11 класс

11.1. На доску выписали 777 попарно различных *комплексных* чисел. Оказалось, что можно ровно 760 способами выбрать два числа a и b, записанных на доске, так, чтобы выполнялось равенство
$$a^2 + b^2 + 1 = 2ab.$$
Способы, которые отличаются перестановкой чисел, считаются одинаковыми. Докажите, что можно выбрать такие два числа c и d, записанных на доске, что
$$c^2 + d^2 + 2025 = 2cd.$$

11.2. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что треугольники A_1BC, AB_1C, ABC_1 и ABC — остроугольные. Докажите, что точки пересечения высот этих треугольников вместе с точкой пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной сфере.

11.3. Пару многочленов $F(x, y)$ и $G(x, y)$ с целыми коэффициентами назовём *важной*, если из делимости на 100 обеих разностей $F(a, b) - F(c, d)$ и $G(a, b) - G(c, d)$, где a, b, c, d — целые, следует, что числа $a - c$ и $b - d$ делятся на 100. Существует ли такая важная пара многочленов $P(x, y)$, $Q(x, y)$, что пара многочленов $P(x, y) - xy$ и $Q(x, y) + xy$ также является важной?

11.4. Дано натуральное число N. Куб со стороной $2N + 1$ сложен из $(2N + 1)^3$ единичных кубиков, каждый из которых — либо чёрный, либо белый. Оказалось, что среди любых 8 кубиков, имеющих общую вершину и образующих куб $2 \times 2 \times 2$, не более 4 чёрных кубиков. Какое наибольшее количество чёрных кубиков могло быть использовано?

11.5. Дано натуральное число n. Натуральные числа $1, 2, \ldots, n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n - 1$ выписанных на листке чисел?

11.6. По кругу выписаны 100 единиц. Петя и Вася играют в игру, каждый делает по 10^{10} ходов. Петя каждым своим ходом выбирает 9 стоящих подряд чисел и уменьшает каждое из них на 2. Вася каждым своим ходом выбирает 10 стоящих подряд чисел и увеличивает каждое из них на 1. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Докажите, что Вася сможет действовать так, чтобы после каждого его хода среди 100 выписанных чисел было не менее пяти положительных, как бы ни играл Петя.

11.7. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность Ω. В треугольники DAB, ABC, BCD, CDA вписаны окружности $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ соответственно. Проведены общие внешние касательные к окружностям ω_a и ω_b, ω_b и ω_c, ω_c и ω_d, ω_d и ω_a, не содержащие сторон четырёхугольника $ABCD$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на четырёх проведённых прямых (именно в таком порядке), вписан в окружность Γ. Докажите, что прямые, соединяющие центры окружностей ω и ω_c, ω_b и ω_d, Ω и Γ, пересекаются в одной точке.

11.8. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. *Хордой* будем называть отрезок целой длины, параллельный оси абсцисс, концы которого лежат на графике функции f. Известно, что у графика функции f ровно N хорд, причём среди них есть хорда длины 2025. Найдите наименьшее возможное значение N.