Критерии оценивания работ 9 класса

1 задача

- Решение задачи только для частных случаев разрезания на прямоугольники (например, прямоугольная сетка или разрезания, полученные цепочкой «делений пополам») — не более *1 балла.*

  Этот балл может быть поставлен, **только** если в работе явно написано про одинаковую ориентацию всех диагоналей.

- Решение задачи становится полным, если для этого достаточно **только** заменить фразу вида «стороны двух треугольников совпадают» на фразу вида «стороны двух треугольников перекрываются» — *4 балла.*

2 задача

- Утверждение, что общий центр должен лежать на центральной линии описанных окружностей треугольников ABE и CDE или очевидно аналогичное *не оценивалось.*

- Задача сведена к утверждению, что центр ω лежит в середине отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников ABE и CDE или очевидно аналогичному — *3 балла.*

- Доказано только, что центр ω лежит в середине отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников ABE и CDE или очевидно аналогичное — *3 балла.*

3 задача

- Только случаи $n = 1$ и $n = 2$ не оценивались.

- Правильный ответ баллов не добавляет.

- Решене задачи в случае $n = 3$ или $n = 4$ — *1 балл.*

- Только идея рассматривать числа вида $a^{2^k} - 1$ с наибольшим подходящим k — *1 балл.* Суммируется с баллом за случай $n = 3$.

- Не разобран случай $n = 3$ — снималось *2 балла.*

- Есть случай $n = 3$, для случая $n \geqslant 4$ доказано, что если $2^{k+1} \leqslant n < 2^{k+2}$, то $a^{2^k} + 1$ взаимно просто с другими скобками, но отсюда не выведена задача — *5 баллов.*

- Сведение задачи к случаю, что $a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1$ — точный квадрат для некоторого простого p (например, с помощью постулата Бертрана) *не оценивалось.*

4 задача

- **Часть 1: Пример.**

  Только верный пример с 44 приятными ходами — *1 балл.*

  Неверные примеры, а также примеры с меньшим количеством приятных ходов, *не оценивались.*

- **Часть 2: Оценка.** Только оценка, т. е. доказательство того, что более 44 приятных ходов быть не могло — *4 балла.*

  Более слабые оценки *сами по себе* не оцениваются. Однако могут оцениваться следующие содержащиеся в них идеи.

- **Часть 2.1: Частичные продвижения в оценке.**

  Эти баллы не суммируются друг с другом, но к ним может прибавляться балл за пример.

  0) Расстановка в клетках чисел 1, …, 9 как в решении — *0 баллов.*

  1а) Из клеток с числами 1 выходит 4 неприятных хода, а также в клетки с числом 9 входят 4 неприятных хода — *0 баллов.*

  1б) Из клеток с числами 1 выходит 4 неприятных хода, и из клеток с числом 2 ещё 4 — *1 балл.*

  1б′) В клетки с числами 9 входит 4 неприятных хода, и в клетки с числом 8 ещё 4 — *1 балл.*

  1в) Оба продвижения 1б) и 1б′) — *2 балла.*

  2а) Замечено, что приятный ход уменьшает число в клетке хотя бы на 1, а неприятный увеличивает не более чем на 3 — *0 баллов.*

2б) Из соображений 2а) выведена оценка $k \leqslant 48$ — *1 балл.*

2в) Оценка из 2б) уточнена до $k \leqslant 47$ — *1 балл.*

2г) Оценка из 2б) уточнена до $k \leqslant 46$ — *2 балла.*

3) Рассмотрены 12 участков обхода между клетками, помеченными числом 6, и замечено, что на каждом есть хотя бы один неприятный ход — *1 балл.*

- **Часть 2.2: Проблемы в существенно верном решении.**

  Если во в целом верном решении допущены ошибки/пробелы в *небольшом* переборе — *снимается 1 или 2 балла* в зависимости от величины ошибок/пробелов.

5 задача

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) это координаты вершин парабол A_1 и A_2 соответственно.

- Доказано, что $y_1 > x_2$ и $y_2 > x_1$ — *1 балл.*
- Доказано, что $P_1(y_2) - y_1 = P_2(y_1) - y_2$ — *2 балла.* (Не суммируется с предыдущим).
- Правильный ответ баллов не добавляет.
- Доказано, что $(y_1 - x_2)^2 = (y_2 - x_1)^2$, но неправильно разобран случай, когда $y_1 - x_2 = -(y_2 - x_1)$ — *5 баллов.*
- Верное решение при наличии арифметических ошибок — *6 баллов.*

6 задача

- Оценка: доказано, что не может получиться больше 50 целых чисел — *3 балла.*
- Пример: доказано, что 50 целых чисел может получиться — *3 балла.*
- Ещё *1 балл* даётся, если присутствуют и оценка, и пример (возможно, с проблемами, указанными ниже).
- В доказательстве оценки используется неверное утверждение про дробные части (например, $\{a-b+c\} = \{a\} - \{b\} + \{c\}$) — снимается *1 балл.*
- Доказательство оценки основывается на том, что в течение процесса не меняется некоторое свойство набора чисел в круге (например, разности соседних чисел меньше 1, дробные части всех чисел различны и т.д.), и при этом не проверяется, что в исходном круге это свойство выполнено (но сама по себе проверка очевидна) — *баллы не снимаются.*
- Приведен верный пример, но отсутствует проверка того, что числа в примере различны и/или лежат в интервале $(0, 1)$, и эта проверка неочевидна — снимается *1 балл.*
- В примере допущена арифметическая ошибка, но пример можно сделать верным, исправив не более двух чисел в нём — снимается *1 балл.*
- В примере есть пара равных чисел, но пример можно сделать верным, исправив не более трёх чисел в нём — снимается *2 балла.*
- Если решение содержит несколько проблем из вышеперечисленных, снятые баллы суммируются.

7 задача

- Приведена неработающая стратегия, возможно, очень похожая на верную: *0 баллов.*

  Комментарий. Встречались два примера таких неработающих стратегий:

  1) стратегия как в официальном решении, но ответным ходом в парный промежуток с номером $30 + i$ в ответ на знак «$+$» ставится знак «$+$», а в ответ на знак «$-$» ставится знак «$-$»;

  2) стратегия как в официальном решении, но парный ход к ходу в промежуток с номером i делается в промежуток с номером $60 - i$.

8 задача

- Доказательство того, что середины 6 чевиан из условия лежат на одной окружности с центром в ортоцентре треугольника — *0 баллов.*
- Более простые продвижения (например, симметрия чевиан относительно высот) — *0 баллов.*
- Решение задачи в частных случаях (например, для равнобедренного треугольника) *не оценивалось.*

Условия и решения задач

9 класс

9.1. На прямоугольном листе бумаги провели несколько отрезков, параллельных его сторонам. Эти отрезки разбили лист на несколько прямоугольников, внутри которых нет проведённых линий. Петя хочет провести в каждом из прямоугольников разбиения одну диагональ, разбив его на два треугольника, и окрасить каждый треугольник либо в чёрный, либо в белый цвет. Верно ли, что он обязательно сможет это сделать так, чтобы никакие два одноцветных треугольника не имели общего отрезка границы?

Ответ. Да, верно.

Решение. Пусть Петя проведёт в каждом из прямоугольников диагональ из левого нижнего угла в правый верхний. После этого все треугольники, примыкающие к левым верхним углам прямоугольников, он покрасит в чёрный цвет, а остальные — в белый.

Докажем, что такая раскраска подойдёт. Рассмотрим общий отрезок границы двух треугольников. Если этот отрезок диагональный, то сверху к нему примыкает чёрный треугольник, а снизу белый. Если отрезок горизонтальный, то к нему сверху примыкает белый треугольник, а снизу — чёрный; случай вертикального отрезка аналогичен. Поэтому такая раскраска подходит.

9.2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Точки касания описанных окружностей треугольников ABE и CDE с их общими внешними касательными лежат на окружности ω. Точки касания описанных окружностей треугольников ADE и BCE с их общими внешними касательными лежат на окружности γ. Докажите, что центры окружностей ω и γ совпадают.

Решение. Обозначим центры описанных окружностей треугольников ABE, BCE, CDE, ADE через O_{AB}, O_{BC}, O_{CD}, O_{AD} соответственно. Пусть T_1, T_2 — точки касания одной из общих касательных с описанными окружностями треугольников ABE и CDE соответственно; обозначим через O и T середины отрезков $O_{AB}O_{CD}$ и T_1T_2 соответственно (см. рис. 1). Тогда в прямоугольной трапеции $O_{AB}T_1T_2O_{CD}$ прямая OT — средняя линия, поэтому она является серединным перпендикуляром к отрезку T_1T_2. Заметим, что окружность ω симметрична относительно прямой $O_{AB}O_{CD}$, на которой также лежит точка O, значит, O — центр ω.

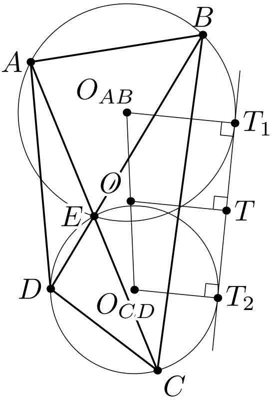

Рис. 1

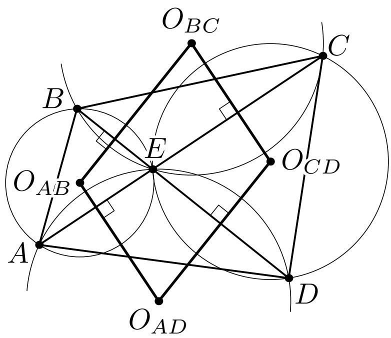

Рис. 2

Аналогично получаем, что середина отрезка $O_{AD}O_{BC}$ является центром γ. Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что $O_{AB}O_{BC}O_{CD}O_{AD}$ — параллелограмм. Для доказательства этого достаточно заметить, что $O_{AB}O_{BC}$ и $O_{CD}O_{AD}$ — серединные перпендикуляры к отрезкам EB и ED, поэтому $O_{AB}O_{BC} \parallel O_{CD}O_{AD}$; аналогично, $O_{AB}O_{AD} \parallel O_{BC}O_{CD}$, откуда и следует требуемое.

9.3. Найдите все натуральные n, для которых существует такое *чётное* натуральное a, что число $(a-1)(a^2-1)\ldots(a^n-1)$ является точным квадратом.

Ответ. $n = 1$ и $n = 2$.

Решение. Для $n = 1$ подойдёт любое чётное a вида m^2+1, например, $a = 2$. Для $n = 2$ подойдёт любое чётное a вида m^2-1, например, $a = 8$.

Предположим, что для $n = 3$ нашлось требуемое число a. Тогда число $(a-1)(a^2-1)(a^3-1) = (a-1)^3(a+1)(a^2+a+1)$

является точным квадратом. Поскольку $a^2+a+1=a(a+1)+1$, числа $a+1$ и a^2+a+1 взаимно просты. Раз число $a+1$ нечётно, числа $a+1$ и $a-1$ также взаимно просты. Следовательно, числа $a+1$ и $(a-1)(a^2+a+1)$ — точные квадраты. В частности, число $a+1$ при делении на 3 может давать лишь остаток 0 или 1, а тогда число $a-1$ не делится на 3. Отсюда

$$\text{НОД}(a-1, a^2+a+1) = \text{НОД}(a-1, (a+2)(a-1)+3) = \\ = \text{НОД}(a-1, 3) = 1,$$

значит, числа $a-1$ и a^2+a+1 также являются точными квадратами. Но второе являться квадратом не может, поскольку $a^2 < a^2+a+1 < (a+1)^2$. Противоречие.

Осталось доказать, что требуемого a не существует при $n \geqslant 4$. Предположим, что такое a нашлось. Возьмём такое натуральное $k \geqslant 2$, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Поскольку $a^{2^k}-1=(a^{2^{k-1}}-1)(a^{2^{k-1}}+1)$, число $(a-1)(a^2-1)\ldots(a^n-1)$ представляется в виде произведения $a^{2^{k-1}}+1$ и нескольких множителей вида a^m-1, где $1 \leqslant m \leqslant n$ и $m \neq 2^k$.

Докажем, что множитель $a^{2^{k-1}}+1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в этом разложении. Пусть $a^{2^{k-1}}+1$ и a^m-1 имеют некоторый общий делитель d. Тогда и $\text{НОД}(a^{2^k}-1, a^m-1)$ кратен d. Но $\text{НОД}(a^{2^k}-1, a^m-1) = a^{\text{НОД}(2^k,m)}-1$. Поскольку $m \neq 2^k$ и $m \leqslant n < 2^{k+1}$, число m не может делиться на 2^k. Таким образом, $\text{НОД}(2^k, m)$ — степень двойки, не превосходящая 2^{k-1}. Следовательно, $a^{2^{k-1}}-1$ делится на $\text{НОД}(a^{2^k}-1, a^m-1)$, а значит, делится и на d. Поскольку a чётно, числа $a^{2^{k-1}}-1$ и $a^{2^{k-1}}+1$ не имеют общих делителей, отличных от 1, значит, $d=1$, что и требовалось.

Множитель $a^{2^{k-1}}+1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в произведении, являющемся точным квадратом, поэтому он сам является точным квадратом. Тогда $a^{2^{k-1}}+1$ и $a^{2^{k-1}}$ — отличающиеся на 1 квадраты натуральных чисел, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, и для $n \geqslant 4$ требуемых чисел a не найдётся.

9.4. Шахматного короля поставили на клетку доски 8×8 и сделали им 64 хода так, что он побывал на всех клетках и вернулся в исходную клетку. В каждый момент времени вычислялось расстояние от центра клетки, в которой находился король, до центра всей доски. Назовём сделанный ход *приятным*, если в результате хода это расстояние стало меньше, чем было до хода. Найдите наибольшее возможное количество приятных ходов. (Шахматный король за один ход передвигается на клетку, соседнюю по стороне или по углу.)

Ответ. 44 хода.

Решение. Докажем, что среди ходов должно было быть хотя бы 20 неприятных (а значит, количество приятных ходов не больше 44). Расставим в клетках числа, как показано на рис. 3; клетки с одинаковыми числами удалены на одно и то же расстояние от центра, а клетки с меньшими номерами ближе к центру, чем клетки с бо́льшими.

9	8	7	6	6	7	8	9
8	6	5	4	4	5	6	8
7	5	3	2	2	3	5	7
6	4	2	1	1	2	4	6
6	4	2	1	1	2	4	6
7	5	3	2	2	3	5	7
8	6	5	4	4	5	6	8
9	8	7	6	6	7	8	9

Рис. 3

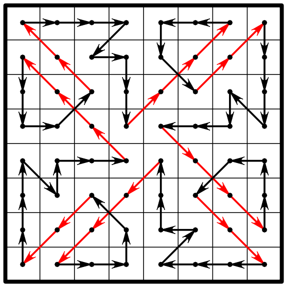

Рис. 4

Каждый ход из клетки с числом 1 не уменьшает расстояния до центра и потому неприятен — таких ходов 4. Ход из клетки с числом 2 может быть приятным, только когда он идёт в клетку с числом 1. Но на доске восемь чисел 2 и только четыре числа 1, поэтому хотя бы четыре хода из клеток с числом 2 будут неприятными.

Рассмотрим теперь ходы, ведущие в 32 клетки с числами, не меньшими 6. Заметим, что эти ходы не могут идти из клеток с числами 1 и 2, то есть в рассуждении выше они не учтены. Такой ход может быть приятным, только если он идёт из клетки с номером, не меньшим 7; однако таких клеток всего 20. Значит, среди рассмотренных ходов ещё $32 - 20 = 12$ неприятных, и общее количество неприятных ходов не меньше, чем $4+4+12 = 20$.

Пример обхода, в котором 44 приятных хода, приведён на рис. 4.

Замечание. По сути, в последней части доказательства оценки показано, что среди ходов, ведущих в клетки, отмеченные зелёным на рис. 3, есть не менее трёх неприятных. Это можно доказать разными способами, например, проведя небольшой перебор.

9.5. Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, а точки A_1 и A_2 — соответственно вершины парабол $y = P_1(x)$ и $y = P_2(x)$. Через $m(g(x))$ будем обозначать наименьшее значение функции $g(x)$. Известно, что разности $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x))$ и $m(P_2(P_1(x))) - m(P_2(x))$ оказались равными положительными числами. Найдите угол между прямой A_1A_2 и прямой, содержащей ось Ox.

Ответ. 45°.

Решение. Пусть данные трёхчлены — $P_1(x) = (x-x_1)^2+y_1$ и $P_2(x) = (x - x_2)^2 + y_2$, где $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ — координаты вершин парабол. Тогда $m(P_1(x)) = y_1$, а $P_1(P_2(x)) = ((x - x_2)^2 + y_2 - x_1)^2 + y_1$. Если $y_2 \leqslant x_1$, то минимальное значение выражения $((x - x_2)^2 + y_2 - x_1)^2$ равняется нулю, откуда $m(P_1(P_2(x)))-m(P_1(x)) = y_1 - y_1 = 0$. Последнее противоречит тому, что $m(P_1(P_2(x)))-m(P_1(x))$ — положительное число. Таким образом, $y_2 > x_1$, откуда $m(P_1(P_2(x))) = (y_2 - x_1)^2 + y_1$ и $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x)) = (y_2 - x_1)^2$.

Аналогично, $y_1 > x_2$ и $m(P_2(P_1(x)))-m(P_2(x)) = (y_1-x_2)^2$. Теперь условие равенства разностей переписывается в виде $(y_1 - x_2)^2 = (y_2 - x_1)^2$. Отсюда, поскольку $y_2 > x_1$ и $y_1 > x_2$, получаем $y_1 - x_2 = y_2 - x_1$, то есть $y_2 - y_1 = -(x_2 - x_1)$. Значит, искомый угол равен 45°.

9.6. Петя выбрал 100 попарно различных положительных чисел, меньших 1, и расставил их по кругу. Затем он проделывает с ними операции. За одну операцию можно взять три стоящих подряд (именно в таком порядке) числа a, b, c и заменить число b на $a - b + c$. При каком наибольшем k Петя мог выбрать исходные числа и сделать несколько операций так, чтобы после них среди чисел оказалось k целых?

Ответ. При $k = 50$.

Решение. *Оценка.* Покажем, что целых чисел никогда не станет больше 50.

Будем следить за разностями между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Если подряд стояли числа a, b и c, то их разности были равны $a - b$ и $b - c$. После применения операции к числу b получатся числа a, $a - b + c$ и c, разности которых равны $a - (a - b + c) = b - c$ и $(a - b + c) - c = a - b$. Итак, в результате операции две соседние разности просто переставляются местами. Изначально все разности были нецелыми, поэтому они в любой момент времени будут нецелыми. Таким образом, два целых числа никогда не могут появиться рядом и, значит, их будет не больше 50.

Пример. Для начала расставим по кругу попеременно числа 0,1 и 0,2. Если с каждым числом 0,2 проделать операцию, то оно будет заменено на $0{,}1 - 0{,}2 + 0{,}1 = 0$, и числа через одно будут целыми.

Осталось подправить пример так, чтобы все числа стали различными. Для этого достаточно прибавить к каждому числу 0,1 по своему маленькому числу, а к каждому числу 0,2 — сумму чисел, прибавленных к его соседям. Например, выбрав $t = 0{,}001$, можно прибавить к последовательным числам 0,1 числа $0, t, 2t, \ldots, 47t, 48t, 50t$; тогда к числам 0,2 будут прибавляться числа $t, 3t, 5t, \ldots, 95t, 98t, 50t$. В результате все числа станут различными.

Явно построенный пример выглядит так:

$$0{,}1 \quad 0{,}2001 \quad 0{,}1001 \quad 0{,}2003 \quad 0{,}1002 \quad 0{,}2005 \quad 0{,}1003 \quad \ldots$$

$$\ldots \quad 0{,}1047 \quad 0{,}2095 \quad 0{,}1048 \quad 0{,}2098 \quad 0{,}105 \quad 0{,}205$$

9.7. В строку выписаны числа 1, 2, 3, …, 60 (ровно в таком порядке). Игорь и Руслан по очереди ставят знаки $+$, $-$ и $\times$ между ними, начинает Игорь; за ход каждый ставит один знак. Когда между каждыми двумя соседними числами поставлен знак, вычисляется значение полученного выражения. Если оно делится на 3, то победа присуждается Игорю, иначе Руслану. Кто из игроков может выиграть, независимо от действий соперника?

Ответ. Игорь.

Решение. Заменим все числа в строке на их остатки от деления на 3, от этого результат игры не изменится. Получим строку 1, 2, 0, …, 1, 2, 0. Промежутки между числами пронумеруем слева направо от 1 до 59.

Первым ходом Игорь ставит знак «−» в 30-й промежуток, а все остальные промежутки он разбивает на пары вида $(i, 30+i)$. Если Руслан ставит в какой-то промежуток знак «+» или «−», то Игорь в парный промежуток ставит «−» или «+», соответственно. А если Руслан ставит знак «×», то Игорь ставит в парный промежуток также знак «×».

Когда все знаки расставлены, полученное выражение разбивается на несколько слагаемых. При этом в левой и правой половинах выражения набор слагаемых одинаковый, но берутся они с противоположными знаками. Следовательно, его значение будет давать остаток 0 при делении на 3.

9.8. На периметре треугольника ABC выбраны точки D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2, равны.

Решение. Начнём со следующей полезной леммы.

Лемма. *Пусть точки F и E выбраны соответственно на сторонах AB и AC параллелограмма $ABKC$ так, что $BE = CF$. Тогда точка K равноудалена от прямых BE и CF (см. рис. 8).*

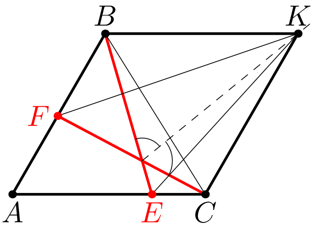

Рис. 5

Доказательство. Поскольку $BK \parallel EC$ и $CK \parallel FB$, имеем $S_{KBE} = S_{KBC} = S_{KFC}$. Так как $BE = CF$, отсюда и следует, что расстояния от точки K до прямых BE и CF равны. □

Перейдём к решению. Пусть прямые из условия образуют треугольники $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ (точки обозначены как на рис. 9).

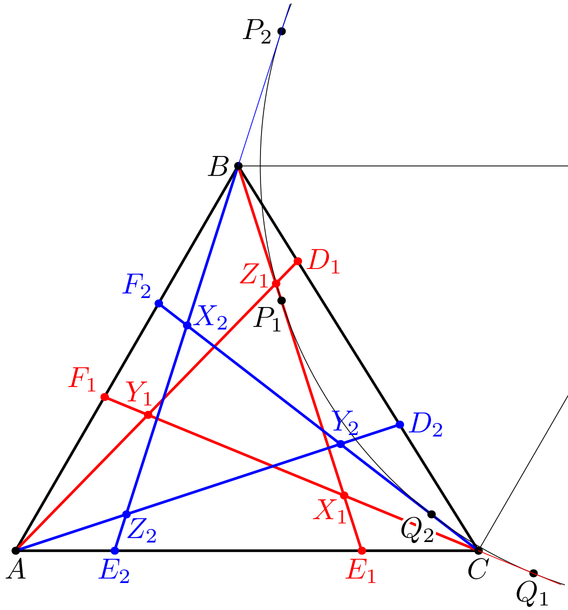

Рис. 6

Выберем точку K так, что $ABKC$ — параллелограмм; согласно лемме, точка K равноудалена от прямых BE_1, CF_1, BE_2 и CF_2; значит, существует окружность с центром K, касающаяся этих прямых в некоторых точках P_1, Q_1, P_2 и Q_2 соответственно. Тогда из равенств отрезков касательных вытекает, что

$$BX_1 - CX_1 = BP_1 + X_1P_1 - X_1Q_1 + CQ_1 = BP_2 + CQ_2 =$$
$$= BP_2 - X_2P_2 + X_2Q_2 + CQ_2 = CX_2 - BX_2.$$

Аналогично получаем, что $CY_1 - AY_1 = AY_2 - CY_2$ и $AZ_1 - BZ_1 = BZ_2 - AZ_2$. Складывая полученные три равенства, получаем требуемое равенство периметров.