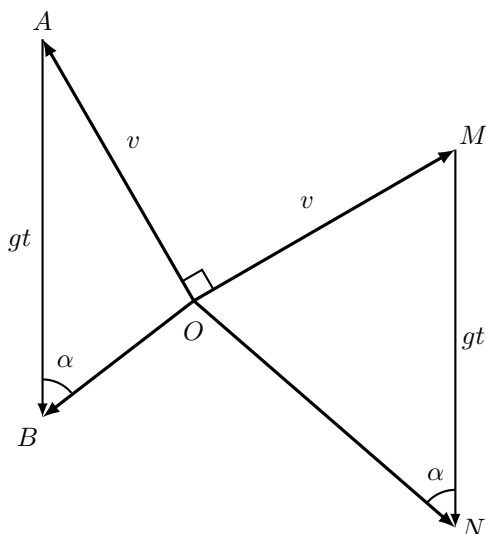


Задача №11-Т1. Два камня

Графический метод решения

Построим векторные треугольники скоростей для каждого из камней с общим началом в точке O . Вершины треугольников для удобства подпишем буквами. На рисунке $\vec{OA}$, $\vec{OM}$ – векторы начальных скоростей, $\vec{OB}$, $\vec{ON}$ – векторы скоростей перед падением на землю одного из камней.



По теореме синусов из $\triangle AOB$ и $\triangle MON$ находим

$$\frac{v}{\sin \alpha} = \frac{gt}{\sin \angle AOB} = \frac{gt}{\sin \angle MON}.$$

Поскольку камни брошены по условию под разными углами, то из равенства $\sin \angle AOB = \sin \angle MON$ следует $\angle AOB + \angle MON = 180^\circ$. Тогда $\angle BON = 90^\circ$, а камни движутся под одинаковыми углами к вертикали $\alpha = \angle BON/2 = 45^\circ$.

Искомый угол с горизонтом составляет $\varphi = 90^\circ - \alpha = 45^\circ$.

Из закона сохранения энергии: $|\overrightarrow{ON}| = v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh}$.

Для нахождения расстояния между камнями в этот момент определим время движения. По теореме косинусов для $\triangle MON$

$$v^2 + 2gh + (gt)^2 - 2\sqrt{v^2 + 2gh} \cdot gt \cdot \cos 45^\circ = v^2.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим два корня

$$t = \frac{\sqrt{v^2 + 2gh} \pm \sqrt{v^2 - 2gh}}{\sqrt{2}g}.$$

Учитывая условие, что первоначально оба камня удаляются от земли, необходимо выбрать знак $+$. Умножая полученное время на относительную скорость камней $v = \sqrt{2}v$, получаем выражение для расстояния между камнями в этот момент времени

$$l = vt = \frac{v}{g} \left(\sqrt{v^2 + 2gh} + \sqrt{v^2 - 2gh} \right).$$

Аналитический метод решения

Пусть первым упадет камень брошенный под углом γ . В момент перед падением этого камня на землю

$$y = h + v \sin \gamma t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0.$$

откуда получаем время движения

$$t_1 = \frac{v \sin \gamma}{g} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2 \gamma}} \right).$$

Из уравнений движения камней определим проекции скоростей

$$v_{1x} = v \cos \gamma, v_{1y} = v \sin \gamma - gt,$$

$$v_{2x} = v \cos \beta, v_{2y} = v \sin \beta - gt.$$

В момент, когда векторы скоростей камней направлены под одинаковыми углами к горизонту

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{v_{2y}}{v_{2x}}.$$

Из получившегося соотношения следуют два уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v \sin \gamma - gt_1}{v \cos \gamma},$$

$$\frac{v \sin \gamma - gt_1}{v \cos \gamma} = \frac{v \sin \beta - gt_1}{v \cos \beta}.$$

Преобразуем уравнения, используя выражение для t_1

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{v^2 \sin^2 \gamma + 2gh}}{v \cos \gamma},$$

$$-\frac{\sqrt{v^2 \sin^2 \gamma + 2gh}}{v \cos \gamma} = \frac{v \sin \beta - v \sin \gamma - \sqrt{v^2 \sin^2 \gamma + 2gh}}{v \cos \beta}.$$

Выразив $\sqrt{v^2 \sin^2 \gamma + 2gh}$ из второго уравнения и подставив в первое получим

$$\operatorname{tg} \varphi = -1.$$

Искомый угол с горизонтом составляет $\varphi = 45^\circ$.

Используя $\tan \varphi = -1$, из $\tan \varphi = -\frac{\sqrt{v^2 \sin^2 \gamma + 2gh}}{v \cos \gamma}$ найдем

$$\sin \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v^2}},$$

$$\cos \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v^2}}.$$

Тогда время t_1

$$t_1 = \frac{v}{g} \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v^2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v^2}} \right).$$

Умножая полученное время на относительную скорость камней $v = \sqrt{2}v$, получаем выражение для расстояния между камнями в этот момент времени

$$l = vt = \frac{v}{g} \left(\sqrt{v^2 + 2gh} + \sqrt{v^2 - 2gh} \right).$$

Задача №11-Т2. Цикл, как цикл

Первый метод

В процессах 2 – 3 и 4 – 1 подведенное к газу количество теплоты равно нулю, поэтому эти процессы – адиабатические, их уравнение в координатах (T, V) имеет вид

$$TV^{1/3} = \text{const.}$$

Получим уравнение процессов 1 – 2 и 3 – 4. Пусть ΔT , ΔV – бесконечно малые изменения температуры и объема, тогда изменение внутренней энергии

$$\Delta U = 3\nu R \Delta T,$$

а работа газа $\delta A = p \Delta V$, поэтому для процесса выполняется соотношение

$$3\nu R \Delta T = \frac{\nu R T}{V} \Delta V.$$

Сократив общие множители и разделяя переменные получим

$$3 \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta V}{V},$$

откуда после интегрирования найдем уравнение процесса

$$TV^{-1/3} = \text{const.}$$

Используя уравнение адиабаты для процесса 4 – 1, найдем объем газа в точке 1:

$$T_1 V_1^{1/3} = T_4 V_4^{1/3},$$

откуда с учетом значения температур $T_1 = 2T_4 = 2T_0$ получим $V_1 = V_0/8$. Аналогично с помощью уравнения процесса 3 – 4

$$T_3 V_3^{-1/3} = T_4 V_4^{-1/3},$$

получим $V_3 = 8V_0$. Запишем также уравнения для процессов 1 – 2 и 2 – 3:

$$T_1 V_1^{-1/3} = T_2 V_2^{-1/3}, \quad T_3 V_3^{1/3} = T_2 V_2^{1/3}.$$

Разделив второе уравнение на первое и учтем равенство $T_1 = T_3$:

$$V_2^{2/3} = V_3^{1/3} V_1^{1/3} = V_0^{2/3},$$

а значит $V_2 = V_0$. Тогда температура $T_2 = T_1 V_1^{-1/3} V_2^{1/3} = 4T_0$.

Второй метод

Будем решать в терминах TS . В процессах 2 – 3 и 4 – 1 подведенное к газу количество теплоты равно нулю, поэтому эти процессы – адиабатические, в них сохраняется энтропия, поэтому

$$S_2 = S_3 \text{ и } S_1 = S_4.$$

Найдём изменение энтропии в процессах 1 – 2 и 3 – 4:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{2 dU}{T} = 2\nu C_V \frac{dT}{T}.$$

$$S_2 - S_1 = 2\nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = 2\nu C_V \ln \frac{T_3}{T_4} = S_3 - S_4.$$

Получаем соотношение на температуры:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}.$$

$$T_2 = \frac{T_1 T_3}{T_4}$$

$$T_2 = 4T_0$$

Уравнение адиабаты в координатах (p, V) имеет вид $pV^{4/3} = \text{const}$, а значит в логарифмических координатах график процесса – прямая

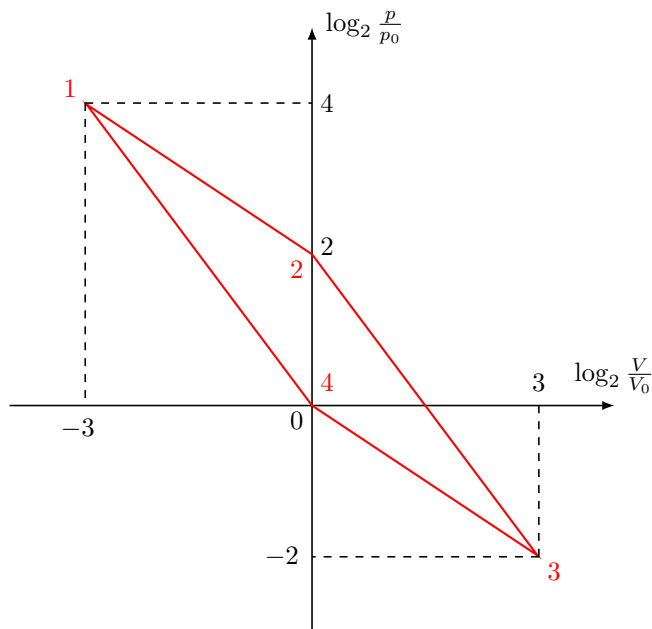
$$\log_2 \frac{p}{p_0} + \frac{4}{3} \log_2 \frac{V}{V_0} = \text{const}.$$

Аналогично уравнения процессов 1 – 2 и 3 – 4 в координатах (p, V) получается из найденного в предыдущем пункте с помощью уравнения состояния $pV/T = \text{const}$, $pV^{2/3} = \text{const}$, в логарифмических координатах также получим прямые

$$\log_2 \frac{p}{p_0} + \frac{2}{3} \log_2 \frac{V}{V_0} = \text{const}.$$

Таким образом достаточно вычислить координаты точек 1, 2, 3, 4. Объемы уже найдены в предыдущем пункте. С помощью уравнения состояния получим $p_1 = 16p_0$, $p_2 = 4p_0$, $p_3 = p_0/4$.

Тогда координаты граничных точек процессов в координатах $\log_2 \frac{V}{V_0}$ (абсцисса) и $\log_2 \frac{p}{p_0}$ (ордината) равны: 1 (–3, 4), 2 (0, 2), 3 (3, –2), 4 (0, 0). График процесса имеет вид параллелограмма.



Первый метод

На адиабатах теплота не отводится и не подводится. Для оставшихся двух процессов подведенное тепло $Q = \Delta U + A$, причем поскольку $A = \Delta U$, выполняется $Q = 2\Delta U = 2C_V\Delta T$, где C_V – теплоемкость газа при постоянном объеме. Тогда на участке 1–2 подводится тепло $Q_+ = 2C_V(T_2 - T_1) = 4C_VT_0$, а на участке 3–4 отводится тепло $Q_- = 2C_V(T_3 - T_4) = 2C_VT_0$, поэтому КПД

$$\eta = \frac{Q_+ - Q_-}{Q_+} = \frac{1}{2}.$$

Второй метод

Найдём зависимость $T(S)$ для процессов 1–2 и 3–4.

$$T_{3-4}(S) = T_4 \exp\left(\frac{S - S_4}{2\nu C_V}\right),$$

$$T_{1-2}(S) = T_1 \exp\left(\frac{S - S_1}{2\nu C_V}\right) = 2T_{3-4}(S).$$

Подставим в выражение для КПД:

$$\eta = \frac{\int_{S_1}^{S_2} T_{1-2} dS - \int_{S_4}^{S_3} T_{3-4} dS}{\int_{S_1}^{S_2} T_{1-2} dS} = \frac{2 \int_{S_4}^{S_3} T_{3-4} dS - \int_{S_4}^{S_3} T_{3-4} dS}{2 \int_{S_4}^{S_3} T_{3-4} dS} = \frac{1}{2}.$$

Задача №11-Т3. Электростатическая левитация

Из симметрии системы относительно оси цилиндра следует, что сила электростатического взаимодействия между цилиндром и диском всегда направлена вдоль этой оси. Поскольку сила реакции опоры равна нулю, а диск неподвижен, сила F_0 полностью уравновешена силой тяжести, $F_0 = mg$. Масса диска выражается через его плотность D и размеры как:

$$M = \pi R^2 d D.$$

Отсюда получим

$$\frac{4}{3} \frac{\rho^2 R^3 d}{\varepsilon_0} = \pi R^2 d D g,$$

а значит, плотность равна

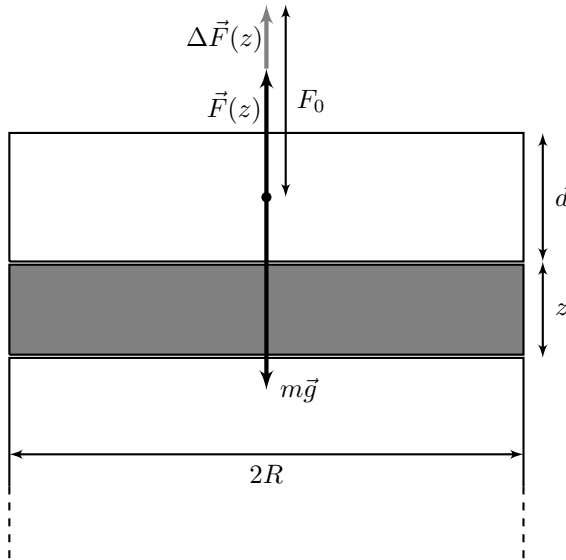
$$D = \frac{4}{3\pi} \frac{\rho^2 R}{\varepsilon_0 g}$$

При удалении диска от поверхности цилиндра действующая на него сила электростатического отталкивания уменьшается, поэтому возникает результирующая сила, направленная к цилиндру. Найти эту силу можно несколькими способами.

Первый способ

Введём совпадающую с осью симметрии координатную ось Oz с началом в центре торца цилиндра, так что положение тонкого диска в пространстве задаётся координатой z центра его нижнего основания. Пусть диск сдвинут на небольшое расстояние $z \ll R$ вдоль оси. Мысленно заполним всё свободное пространство между диском и цилиндром материалом цилиндра. Тогда сила F_0 , действующая на диск, будет такой же, как и в положении прямо у торца цилиндра. Поэтому сила F_0 уменьшилась на силу взаимодействия двух тонких дисков: исходного и вспомогательного высотой z и плотностью заряда ρ ,

$$F(z) = F_0 - \Delta F(z).$$



Вычислим силу взаимодействия двух тонких дисков, прислонённых друг к другу вплотную. Для всех точек одного из дисков, находящихся далеко от края, можно приближенно рассматривать второй диск как бесконечную плоскость, так что нормальная напряженность электрического поля будет равна полю бесконечной плоскости с плотностью заряда $\sigma = \rho z$:

$$E_n = \frac{\rho z}{2\varepsilon_0}.$$

Это приближение не применимо только для точек на расстоянии порядка z от края диска, поэтому при малых z им можно пренебречь. Эта напряжённость действует на заряд на другом диске. Тогда

$$\Delta F = \frac{\rho z}{2\varepsilon_0} \cdot \pi R^2 d\rho = \frac{\pi \rho^2 d R^2}{2\varepsilon_0} z.$$

Второй способ

Нормальная составляющая силы, действующей на небольшую плоскую площадку ΔS с поверхностной плотностью заряда σ , связана с потоком электрического поля $\Delta\Phi = E_n \Delta S$ через эту площадку (индекс n означает компоненту, нормальную к площадке):

$$\Delta F_n = \sigma E_n \Delta S = \sigma \Delta\Phi.$$

В нашем случае поверхностная плотность заряда постоянна и равна

$$\sigma = \rho d,$$

так что суммируя силы, действующие на разные участки поверхности диска, получим полную силу

$$F = F_n = \sigma \Phi = \rho d \Phi,$$

где Φ – поток электрического поля через поверхность диска.

При перемещении диска вдоль оси изменяется и поток через него, так что поток и сила — функции координаты, то есть

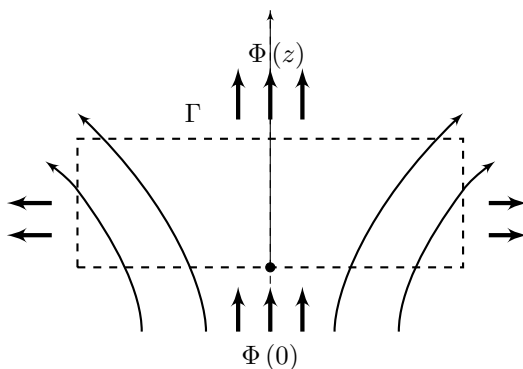
$$\Phi = \Phi(z); \quad F = F(z) = \rho d \Phi(z).$$

Для вычисления изменения потока используем теорему Гаусса. Рассмотрим цилиндр Γ радиуса R , высоты $z \ll R$, расположенный торцом к торцу с бесконечным цилиндром и соосный с ним. В отсутствие диска в Γ нет зарядов, так что суммарный поток через него должен быть нулевым. Выберем положительным направление потока в цилиндр Γ . Через торец, прилежащий к цилиндру, заходит поток $\Phi(0)$, через противоположный торец выходит поток $\Phi(z)$, а через боковую поверхность выходит поток $E_r \cdot 2\pi R z$, где E_r — радиальная напряжённость полубесконечного цилиндра на расстоянии R от центра. Итак, теорема Гаусса для цилиндра Γ записывается следующим образом:

$$\Phi(0) - \Phi(z) - 2\pi R E_r z = 0,$$

откуда

$$\Phi(z) = \Phi(0) - 2\pi R E_r z.$$



Вычислим значение E_r . Заметим, что при добавлении второй половинки бесконечного цилиндра получается бесконечный уже в обе стороны цилиндр плотностью заряда ρ с разрезом высоты $2z$, поправка к радиальной напряжённости от которого пропорциональна смещению диска z и в рамках малых колебаний ($z \ll R$) пренебрежимо мала. Таким образом, в первом приближении E_r составляет половину напряжённости E от бесконечного в обе стороны цилиндра с плотностью заряда ρ , которая может быть получена применением теоремы Гаусса:

$$E \cdot 2\pi Rl = \frac{\rho\pi R^2 l}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0} \implies E_r = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}.$$

Окончательно для силы получим такое же выражение

$$F_z = \rho d \left(\Phi_0 - 2\pi R \frac{\rho R}{4\varepsilon_0} \right) = F_0 - \frac{\pi \rho^2 R^2 d}{2\varepsilon_0} z,$$

то есть тот же ответ, что и раньше.

Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнение движения диска:

$$M\ddot{z} = -Mg + F(z) = -\frac{\pi \rho^2 d R^2}{2\varepsilon_0} z$$

или

$$\ddot{z} + \frac{\pi \rho^2 d R^2}{2M\varepsilon_0} z = 0.$$

Подставив сюда выражение для массы цилиндра через электростатическую силу $M = F_0/g$, получим

$$\ddot{z} + \frac{3\pi}{8} \frac{g}{R} z = 0,$$

что совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}}.$$

Однако важно принять во внимание упругое соударение диска с цилиндром, так как из-за него период уменьшается вдвое: проходит только одна половина полного колебания, а вторая, симметричная ей, нивелируется за счёт моментального разворота диска при соударении с цилиндром. Таким образом, так как положение устойчивого равновесия диска находится в точке $z = 0$, а движение в области $z < 0$ невозможно, ответ не зависит от величины v_0 . Окончательно

$$T = \pi \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}}.$$

Изменение радиуса диска приводит к изменению обеих движущих сил: силы тяжести и электростатической силы. Изменение силы тяжести равно

$$\Delta(mg) = g\Delta m = Dg\Delta V = \pi dDg\Delta R^2 = 2\pi dgDR\Delta R,$$

где учтено $\Delta R \ll R$.

Перейдём к вычислению изменения электростатической силы. Сила, действующая на исходный диск, равна сумме сил, действующих на кольцо ширины ΔR и на диск радиуса R' . Поэтому величина силы, действующей на диск радиуса R' будет меньше на величину силы электростатического отталкивания ΔF кольца от цилиндра

$$F = F_0 - \Delta F.$$

Таким образом, нам нужно найти силу взаимодействия кольца ширины ΔR и полубесконечного цилиндра. Это можно сделать различными способами.

Прямое интегрирование

Система симметрична относительно оси z цилиндра, поэтому сила, действующая на кольцо, также будет направлена вдоль оси z . Найдём составляющую электрического поля E_z , которую полубесконечный цилиндр создает в некоторой точке на своей границе. Для этого выберем некоторый объем внутри цилиндра dV , он дает вклад в напряженность электрического поля

$$dE_z = -\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + (\vec{R} - \vec{r})^2)^{3/2}} dV,$$

где элемент объема $dV = dz dS$, а интегрирование по $\vec{r}$ производится по диску $|\vec{r}| < R$, а $\vec{R}$ – радиус-вектор рассматриваемой точки на краю диска. Тогда электрическое поле имеет вид

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \int dS \int_{-\infty}^0 dz \frac{z}{(z^2 + (\vec{R} - \vec{r})^2)^{3/2}}.$$

Теперь интеграл по z можно вычислить элементарно:

$$-\int_{-\infty}^0 \frac{z dz}{(z^2 + (\vec{R} - \vec{r})^2)^{3/2}} = -\int_{-\infty}^0 \frac{d(z^2/2)}{(z^2 + (\vec{R} - \vec{r})^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + (\vec{R} - \vec{r})^2}} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|}.$$

Таким образом, остается вычислить интеграл по площади диска

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int dS \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|}.$$

Тогда искомая сила будет иметь вид

$$\Delta F = q_1 E_z,$$

где $q_1 = 2\pi\rho R\Delta R d$ – заряд кольца.

Энергетический метод

Воспользуемся методом виртуальных перемещений. Возьмём вначале исходный диск радиуса R , прислонённый к торцу цилиндра, и мысленное передвинем его вдоль оси на расстояние δl . Тогда мы совершим работу, которую обозначим за

$$A = -F_0 \delta l.$$

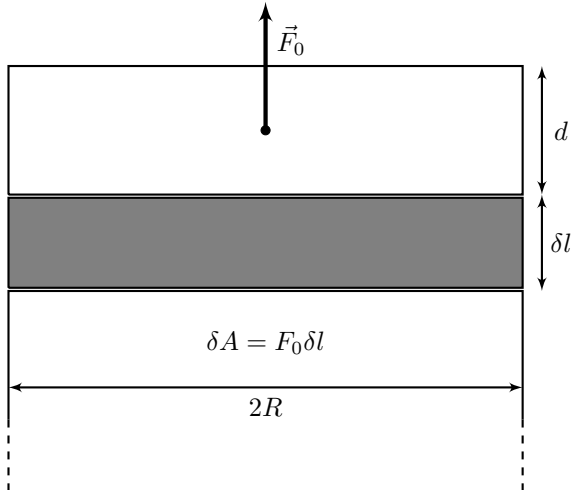
Эта работа идёт на изменение потенциальной энергии системы. Мысленно заполним освободившийся объём

$$V = \pi R^2 \delta l$$

веществом цилиндра и получим исходную потенциальную энергию системы. Таким образом заключаем, что энергия взаимодействия уменьшилась на величину

$$\Delta E = -A,$$

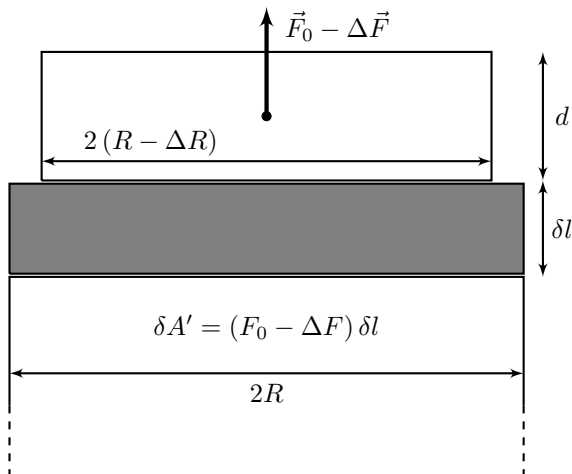
которая равна энергии взаимодействия двух тонких дисков радиусами R и R , вплотную прислонённых друг к другу.



Теперь аналогично применим метод виртуальных перемещений для диска меньшего радиуса R' . Пусть при перемещении его вдоль оси на расстояние δl мы совершили работу

$$A' = -F\delta l = -(F_0 - \Delta F)\delta l = -F_0\delta l + \Delta F\delta l.$$

Аналогично заметим, что по модулю эта работа равна энергии $\Delta E'$ взаимодействия двух дисков: одного радиуса R и высоты δl , а другого радиуса R' и высоты d .



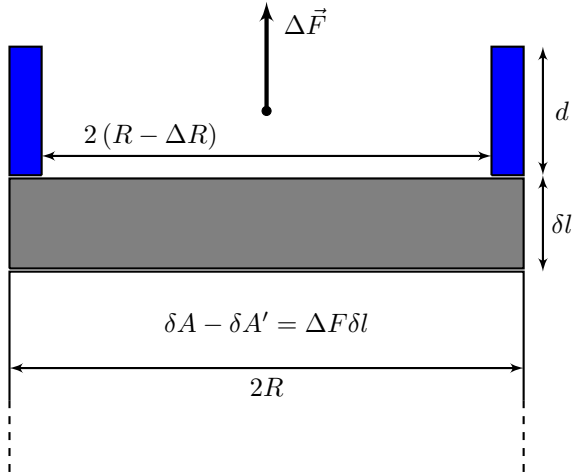
Для вычисления ΔF вычтем одно из другого уравнения, полученные методом виртуальных перемещений:

$$\Delta F\delta l = A' - A = \Delta E - \Delta E'.$$

Заметим, что разность энергий

$$\Delta E - \Delta E'$$

равна энергии взаимодействия диска радиусом R и высотой δl с кольцом высоты d , внутренний и внешний радиусы которого равны R' и R соответственно. Эта энергия может быть вычислена напрямую. Поскольку $\Delta R \ll R$, все точки кольца расположены практически на границе диска, и задача сводится к задаче о вычислении потенциала равномерно заряженного диска на его краю.



Для диска с поверхностной плотностью заряда σ участок площади dS , его вклад в потенциал будет иметь вид

$$d\varphi = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{r}|},$$

а сам потенциал представляется в виде интеграла

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dS}{|\vec{R} - \vec{r}|}.$$

Заметим, что задача свелась к в точности такому же интегралу, что и в первом методе.

Будем интегрировать в полярных координатах. Введём начало отсчёта в точке на краю диска, а за начальное направление (направление с нулевым углом) выберем направление касательной к окружности сечения диска. Положение точки на диске характеризуется двумя координатами: радиус-вектором r и углом поворота θ радиус-вектора относительно начального направления. В терминах малых приращений dr и $d\theta$ элементарный элемент площади записывается как

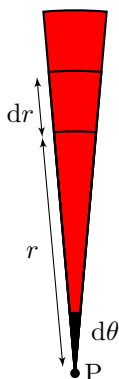
$$dS = r dr d\theta.$$

Тогда приращение потенциала от этого элемента площади (заряда) может быть записано как

$$d\varphi = k \frac{dq}{r} = k \frac{\sigma dS}{r} = k\sigma \frac{r dr d\theta}{r} = k\sigma dr d\theta.$$

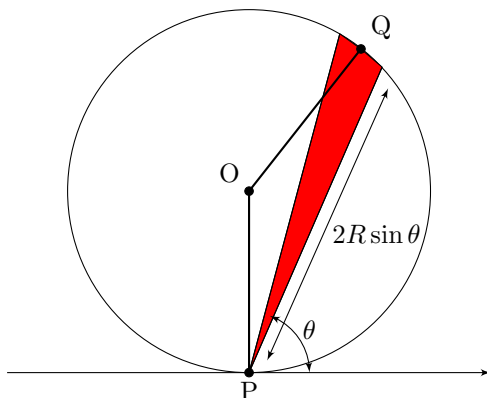
Нам необходимо взять интеграл по всему диску. Интегрировать будем по каждой из переменных по очереди.

Первый способ



Вначале проинтегрируем по r и найдём потенциал, который образует в своей вершине треугольник с высотой $r_{\max}(\theta) = 2R \sin \theta$ и малым основанием $r_{\max}(\theta) d\theta$. Этот потенциал равен

$$d\varphi = k\sigma \sin \theta d\theta = \frac{\sigma R}{2\pi\epsilon_0} \sin \theta d\theta.$$



Затем полученное выражение проинтегрируем по углу θ в пределах от 0 до π , поскольку именно такие значения принимает θ для точек диска:

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0}.$$

Второй способ

Вначале проинтегрируем по θ и найдём, какой потенциал образует часть дуги окружности радиуса r в центре закругления. Расстояние от него до любой точки дуги одинаково и равно r . Тогда потенциал $d\varphi$ от дуги окружности радиуса r равен

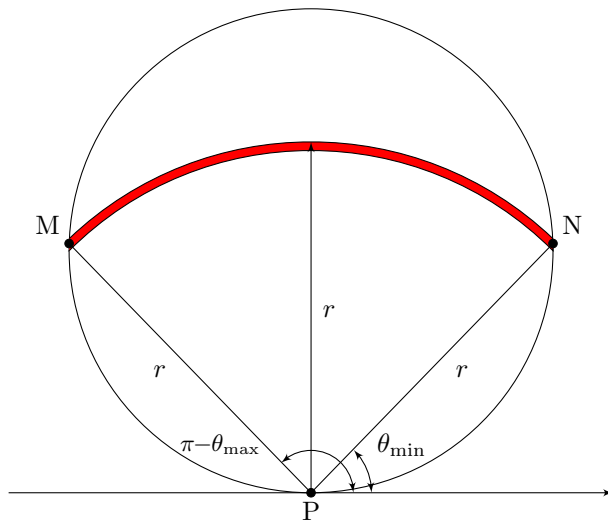
$$d\varphi = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r \, d\theta}{r} = \frac{\sigma \, dr}{4\pi\epsilon_0} \int_{\arcsin(\frac{r}{2R})}^{\pi - \arcsin(\frac{r}{2R})} d\theta = \sigma \frac{\pi - 2\arcsin(\frac{r}{2R})}{4\pi\epsilon_0} \, dr.$$

Осталось лишь проинтегрировать по r в пределах от 0 до $2R$. Последнее значение соответствует наиболее удалённой от точки Р точке диска.

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2R} \left(\pi - 2\arcsin\left(\frac{r}{2R}\right) \right) \, dr.$$

Воспользуемся техникой интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[2\pi R - 2r \arcsin\left(\frac{r}{2R}\right) \right]_0^{2R} + 2 \int_0^{2R} \frac{r/2R}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2R}\right)^2}} \, dr = \\ &= -\frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2R}\right)^2} \Big|_0^{2R} = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0}. \end{aligned}$$



Итак, выражение для потенциала на краю тонкого диска имеет вид

$$\varphi = \frac{\sigma R}{\pi \varepsilon_0}.$$

Энергия взаимодействия диска с кольцом, которая равна работе искомого изменения силы, согласно определению потенциала, может быть выражена через произведение заряда кольца на потенциал на краю диска. В нашем случае эффективная поверхностная плотность заряда диска σ и эффективная линейная плотность заряда кольца λ равны

$$\sigma = \rho \delta l; \quad \lambda = d \Delta R.$$

Таким образом,

$$\Delta F \delta l = \varphi \delta q = \frac{\rho R}{\pi \varepsilon_0} 2\pi R d \Delta R \delta l,$$

или, сокращая,

$$\Delta F = \frac{2\rho^2 d R^2}{\varepsilon_0} \Delta R.$$

Наконец, определим положение равновесия диска R' . Для этого, аналогично пункту 2, вычислим значение $F(z)$ электростатической силы F в точке $z \ll R$.

Переместим диск радиуса R' в точку z и мысленно заполним освободившееся пространство материалом цилиндра. Тогда можно сделать вывод о том, что электростатическая сила изменилась ровно на величину силы взаимодействия двух

тонких дисков разных радиусов. Аналогично идее пункта 2, получаем выражение для этой силы:

$$F(z) = F(0) - \frac{\rho z}{2\varepsilon_0} \pi R'^2 d\rho = F_0 - \Delta F - \frac{\pi d\rho^2 (R - \Delta R)^2}{2\varepsilon_0} z.$$

Запишем уравнение движения диска меньшего радиуса, полагая его массу равной m' .

$$m' \ddot{z} = F(z) - m'g = F_0 - \Delta F - \frac{\pi d\rho^2 (R - \Delta R)^2}{2\varepsilon_0} z - mg + 2\pi dg DR \Delta R.$$

С учётом

$$F_0 = mg$$

упростим уравнение, подставив выражение для плотности:

$$m' \ddot{z} = \pi d(R - \Delta R)^2 D \ddot{z} = -\frac{2\rho^2 dR^2}{\varepsilon_0} \Delta R - \frac{\pi d\rho^2 (R - \Delta R)^2}{2\varepsilon_0} z + 2\pi dg DR \Delta R$$

$$\ddot{z} = -\frac{2\rho^2}{\pi D\varepsilon_0} \Delta R - \frac{\rho^2}{2D\varepsilon_0} z + \frac{2g}{R} \Delta R = -\frac{3g}{2R} \Delta R - \frac{3\pi g}{8R} z + \frac{2g}{R} \Delta R = \frac{g}{2R} \Delta R - \frac{3\pi}{8} \frac{g}{R} z.$$

Положение равновесия z_0 определяется условием

$$\ddot{z}(z_0) = 0,$$

так что z_0 является решением уравнения

$$\ddot{z}(z_0) = \frac{g}{2R} \left(\Delta R - \frac{3\pi}{4} z_0 \right) = 0.$$

$$z_0 = \frac{4}{3\pi} \Delta R.$$

В отсутствие контакта с поверхностью цилиндра уравнение движения диска выглядит так:

$$\ddot{z} + \frac{3\pi}{8} \frac{g}{R} z - \frac{g}{2R} \Delta R = 0.$$

Это уравнение с точностью до аддитивной постоянной совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}},$$

так что общее решение может быть записано сразу.

$$z(t) = C_1 \sin \left(\sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}} t \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}} t \right) + \frac{4}{3\pi} \Delta R.$$

Вычислим константы C_1 и C_2 с помощью начальных условий:

$$\begin{cases} z(0) = \frac{4}{3\pi} \Delta R = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) + \frac{4}{3\pi} \Delta R, \\ \dot{z}(0) = v_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}} C_1 \cos(0) - \sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}} C_2 \sin(0). \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = v_0 \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}}, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Итак, в отсутствие контакта с цилиндром диск совершает гармонические колебания вокруг положения равновесия z_0 с циклической частотой ω_0 , а зависимость координаты z от времени выглядит как

$$z(t) = \frac{4}{3\pi} \Delta R + v_0 \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}} \sin \left(\sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}} t \right).$$

Заметим, что модуль скорости v_0 непосредственно определяют амплитуду колебаний. При малых v_0 возможно описанное движение диска без контакта с поверхностью цилиндра, однако при больших амплитудах будут происходить упругие соударения и период колебаний изменится.

Вычислим критическое значение v_0 , при котором начинают происходить соударения диска и цилиндра. Амплитуда синуса должна быть равна расстоянию от положения равновесия до ограничивающей поверхности $z = 0$.

$$v_0^{\text{крит}} \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}} = \frac{4}{3\pi} \Delta R \Leftrightarrow v_0^{\text{крит}} = \sqrt{\frac{2}{3\pi} \frac{g}{R}} \Delta R.$$

Тогда в случае $v_0 < v_0^{\text{крит}}$ диск проходит полное колебания, а ответ для периода

$$T' = 2T = 2\pi \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}}.$$

Рассмотрим случай $v_0 > v_0^{\text{крит}}$. Заметим, что одну половину колебаний (в неограниченную сторону — от цилиндра) диск проходит без внешних вмешательств. Рассмотрим ранее симметричную ей часть колебаний. При достижении координаты $z = 0$ диск моментально разворачивается без потери энергии и совершает движение в обратную сторону. Вычислим время t_0 , необходимое для

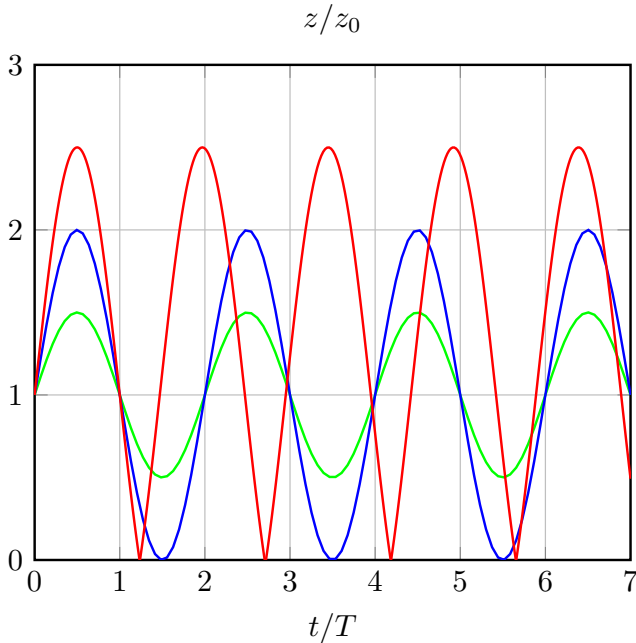
движения от z_0 до $z = 0$.

$$z(t_0) = 0 = \frac{4}{3\pi} \Delta R + v_0 \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}} \sin \left(\sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}} t_0 \right).$$

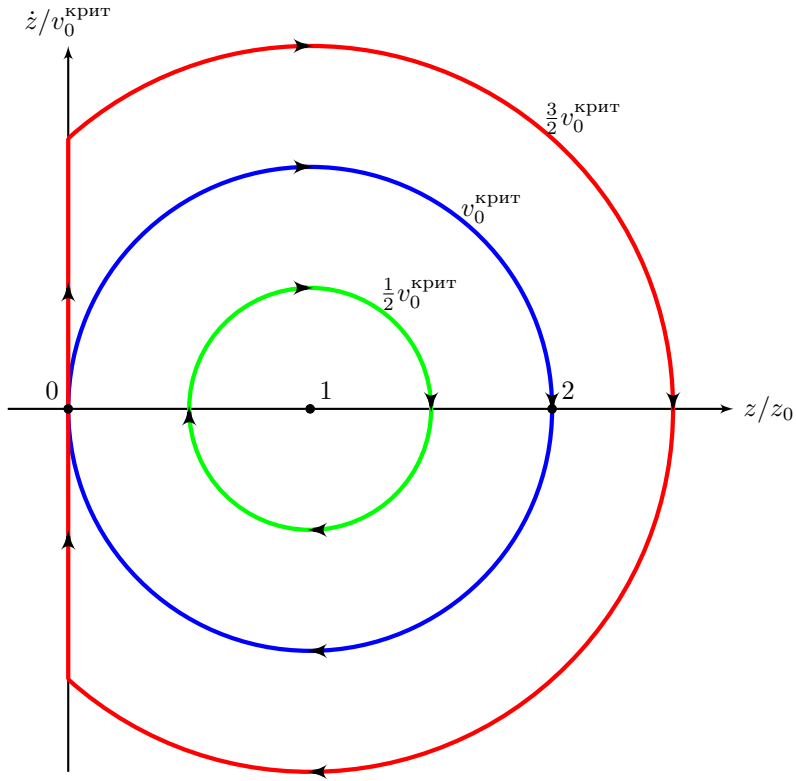
Тогда, применяя обратную тригонометрическую функцию,

$$t_0 = \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{3\pi} \frac{g}{R}} \frac{\Delta R}{v_0} \right).$$

Ниже можно увидеть графики зависимостей координаты диска от времени для разных начальных скоростей.



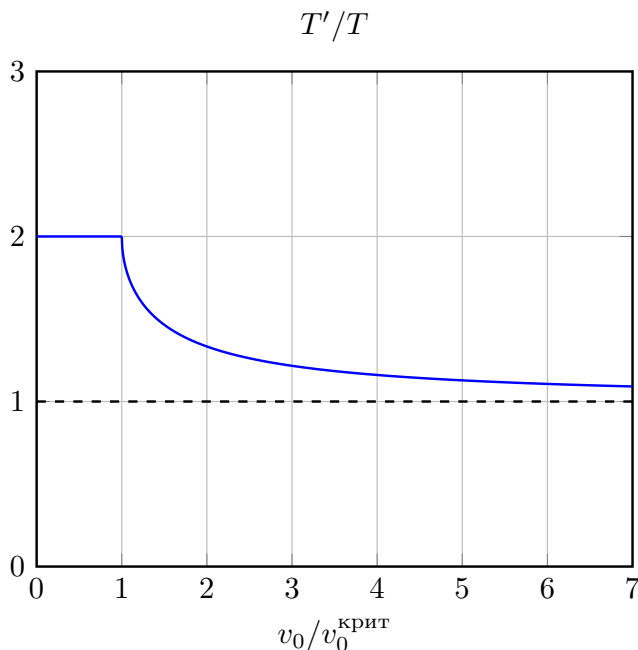
В качестве наглядной иллюстрации изобразим движение при разных v_0 на фазовой диаграмме $(z/z_0; \dot{z}/v_0^{\text{крит}})$. При превышении критической скорости колебанию начинает соответствовать только часть полной окружности, вследствие чего период сокращается.



С учётом симметричности фазовой диаграммы относительно оси $\dot{z} = 0$, мы наконец имеем ответ для периода.

$$T' = \begin{cases} 2T = 2\pi\sqrt{\frac{8}{3\pi}\frac{R}{g}} & \text{при } v_0 \leq \sqrt{\frac{2}{3\pi}\frac{g}{R}}\Delta R; \\ T\left(1 + \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}\frac{g}{R}}\frac{\Delta R}{v_0}\right)\right) = \sqrt{\frac{8}{3\pi}\frac{R}{g}}\left[\pi + 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}\frac{g}{R}}\frac{\Delta R}{v_0}\right)\right] & \text{при } v_0 > \sqrt{\frac{2}{3\pi}\frac{g}{R}}\Delta R. \end{cases}$$

Изобразим график зависимости периода T' от значения v_0 .



Задача №11-Т4. Конденсатор Глюка

Покажем ниже, что при напряжениях источника меньших U_1 , капля не растекается и конденсатор Глюка представляет собой обычный плоский конденсатор ёмкостью C_1 . Заметим, что вклад капли в ёмкость отсутствует из-за того, что она по условию маленькая.

При напряжениях источника больших, чем U_1 конденсатор Глюка представляет собой два параллельно соединённых конденсатора ёмкостями C_1 и C_2 . Конденсатор C_2 имеет в качестве одной обкладки нижнюю плоскость, а его вторая обкладка – это растёкшаяся капля проводящей жидкости. Обозначим площадь растёкшейся капли S , тогда:

$$C_2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{h}.$$

Проанализируем, чему может быть равна площадь растёкшейся капельки в зависимости от постоянного напряжения источника U , используя энергетический подход, и докажем сделанные выше утверждения. Напряжение источника можно считать постоянным, так как по условию оно изменяется плавно. Рассмотрим систему, состоящую из источника, конденсаторов и растёкшейся капельки. Найдём, как энергия системы зависит от площади растёкшейся капельки:

$$W = W_{\text{ист}} + W_{\text{конд}} + W_{\text{пов}} = -qU + \frac{q^2}{2C_0} + 2\sigma S,$$

где q – заряд, протёкший через источник, C_0 – общая ёмкость системы трёх конденсаторов, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Здесь энергия $W_{\text{ист}} = -qU = -C_0 U^2$, так как при зарядке конденсаторов через источник протекает заряд $q = C_0 U$ и запасённая в источнике энергия **уменьшается**.

Общая ёмкость системы трёх конденсаторов, когда опорный C соединён последовательно с конденсатором Глюка (который представляет собой параллельное соединение C_1 и C_2):

$$C_0 = \frac{C(C_1 + C_2)}{C + C_1 + C_2}.$$

Для удобства будем выражать энергию поверхностного натяжения не через площадь, а через ёмкость C_2 :

$$W_{\text{пов}} = 2\sigma S = \frac{2\sigma h}{\varepsilon \varepsilon_0} C_2.$$

Тогда, зависимость энергии системы от ёмкости C_2 (по сути, от площади растёкшейся капли), описывается выражением:

$$W(C_2) = -\frac{C(C_1 + C_2)U^2}{2(C + C_1 + C_2)} + \frac{2\sigma h}{\varepsilon \varepsilon_0} C_2.$$

В равновесии значение C_2 будет таким, чтобы энергия системы была минимальна. Найдём, при каком значении C_2 будет минимум, используя производную и приравнявая её нулю

$$W' = -\frac{C^2 U^2}{2(C + C_1 + C_2)^2} + \frac{2\sigma h}{\varepsilon \varepsilon_0} = 0.$$

Отсюда находим, что в случае расплюснутой капли, ёмкость образованного ею конденсатора C_2 зависит от напряжения источника U как

$$C_2 = CU\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4\sigma h}} - C - C_1.$$

Так как вторая производная всегда положительна, найденная точка действительно минимум:

$$W'' = \frac{C^2 U^2}{(C + C_1 + C_2)^3} > 0.$$

Заметим, что значение C_2 (и площади S) больше либо равно нулю при

$$U \geq 2\frac{C + C_1}{C}\sqrt{\frac{\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}} = U_1.$$

Поведение системы устроено следующим образом. При напряжениях источника от 0 до U_1 минимум энергии системы соответствует нулевой площади растёкшейся капельки, а конденсатор Глюка имеет постоянную ёмкость C_1 . При напряжениях источника $U > U_1$, растёкшаяся капелька имеет площадь такую, что ёмкость C_2 можно вычислить по указанной выше формуле. Напряжение на конденсаторе Глюка постоянно:

$$U_{\text{Глюк}} = \frac{C_0 U}{C_1 + C_2} = \frac{CU}{C + C_1 + C_2} = \sqrt{\frac{4\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{2}{3}U_1 = \text{const.}$$

Напряжение на опорном конденсаторе при напряжении на источнике $U = 2U_1$ равно

$$U_C = U - U_{\text{Глюк}} = 2U_1 - \frac{2}{3}U_1 = \frac{4}{3}U_1.$$

Для определения коэффициента поверхностного натяжения воспользуемся найденным выше напряжением

$$U = 2\sqrt{\frac{\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{2}{3}U_1.$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U_1^2}{9h} \approx 0,479 \text{ Н/м.}$$

Очень похоже на то, что Глюк использовал ртуть!

Задача №11-Т5. Две половинки

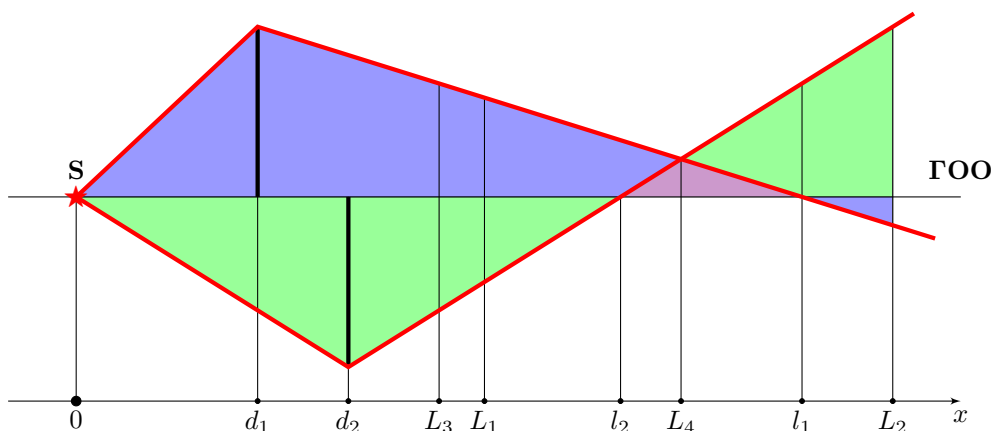


Рис. 1

Каждая из половинок линзы будет давать изображение, расстояние до которого можно найти по формуле тонкой линзы. Пусть l – искомое, тогда из: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ и $l = d + f$ получим $l = \frac{d^2}{d - F}$.

Расстояния l_1 и l_2 от источника до его изображений в верхней и нижней половинках линзы равны:

$$l_1 = 16F/3 \quad \text{и} \quad l_2 = 4F.$$

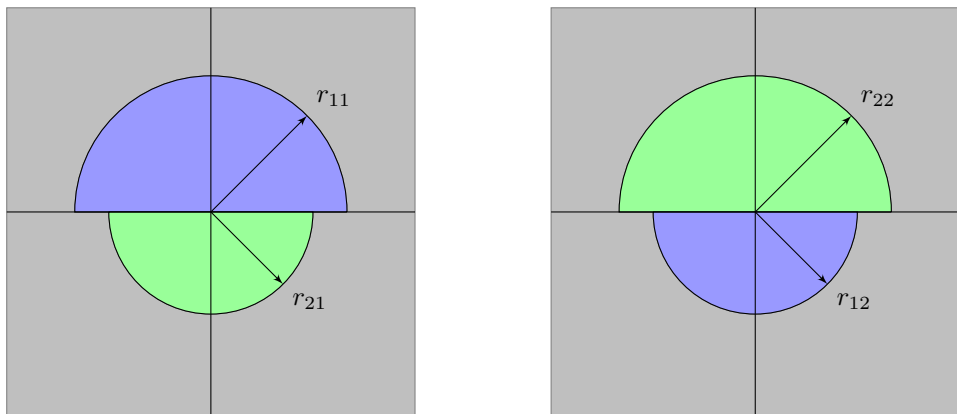


Рис. 2

При $L_1 = 3F$ и $L_2 = 6F$ пучки идут по разные стороны от ГОО, поэтому на экране возникнет равномерно освещенное изображение в виде двух полуокругов разного радиуса, величина которых может быть получена из рассмотрения подобных треугольников. В обоих случаях радиус нижнего полуокруга меньше, чем у верхнего: для $L_1 = 3F$ отношение радиусов равно

$$\frac{r_{\text{в}}}{r_{\text{н}}} = \frac{l_1 - L_1}{l_1 - d_1} \frac{l_2 - d_2}{l_2 - L_1} = \frac{7}{6},$$

а при $L_2 = 6F$

$$\frac{r_{\text{в}}}{r_{\text{н}}} = \frac{L_2 - l_2}{l_2 - d_2} \frac{l_1 - d_1}{L_2 - l_1} = 6,$$

На рисунке 2 полуокруги показаны схематически.

При перемещении экрана от расстояния $2F$ вправо несложно заметить, что в некотором положении радиусы полуокругов совпадут в промежутке от $2F$ до l_2 .

Искомое расстояние находим из пропорции, отражающей равенства двух коэффициентов подобия треугольников:

$$\frac{l_1 - d_1}{L_3 - d_1} = \frac{l_2 - d_2}{L_3 - d_2} \implies L_3 = \frac{d_2 l_1 - d_1 l_2}{l_1 - l_2 - d_1 + d_2}.$$

Искомое расстояние:

$$L_3 = 8F/3.$$

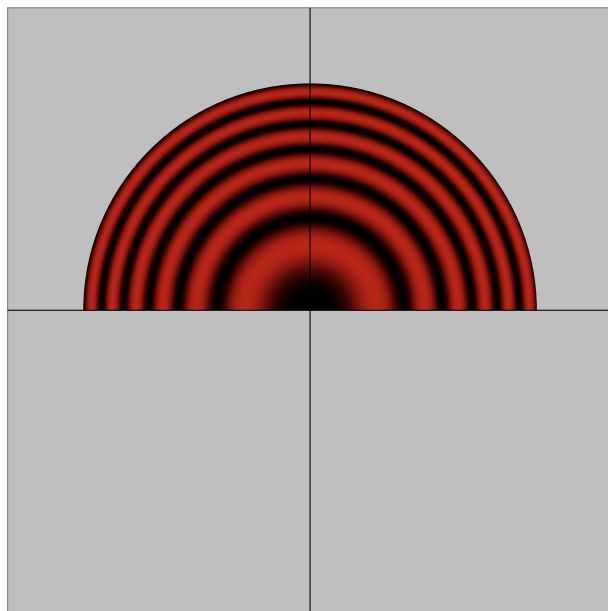


Рис. 3

Если закрепить экран на расстоянии $L_4 = 40F/9$ от источника, то пучки света от полуплинз точно накладываются друг на друга в верхней полуплоскости экрана.

Изображения источника S в положениях l_1 и l_2 можно рассматривать как два когерентных вторичных источника S_1 и S_2 , фазы которых в точке отрезка между ними на ГОО отличаются на π из-за прохождения световой волны через фокус в S_1 .

Следовательно, в центре полукруга наблюдается тёмное пятно (рисунок 3). При движении от центра картины к краю разность фаз источников будет изменяться, поэтому возникнет чередование светлых и тёмных полуколец.

Радиус полукруга можно найти из подобия треугольников:

$$\frac{r}{D/2} = \frac{L_4 - l_2}{l_2 - d_2} \implies r = \frac{D}{9}.$$

Назовем вершину полукруга точкой А, а его центр – точкой О и рассмотрим сечение области пересечения световых лучей от половинок линзы плоскостью, проходящей через оптическую ось перпендикулярно разрезу (рисунок 4). Рас-

стояния от изображений источника до центра картины равны $S_1O \equiv b = 4F/9$ и $S_2O = 2b = 8F/9$.

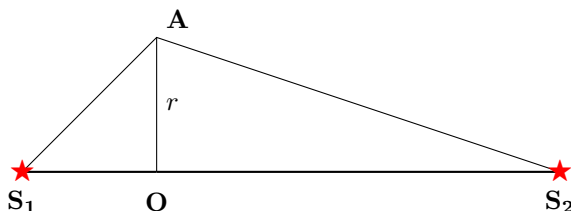


Рис. 4

Как уже отмечалось, в точке О разность фаз между лучами, пришедшими через нижнюю и верхнюю половину линзы, равна $\Delta\varphi_O = \pi$. Эта разность увеличивается на 2π при переходе к каждой следующей темной полосе.

Разность фаз между этими лучами на краю картины – в точке А – определяется разностью хода лучей: $\Delta\varphi_A = \pi + 2\pi[S_1A - (S_1S_2 + S_2A)]/\lambda$. С другой стороны, она изменилась по сравнению с $\Delta\varphi_O$ на $2\pi k$, где k – число светлых полос в картине, на каждой из которых происходит рост и убывание наблюдаемой освещенности. Ясно, что это и есть ответ на вопрос 5.

$$\text{Значит, } k\lambda = S_1A + S_2A - S_1S_2 = S_1A + S_2A - 3b.$$

По рисунку 4, применяя теорему Пифагора, выражаем расстояния:

$$k\lambda = \sqrt{4b^2 + r^2} + \sqrt{b^2 + r^2} - 3b.$$

Для данных по условию $b \gg r$ и, с учетом формулы $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$, находим: $3r^2 \approx 4kb\lambda$. Таким образом, искомое значение: $k = \frac{3r^2}{4b\lambda} \implies k = \frac{D^2}{48\lambda F}$. Для заданных числовых значений получаем, что

$$k = \frac{5^2 \cdot 10^{-4}}{48 \cdot 0,65 \cdot 10^{-6} \cdot 4} \approx 20.$$

Примечание. Отметим, что вычисление без приближения малости отклонения от оси дает $k \approx 20,032$, то есть в принципе можно считать, что на краю картины есть еще один – правда, очень тонкий – интервал значений радиуса, на котором освещенность будет возрастать. Тогда ответом на вопрос 5 будет $k = 21$. Такой ответ (при наличии соответствующего объяснения) тоже следует считать правильным. Хотя на практике «увидеть» эту полосу будет очень сложно.