9 класс

9.1. На прямоугольном листе бумаги провели несколько отрезков, параллельных его сторонам. Эти отрезки разбили лист на несколько прямоугольников, внутри которых нет проведённых линий. Петя хочет провести в каждом из прямоугольников разбиения одну диагональ, разбив его на два треугольника, и окрасить каждый треугольник либо в чёрный, либо в белый цвет. Верно ли, что он обязательно сможет это сделать так, чтобы никакие два одноцветных треугольника не имели общего отрезка границы?

9.2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Точки касания описанных окружностей треугольников ABE и CDE с их общими внешними касательными лежат на окружности ω. Точки касания описанных окружностей треугольников ADE и BCE с их общими внешними касательными лежат на окружности γ. Докажите, что центры окружностей ω и γ совпадают.

9.3. Найдите все натуральные n, для которых существует такое *чётное* натуральное a, что число $(a-1)(a^2-1)\ldots(a^n-1)$ является точным квадратом.

9.4. Шахматного короля поставили на клетку доски 8×8 и сделали

9.5. Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, а точки A_1 и A_2 — соответственно вершины парабол $y = P_1(x)$ и $y = P_2(x)$. Через $m(g(x))$ будем обозначать наименьшее значение функции $g(x)$. Известно, что разности $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x))$ и $m(P_2(P_1(x))) - m(P_2(x))$ оказались равными положительными числами. Найдите угол между прямой A_1A_2 и прямой, содержащей ось Ox.

9.6. Петя выбрал 100 попарно различных положительных чисел, меньших 1, и расставил их по кругу. Затем он проделывает с ними операции. За одну операцию можно взять три стоящих подряд (именно в таком порядке) числа a, b, c и заменить число b на $a - b + c$. При каком наибольшем k Петя мог выбрать

9.7. В строку выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, 60$ (ровно в таком порядке). Игорь и Руслан по очереди ставят знаки $+$, $-$ и $\times$ между ними, начинает Игорь; за ход каждый ставит один знак. Когда между каждыми двумя соседними числами поставлен знак, вычисляется значение полученного выражения. Если оно делится на 3,

9.8. На периметре треугольника ABC выбраны точки D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2, равны.