10 класс

10.1. Петя и Вася играют в игру на изначально пустой клетчатой таблице 100×100, делая ходы по очереди. Начинает Петя. За свой ход игрок вписывает в некоторую пустую клетку любую заглавную букву русского алфавита (в каждую клетку можно вписать ровно одну букву). Когда все клетки будут заполнены, Петя объявляется победителем, если найдутся четыре подряд идущие клетки по горизонтали, в которых слева направо написано слово «ПЕТЯ», или найдутся четыре подряд идущие клетки по вертикали, в которых сверху вниз написано слово «ПЕТЯ». Сможет ли Петя выиграть независимо от действий Васи?

10.2. Внутри треугольника ABC отмечена точка P. На отрезке AB отмечена точка Q, а на отрезке AC — точка R так, что описанные окружности треугольников BPQ и CPR касаются прямой AP. Через точки B и C провели прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника BPC, а через точки Q и R — прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника PQR. Докажите, что существует окружность, которая касается четырёх проведённых прямых.

10.3. Найдите все натуральные n, для которых существует такое *чётное* натуральное a, что число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ является точным квадратом.

10.4. На плоскости отмечены 10^6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведены все отрезки между ними. Гриша поставил на каждом проведённом отрезке вещественное число, по модулю не превосходящее 1, и для каждой шестёрки отмеченных точек посчитал сумму чисел на всех 15 отрезках, соединяющих их. Оказалось, что каждая такая сумма по модулю не меньше числа C, при этом среди таких сумм есть как положительная, так и отрицательная. При каком наибольшем C это возможно?

10.5. Дано натуральное число n. Натуральные числа $1, 2, \ldots, n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n-1$ выписанных на листке чисел?

10.6. При каком наименьшем k для любого многочлена $f(x)$ степени 100 с вещественными коэффициентами найдётся такой многочлен $g(x)$ степени не выше k с вещественными коэффициентами, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют ровно 100 общих точек?

10.7. В программу соревнования входит 25 видов спорта, в каждом из которых определяется один победитель, получающий золотую медаль. В соревновании участвуют 25 спортсменов, каждый — во всех 25 видах спорта. Имеется 25 экспертов, каждый из которых должен сделать *прогноз*, сколько золотых медалей получит каждый спортсмен, при этом в его прогнозе количества медалей должны являться целыми неотрицательными числами с суммой 25. Эксперта признают *компетентным*, если он верно угадает количество золотых медалей хотя бы у одного спортсмена. При каком наибольшем k эксперты могут сделать такие

10.8. На периметре треугольника ABC выбраны точки D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2, равны.