = (625 \pm 12) \text{ Ом}.$

При разомкнутых ключах мы снимаем ВАХ НЭ в прямом направлении последовательно с R_1 и R_2 . По этой характеристике можно определить ВАХ НЭ в прямом направлении:

$$U_{НЭ} = U_{CЯ} - I_{CЯ}(R_1 + R_2); I_{НЭ} = I_{CЯ}.$$

При замкнутых ключах мы снимаем ВАХ НЭ в обратном направлении (ток через нелинейный элемент течёт справа налево) с параллельно подключенными сопротивлениями R_1 и R_2 . По этой характеристике определим ВАХ НЭ в обратном направлении.

$$U_{\text{НЭ}} = -U_{\text{СЯ}}; I_{\text{НЭ}} = -(I_{\text{СЯ}} - \frac{U_{\text{СЯ}}}{R_1} - \frac{U_{\text{СЯ}}}{R_2}).$$

ВАХ НЭ в прямом направлении

$U_{\text{НЭ}}, \text{ В}$	$I_{\text{НЭ}}, \text{ мА}$
0,00	0,00
0,17	0,00
0,44	0,00
0,51	0,00
0,60	0,02
0,66	0,22
0,69	0,46
0,69	0,71
0,70	0,99
0,71	1,25
0,71	1,53
0,72	1,80
0,72	2,11
0,73	2,37
0,73	2,63
0,73	2,89
0,74	3,23
0,73	3,48
0,74	3,89

ВАХ НЭ в обратном направлении

$U_{НЭ}, В$	$I_{НЭ}, мА$
-0,00	-0,00
-0,30	-0,00
-0,61	-0,00
-0,87	-0,00
-1,21	-0,01
-1,44	-0,01
-1,68	-0,03
-1,90	-0,05
-2,02	-0,12
-2,36	-0,36
-2,55	-0,64
-2,80	-1,35
-3,04	-2,65
-3,22	-4,17
-3,35	-5,69

Представим ВАХ НЭ на графике.

