Задача №10-Е1. Цепная линия

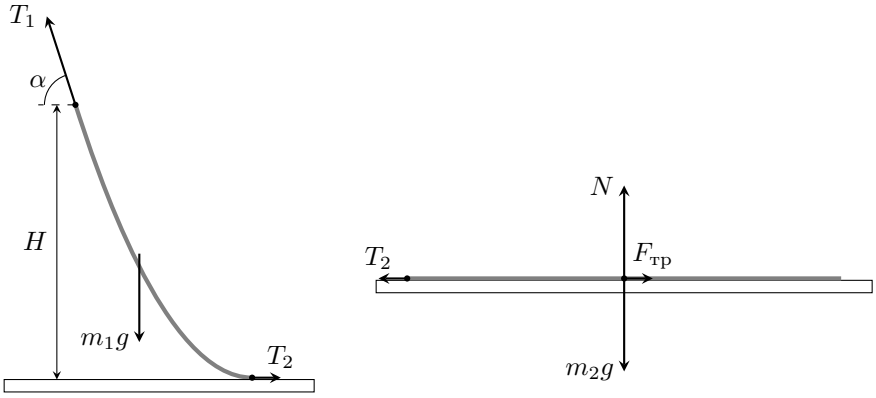
Длину цепочки L измерим с помощью мерной ленты. Так как цепочка закреплена, мы можем, например, вынуть лапку из крепления или развернуть лапку так, чтобы цепочка висела вертикально. Запишем полученное значение:

$$L = (99{,}8 \pm 0{,}2) \text{ см}.$$

Установим лапку штатива на некоторой небольшой высоте и расположим цепочку так, как указано в условии. Медленно и аккуратно будем перемещать вверх точку крепления конца цепочки, каждый раз измеряя с помощью мерной ленты высоту H и длину s. Полученные значения занесём в таблицу:

s, см	86,7	85,3	83,4	80,9	79,1	76,4	74,3	73,3	70,0	67,8
H, см	5,9	6,9	8,5	10,6	12,5	14,4	16,6	18,3	21,2	23,5
s, см	65,7	62,4	60,0	57,7	54,8	52,6	49,1	46,9	43,4	
H, см	26,2	29,4	32,2	34,7	37,4	40,1	44,0	46,3	50,8	

Пусть $l = (L - s)$ – длина висящей части нашей цепочки, $m_1 = ml/L$ – её масса, а $m_2 = ms/L$ – масса горизонтального участка. Сделаем два рисунка и изобразим на них силы, действующие, соответственно, на висящую (рис. 2а) и горизонтальную (рис. 2б) части цепочки.



а) б)

Рис. 2

Из условия равновесия обеих частей цепочки получим:

$$N = m_2 g = mgs/L, \qquad T_2 = F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mgs/L,$$

$$T_1 \cos\alpha = T_2 = \mu mgs/L, \qquad T_1 \sin\alpha = m_1 g = mgl/L,$$

$$T_1 = \sqrt{T_2^2 + (m_1 g)^2} = \frac{mg}{L} \cdot \sqrt{l^2 + \mu^2 s^2} = \frac{mg}{L} \cdot \sqrt{(L-s)^2 + \mu^2 s^2}.$$

С другой стороны, с помощью метода виртуальных перемещений (то есть мысленно смещая висящую часть цепочки вдоль неё самой на малое расстояние Δx) найдём, что $T_1 \Delta x - T_2 \Delta x = (m\Delta x/L)gH$, откуда

$$T_1 - T_2 = mgH/L.$$

Подставляя теперь выражения для T_1 и T_2 в записанное выше соотношение, получим

$$H = \sqrt{(L-s)^2 + \mu^2 s^2} - \mu s.$$

Преобразуем полученное в пункте 3 выражение для H:

$$l^2 + \mu^2 s^2 = (H + \mu s)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{l}{H}\right)^2 - 1 = 2\mu \cdot \frac{s}{H}.$$

Отсюда следует, что, если отложить по осям величины s/H и $(l/H)^2 - 1$, график их зависимости должен быть прямой линией, проходящей через начало координат и имеющей коэффициент наклона, равный 2μ.

Вычислим для каждой измеренной точки значения $l = L - s$, s/H и $(l/H)^2 - 1$. Дополним этими значениями полученную выше таблицу.

s, см	86,7	85,3	83,4	80,9	79,1	76,4	74,3	73,3	70,0	67,8
H, см	5,9	6,9	8,5	10,6	12,5	14,4	16,6	18,3	21,2	23,5
l, см	13,1	14,5	16,4	18,9	20,7	23,4	25,5	26,5	29,8	32,0
s/H	14,69	12,36	9,81	7,63	6,33	5,31	4,48	4,01	3,30	2,89
$\frac{l^2-H^2}{H^2}$	3,93	3,42	2,72	2,18	1,74	1,64	1,36	1,10	0,98	0,85

s, см	65,7	62,4	60,0	57,7	54,8	52,6	49,1	46,9	43,4	
H, см	26,2	29,4	32,2	34,7	37,4	40,1	44,0	46,3	50,8	
l, см	34,1	37,4	39,8	42,1	45,0	47,2	50,7	52,9	56,4	
s/H	2,51	2,12	1,86	1,66	1,47	1,31	1,12	1,01	0,85	
$\frac{l^2-H^2}{H^2}$	0,69	0,62	0,53	0,47	0,45	0,39	0,33	0,31	0,23	

Нанесём полученные точки на миллиметровку и построим аппроксимирующую прямую (синяя прямая на рис. 3).

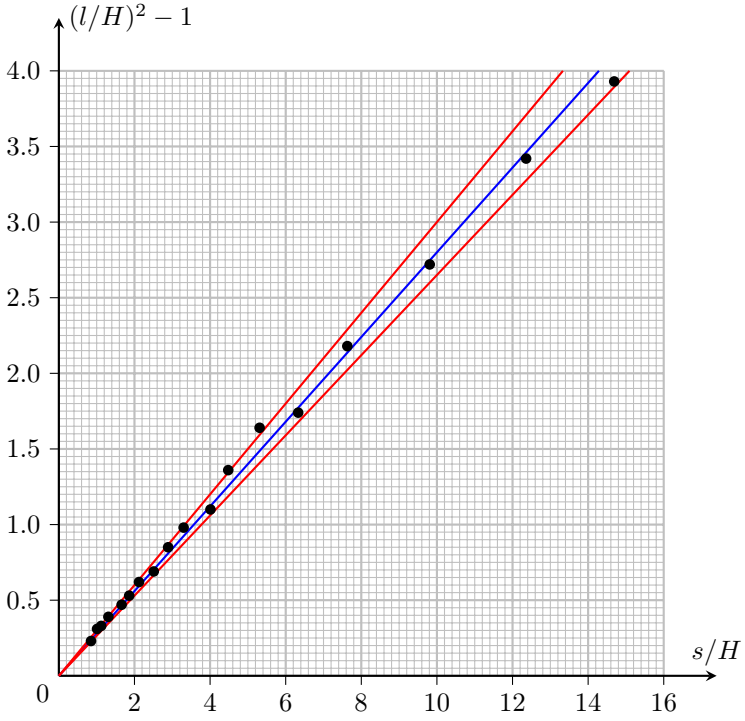


Рис. 3

Определяя коэффициент наклона аппроксимирующей прямой $k = 2\mu$, найдём коэффициент трения μ:

$$k = 0{,}28 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu = 0{,}14.$$

Погрешность величины μ оценим с помощью «метода границ» (красные линии на рис. 3):

$$\Delta k \approx 0{,}02 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\mu \approx 0{,}01.$$

Возьмём из таблицы, приведённой выше, вычисленные для каждого H значения $l = (L - s)$ и нанесём полученные точки на миллиметровку. Добавим к ним две точки, полученные теоретически: 1) при $H = 0$ цепочка должна полностью лежать на рабочей поверхности, следовательно $l = 0$; 2) при $H = L$ цепочка висит вертикально, и $l = L$. Проводя сглаживающую кривую, получим искомый график (синяя линия на рис. 4).

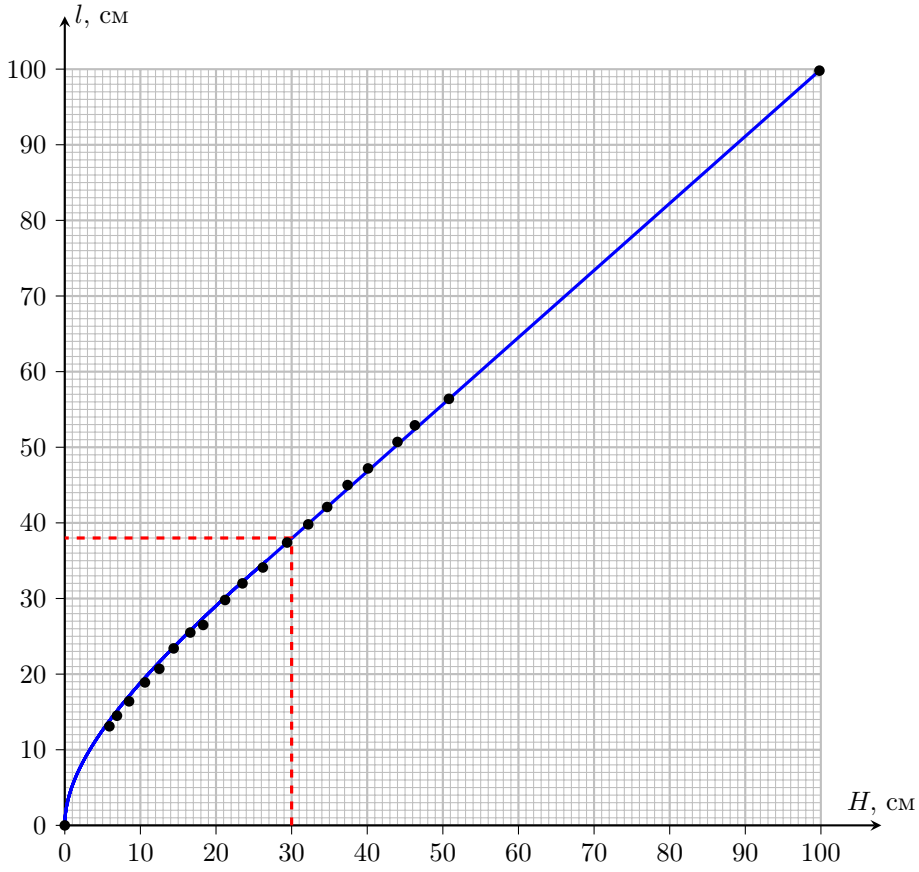


Рис. 4

Работа, совершаемая силой T_1 (см. рис. 2а) при малом вертикальном перемещении ΔH точки крепления, равна

$$\Delta A = T_1 \sin\alpha\, \Delta H = \frac{mg}{L} \cdot l \Delta H.$$

Следовательно, работа силы T_1 при вертикальном перемещении от H_1 до H_2 равна

$$A = \frac{mg}{L} \cdot S,$$

где S – площадь области, ограниченной графиком $l(H)$, осью абсцисс и прямыми $H = H_1$ и $H = H_2$.

Участок графика функции $l(H)$ между $H_1 = 30$ см и $H_2 = 99{,}8$ см является практически прямолинейным, поэтому

$$S = \frac{l(H_1) + l(H_2)}{2} \cdot (H_2 - H_1) = \frac{38\text{ см} + 99{,}8\text{ см}}{2} \cdot 69{,}8\text{ см} \approx 4809\text{ см}^2.$$

Отсюда

$$A = \frac{mg}{L} \cdot S \approx 50{,}5\text{ мДж}.$$

Относительная погрешность полученного значения A равна

$$\varepsilon_A = \varepsilon_m + \varepsilon_g + \varepsilon_L + \varepsilon_S,$$

где $\varepsilon_m = 0{,}2/10{,}7 \approx 1{,}87\%$, $\varepsilon_L = 0{,}2/99{,}8 \approx 0{,}20\%$, $\varepsilon_g = 0{,}05/9{,}8 \approx 0{,}51\%$ – относительные погрешности, соответственно, массы цепочки, её длины и ускорения свободного падения. Оценим погрешность определения площади S:

$$\varepsilon_S = \frac{\Delta l(H_1) + \Delta L}{l(H_1) + L} + \frac{\Delta L}{L - H_1} = \frac{1\text{ см} + 0{,}2\text{ см}}{137{,}8\text{ см}} + \frac{0{,}2\text{ см}}{69{,}8\text{ см}} \approx 1{,}2\%.$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon_A \approx 3{,}8\% \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta A = A\varepsilon_A \approx 2\text{ мДж}.$$

Задача №10-Е2. Трижды два

Подключаясь мультиметром в режиме вольтметра к выводам B и C определим напряжение источника:

$$U_0 = (9{,}5 \pm 0{,}1)\text{ В}.$$

Соберем электрическую цепь так, как показано на рисунке 1. Заметим, что при разомкнутых ключах элементы серого ящика соединены последовательно, а при замкнутых — параллельно. Значит, при разомкнутых ключах сопротивление серого ящика максимально, а при замкнутых — минимально.

Запишем в таблицу непосредственные измерения напряжения на сером ящике и резисторе R. Тогда ток, протекающий через резистор R, можно найти с помощью закона Ома для участка цепи:

$$I_R = \frac{U_{AC}}{R}.$$

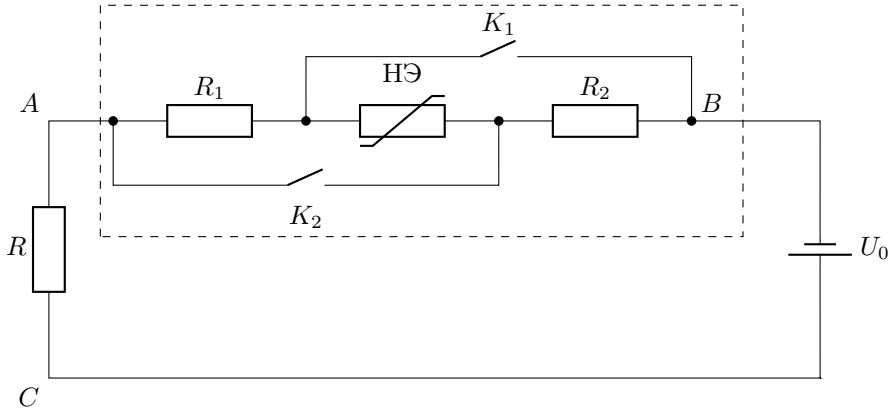


Рис. 1

положение K_1	положение K_2	U_{AB}, В	U_{AC}, В	I_R, мА
лево	лево	7,88	1,68	3,9
право	право	3,30	6,13	14,3
лево	право	5,61	3,88	9,0
право	лево	7,01	2,52	5,9

Видим, что минимальный ток соответствует положению ключей «лево-лево» (последовательное соединение), а максимальный ток соответствует положению ключей «право-право» (параллельное соединение). Отсюда делаем вывод:

Верхний ключ: вправо — замкнут, влево — разомкнут. Нижний ключ: вправо — замкнут, влево — разомкнут.

В случае разомкнутого ключа K_1 и замкнутого ключа K_2 последовательно соединенные резистор R_1 и НЭ закорочены, и весь ток в цепи течет в СЯ через резистор R_2. Тогда:

$$I_R = I_{R_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{U_{AC}}{R} = \frac{U_{AB}}{R_2} \quad \Longrightarrow \quad R_2 = R\frac{U_{AB}}{U_{AC}} \approx 622 \text{ Ом}.$$

Если же ключ K_1 замкнут, а K_2 разомкнут, то закороченными окажутся последовательно соединенные резистор R_2 и НЭ, а весь ток в СЯ потечет через резистор R_1. Отсюда:

$$I_R = I_{R_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{U_{AC}}{R} = \frac{U_{AB}}{R_1} \quad \Longrightarrow \quad R_1 = R\frac{U_{AB}}{U_{AC}} \approx 1196 \text{ Ом}.$$

Оценим погрешность измерений. При умножении величин относительные погрешности складываются, значит:

$$\varepsilon_{R_1} = \varepsilon_{R_2} = \varepsilon_R + \varepsilon_{U_{AB}} + \varepsilon_{U_{BC}} \approx 3\%.$$

Окончательно получим:

$$R_1 = (1196 \pm 40) \text{ Ом}; \quad R_2 = (622 \pm 20) \text{ Ом}.$$

Соберем электрическую цепь для снятия ВАХ (рис. 2). Силу тока через серый ящик определяем через напряжение на известном резисторе $I_{СЯ} = U_R/R$, напряжение на сером ящике $U_{СЯ}$ измеряем непосредственно.

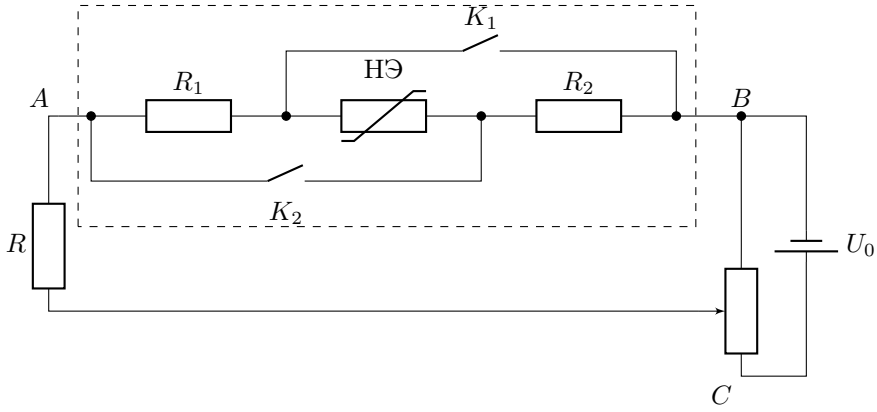


Рис. 2

ВАХ последовательно соединенных R_1, R_2 и НЭ (K_1 и K_2 разомкнуты)

$U_{\text{СЯ}}$, В	U_R, В	$I_{\text{СЯ}}$, мА
0,00	0,00	0,00
0,17	0,00	0,00
0,44	0,00	0,00
0,51	0,00	0,00
0,63	0,01	0,02
1,06	0,09	0,22
1,52	0,20	0,46
1,99	0,31	0,71
2,50	0,43	0,99
2,98	0,54	1,25
3,50	0,66	1,53
3,99	0,77	1,80
4,55	0,91	2,11
5,03	1,02	2,37
5,52	1,13	2,63
5,99	1,24	2,89
6,61	1,39	3,23
7,07	1,50	3,48
7,82	1,67	3,89

ВАХ параллельно соединенных R_1, R_2 и НЭ (K_1 и K_2 замкнуты)

$U_{\text{СЯ}}$, В	U_R, В	$I_{\text{СЯ}}$, мА
0,00	0,00	0,00
0,30	0,32	0,74
0,61	0,64	1,49

0,87	0,92	2,13
1,21	1,28	2,97
1,44	1,51	3,52
1,68	1,78	4,13
1,90	2,01	4,67
2,02	2,17	5,05
2,36	2,63	6,12
2,55	2,95	6,86
2,8	3,52	8,19
3,04	4,33	10,07
3,22	5,17	12,02
3,35	5,96	13,86

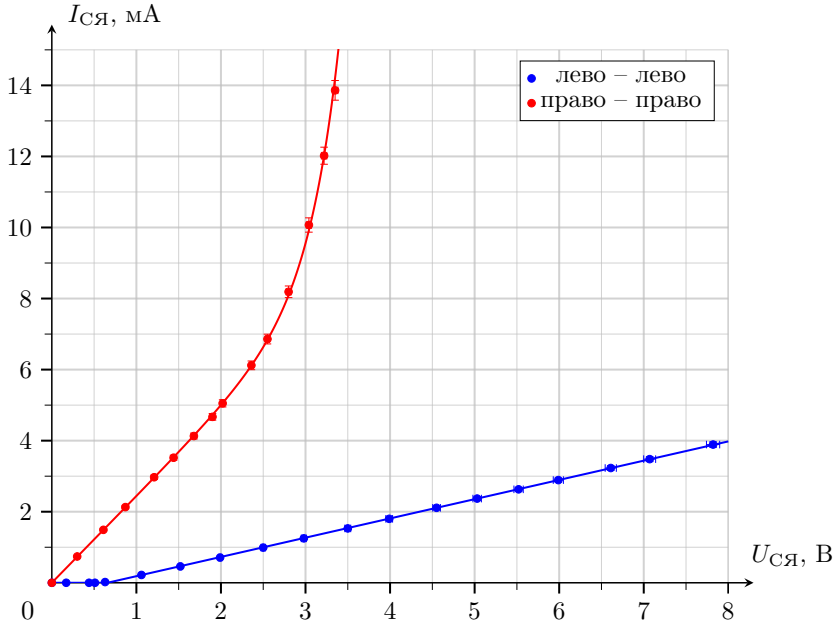


Рис. 3

При разомкнутых ключах мы снимаем ВАХ НЭ в прямом направлении последовательно с R_1 и R_2. По этой характеристике можно определить ВАХ НЭ в прямом направлении:

$$U_{\text{НЭ}} = U_{\text{СЯ}} - I_{\text{СЯ}}(R_1 + R_2);\ I_{\text{НЭ}} = I_{\text{СЯ}}.$$

При замкнутых ключах мы снимаем ВАХ НЭ в обратном направлении (ток через нелинейный элемент течёт справа налево) с параллельно подключенными сопротивлениями R_1 и R_2. По этой характеристике определим ВАХ НЭ в обратном направлении.

$$U_{\text{НЭ}} = -U_{\text{СЯ}};\ I_{\text{НЭ}} = -\left(I_{\text{СЯ}} - \frac{U_{\text{СЯ}}}{R_1} - \frac{U_{\text{СЯ}}}{R_2}\right).$$

ВАХ НЭ в обратном направлении

$U_{\text{НЭ}}$, В	$I_{\text{НЭ}}$, мА
-0,00	-0,00
-0,30	-0,00
-0,61	-0,00
-0,87	-0,00
-1,21	-0,01
-1,44	-0,01
-1,68	-0,03
-1,90	-0,05
-2,02	-0,12
-2,36	-0,36
-2,55	-0,64
-2,80	-1,35
-3,04	-2,65
-3,22	-4,17
-3,35	-5,69

ВАХ НЭ в прямом направлении

$U_{\text{НЭ}}$, В	$I_{\text{НЭ}}$, мА
0,00	0,00
0,17	0,00
0,44	0,00
0,51	0,00
0,60	0,02
0,66	0,22
0,69	0,46
0,69	0,71
0,70	0,99
0,71	1,25
0,71	1,53
0,72	1,80
0,72	2,11
0,73	2,37
0,73	2,63
0,73	2,89
0,74	3,23
0,73	3,48
0,74	3,89

Представим ВАХ НЭ на графике.

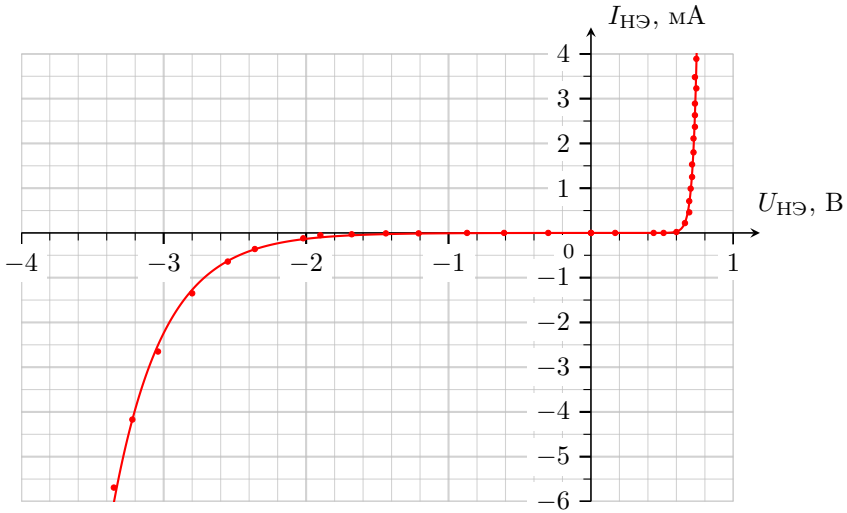


Рис. 4