Черновые критерии оценивания 11 класса.

Задача 11.1.

(M) Если есть хотя бы два из недочётов M1, M2, M3, то снимается 1 балл:

(M1) Мелкие арифметические или алгебраические ошибки.

(M2) Упущен случай, когда есть число a для которого на доске нет b такого, что $a^2 + b^2 + 1 = 2ab$.

(M3) Нет подробного описания принципа разделения на группы.

(2) Неверное описание разбиения на группы — не более 5 баллов

(3) Разбиение на группы в предположении того, что комплексные числа упорядочены, но порядок не описан — 4 балла

Задача 11.2.

(M) За использование без доказательства равенства $A'H \cdot A'A = A'B \cdot A'C$ баллы не снижаются.

(M1) Без доказательства используется, что проекция точки пересечения медиан $\triangle A_1BC$ на плоскость ABC — это точка пересечения медиан $\triangle ABC$ — снимается 1 балл.

(Z) Доказано, что у $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC$ совпадают основания высот из вершин A и A_1 — 0 баллов.

(A) Доказано, что $HH_1 \perp A_1BC$ — 3 балла.

(A1) Сформулировано утверждение о том, что $HH_1 \perp A_1BC$ — 1 балл.

(A2) Доказано только, что $HH_1 \perp A_1A'$ — 1 балл.

(B) Доказано, что $\triangle A_1BC$, $\triangle AB_1C$, $\triangle ABC_1$ имеют общую точку T, и $MT \perp ABC$ — 2 балла.

(B1) Доказано, что $\triangle A_1BC$, $\triangle AB_1C$, $\triangle ABC_1$ имеют общую точку пересечения медиан — 1 балл.

(C) Задача сведена к тому, что $HH_1 \perp A_1BC$ (с чёткой формулировкой) — 4 балла.

Продвижение (A) не суммируется с (A1) и (A2). Продвижение (B) не суммируется с (B1). Продвижение (C) не суммируется ни с чем.

Задача 11.3.

(0) Не оценивается.

(0.1) Утверждение, что важность пары многочленов (P, Q) равносильна важности иных пар, полученных из нее линейными преобразованиями, например, $(P, P+Q)$ или $(Q, -P)$

(0.2) Переобозначения для многочленов от двух переменных, например: $P(x,y) = P_1(x) + P_2(y) + xy \cdot P_3(x,y)$

(0.3) $P(x,y) \equiv P(a,b) \pmod{m}$, если $x \equiv a \pmod{m}$, $y \equiv b \pmod{m}$.

(0.4) Доказательство того, что в P или Q должны быть мономы, не содержащие одной из переменных.

(1) Биективность. Если в работе явно сформулировано и доказано одно из следующих утверждений, ставится 1 балл.

(1.1) Отображение $(x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y))$ является биекцией на множестве $\mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{100}$.

(1.2) Для любого вычета по модулю 100 уравнение $P(x,y) = c$ имеет ровно 100 решений.

Развитие идеи биекции в терминах графа и дальнейшие попытки его анализировать **не** оцениваются дополнительными баллами сверх (1.1).

(2) Модули. При получении балла за часть (1) можно получить ещё 1 балл за явно сформулированное и доказанное утверждение о том, что отображение из (1.1) является биекцией ещё по какому-то модулю, который является делителем 100.

Задача 11.4.

(1) Пример хуже оптимального (например, на $(2N+1)^2(N+1)$) — 0 баллов

(2) Верный оптимальный пример + подсчёт числа чёрных кубиков в нем + обоснование, что пример удовлетворяет условию — 2 балла. (Обратите внимание, оценивается полный комплект в 2 балла, что не означает, что часть комплекта стоит 1 балл.)

(3) Оценка слабее точной (например, что чёрных кубиков не больше $(2N+2)^3/2$) — 0 баллов.

(4) Доказанная оценка $(N+1)^2(4N+1)$ — 4 балла.

(5) Сама по себе идея доказательства оценки по индукции — 0 баллов.

(6) Сама по себе идея обобщить задачу (например, на параллелепипеды $(2N+1) \times (2M+1) \times (2K+1)$) — 0 баллов.

(7) Полный разбор случая $N = 1$ (пример на 20 и оценка, что нельзя отметить 21 чёрный кубик) приносит 1 балл, который НЕ СУММИРУЕТСЯ с баллами, полученными по остальным критериям.

Задача 11.5.

(1) Только оценка сверху — 2 балла.

(2) Только пример — 3 балла.

(3) Есть оценка и работающий алгоритм для построения примера, но отсутствует корректное обоснование работы алгоритма: не более 4 баллов.

(4) Грязь в решении, легко исправимые логические ошибки — снимается 1 балл.

Задача 11.6.

(A) Переформулировка задачи в виде игры, где первый может изменять не больше одного числа, а второй может изменить два подряд идущих — 2 балла

(B) Если дополнительно к этому выбранные 10 чисел разбиты на пары и сформулирована идея ходить в ту же пару чисел, что и первый — 4 балла (баллы не суммируются)

(C) Легко исправляющиеся ошибки в выборе множества чисел, за которыми следим (например, выбраны числа с номерами, кратными 10, а не 9) — снимается 1 балл.

Задача 11.7.

Вершины четырёхугольника из касательных обозначены $A'B'C'D'$. Бонусные баллы по критериям (A), (B), (C), (D) суммируются.

(O1) Доказано, что инцентры образуют прямоугольник, стороны которого параллельны биссектрисам углов между сторонами исходного четырёхугольника, или что точки A, B, I_A, I_B равноудалены от середины дуги — 0 баллов. За использование всех перечисленных фактов без доказательства баллы не снижаются.

(O2) Счёт углов зависит от конфигурации точек, деление пополам направленных углов и т. п. — баллы не снижаются.

(A) Доказано, что общие касательные из условия параллельны сторонам исходного четырёхугольника — 1 балл.

Параллельность должна быть и явно сформулирована, и доказана. Если параллельность следует из проведённого счёта углов, но не объявлена явно, то 1 балл не начисляется. Если параллельность сформулирована, но не доказана (например, объявлена известным фактом), этот 1 балл также не начисляется. В решениях, использующих параллельность без доказательства, за отсутствие этого доказательства снимается 1 балл.

(B) Сформулирована гипотеза о соосности окружностей $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$, $(I_AI_BI_CI_D)$ — 1 балл.

(C) Введена точка X пересечения прямых AB и I_AI_B или все четыре такие точки. Доказано, что они лежат на радикальной оси окружностей $(ABCD)$ и $I_AI_BI_CI_D$ — 1 балл.

(D) Доказана вписанность $ABA'B'$ либо вписанность $I_AI_BA'B'$ — 2 балла.

(E) Доказано, что отражения вершин четырёхугольника $A'B'C'D'$ относительно центра прямоугольника $I_AI_BI_CI_D$ попадают на биссектрисы углов четырёхугольника $ABCD$ — 1 балл. (Суммируется с критерием (A), но не с остальными).

(F) Сформулирована верная гипотеза о «равноправности» четырёхугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$: четыре вписанные окружности для треугольников четырёхугольника $ABCD$ — это на самом деле четыре вневписанные окружности для треугольников четырёхугольника $A'B'C'D'$ — 1 балл. (Суммируется с критерием (A) и (C), но не с остальными).

Задача 11.8.

Часть (G). Пример.

(G1) Ответ и пример с обоснованием — 1 балл.

(G2) Только ответ — 0 баллов.

(G3) Эскиз графика без пояснения, где встречаются какие длины хорд — 0 баллов.

(G4) Верный пример с неверным рассуждением о количестве хорд (например, утверждается, что хорд 4050) — 0 баллов.

(G5) Функция задается эскизом графика, из которого не следуют все необходимые свойства этого графика — 0 баллов.

(GM) Арифметические ошибки в подсчете числа хорд (например, $2025 \cdot 2 = 5050$) — баллы не снимаются.

Часть (Z). Следующие продвижения по оценке стоят 0 баллов.

(Z1) Существование хорды длины 1 или длины d, где d — делитель 2025.

(Z2) Наблюдение о том, что число хорд длины k равно числу нулей функции $f(x+k)-f(x)$.

(Z3) Соображение, что достаточно решать задачу в случае $f(0) = f(2025) = 0$.

(Z4) Идея индукционного доказательства, проверка базы индукции.

(Z5) Формулировка, доказательство леммы об альпинистах.

(Z6) Доказательство того, что на отрезке между соседними корнями длины t хотя бы $[t]$ хорд.

Критерии к следующим частям написаны в предположении $f(0) = f(2025) = 0$.

Часть (A). Оценка с помощью совместного изучения хорд длин k и $2025-k$.

(A1) Доказано, что $g(k) = f(x+k) - f(x)$ фиксированного знака для достаточно больших по модулю x — 1 балл.

(A2) Гипотеза о том, что хорд длины k и $2025-k$ хотя бы 4 и объяснение, почему это выполняется в случае, когда обе функции g_k и g_{2025-k} принимают значения обоих знаков — 1 балл.

(A3) Рассуждение работает только в случае, когда все $g(k)$ различны при целых k, за исключением $g(0) = g(2025)$ — не более 3 баллов за часть (A).

Часть (B). Оценка с помощью намотки графика функции на цилиндр.

(B1) График функции нарезан полосами между прямыми $x = k, x = k+1$, все кусочки наложены друг на друга параллельным переносом, и задача переформулирована в терминах количества пересечений полученных кусочков графика — 1 балл. (Это эквивалентно намотке графика функции на цилиндр.)

(B2) Доказано, что число внутренних хорд, то есть тех хорд, проекции которых на ось Ox содержатся в отрезке $[0, 2025]$, не менее 2024 (не считая самой хорды длины 2025) — 1 балл.

(B3) Гипотеза о том, что число внешних (то есть не внутренних) хорд не менее 2024 — 0 баллов.

(B4) Не разобран случай поведения на бесконечности, при котором $f(x+1) - f(x) > 0$ для достаточно больших по модулю x — не более 2 баллов за часть (B).

Часть (C). Оценка с помощью склейки по хорде длины 1.

(C1) Доказано, что есть хорда длины 1, скажем $[a, a+1]$, и рассмотрена функция $h(x) = f(x), x \leqslant a$, $h(x) = f(x+1), x > a$ — 1 балл.

(C2) Разобран случай, когда $f(t)$ — глобальный максимум (минимум) функции f при некотором $t \in \mathbb{R}$ — 1 балл.

(C3) Доказано, что для внутренней хорды длины 1 есть «зацепленная» с ней (зацеплены означает, что их проекции на ось Ox пересекаются, но ни одна не содержится в другой) — 1 балл.

(C4) В индукции по n (где в задаче $n = 2025$) переход сведен к доказательству (C3) — 1 балл.

Баллы внутри каждой из частей (A), (B), (C) суммируются. За оценку ставится максимум из баллов за части (A), (B), (C). Баллы за оценку суммируются с баллами за пример (G).

11 класс

11.1. На доску выписали 777 попарно различных *комплексных* чисел. Оказалось, что можно ровно 760 способами выбрать два числа a и b, записанных на доске, так, чтобы выполнялось равенство

$$a^2 + b^2 + 1 = 2ab.$$

Способы, которые отличаются перестановкой чисел, считаются одинаковыми. Докажите, что можно выбрать такие два числа c и d, записанных на доске, что

$$c^2 + d^2 + 2025 = 2cd.$$

Решение. Заметим, что условие $a^2 + b^2 + 1 = 2ab$ равносильно тому, что $(a - b)^2 = -1$ или же $a - b = \pm i$. Рассмотрим граф, вершины которого — записанные на доску числа, а ребро проводится между двумя числами, которые отличаются на i. Согласно условию задачи, в таком графе ровно 760 рёбер. Каждая компонента связности этого графа представляет собой путь и состоит из вершин-чисел вида z, $z + i$, $z + 2i$, $\ldots$, $z + (n - 1)i$. Предположим, что в этом графе k компонент связности. Тогда в нём $777 - k$ рёбер, поэтому $k = 17$. Поскольку $17 \cdot 45 = 765 < 777$, то в какой-то компоненте связности хотя бы 46 вершин, поэтому какие-то две из этих вершин — это числа c и $d = c + 45i$. Тогда $(c - d)^2 = 45^2 \cdot i^2 = -2025$, следовательно, $c^2 + d^2 + 2025 = 2cd$, что и требовалось.

11.2. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что треугольники A_1BC, AB_1C, ABC_1 и ABC — остроугольные. Докажите, что точки пересечения высот этих треугольников вместе с точкой пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной сфере.

Решение. Обозначим через M и H точки пересечения медиан и высот треугольника ABC, а также отметим точку T так, что $3\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Пусть сфера ω построена на отрезке HT как на диаметре. Поскольку прямая MT перпендикулярна плоскости ABC, то точка M лежит на ω. Покажем, что на сфере ω лежит точка пересечения высот H_1 треугольника A_1BC, рассуждение для двух других треугольников аналогично.

Обозначим через N середину отрезка BC. Поскольку $NA =$

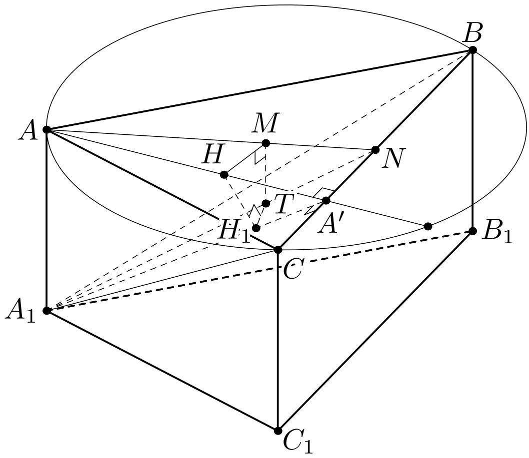


Рис. 10

$= 3NM$, точка T лежит на отрезке A_1N, в частности, она лежит в плоскости A_1BC. Пусть AA' — высота треугольника ABC. Поскольку прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC, то $\angle A_1AA' = 90°$, а также $A'A_1 \perp BC$ по теореме о трёх перпендикулярах, то есть точка H_1 лежит на отрезке A_1A'. Поскольку точка, симметричная точке пересечения высот H треугольника ABC относительно прямой BC, лежит на его описанной окружности, то $A'H \cdot A'A = A'B \cdot A'C$. Применяя то же рассуждение для треугольника A_1BC, мы получаем, что $A'H_1 \cdot A'A_1 = A'B \cdot A'C = A'H \cdot A'A$. Следовательно, четырёхугольник AHH_1A_1 вписанный, поэтому $\angle HH_1A_1 = 180° - \angle A_1AH = 90°$. Поскольку ещё $HA' \perp BC$ и $H_1A' \perp BC$, вновь применяя теорему о трёх перпендикулярах, мы получаем, что прямая HH_1 перпендикулярна плоскости A_1BC. Значит, $\angle HH_1T = 90°$, то есть точка H_1 лежит на сфере ω, что и требовалось.

Замечание. Точка T — общая точка пересечения медиан треугольников A_1BC, AB_1C, ABC_1.

11.3. Пару многочленов $F(x, y)$ и $G(x, y)$ с целыми коэффициентами назовём *важной*, если из делимости на 100 обеих разностей $F(a, b) - F(c, d)$ и $G(a, b) - G(c, d)$, где a, b, c, d — целые, следует, что числа $a - c$ и $b - d$ делятся на 100. Существует ли такая важная пара многочленов $P(x, y)$, $Q(x, y)$, что пара многочленов $P(x, y) - xy$ и $Q(x, y) + xy$ также является важной?

Ответ. Не существует.

Решение. Пусть пара многочленов F и G — важная. Рассмотрим пары остатков от деления на 100 чисел $F(a,b)$ и $G(a,b)$, где a, b — всевозможные пары целых чисел от 0 до 99. Согласно условию задачи, все такие пары остатков разные. Поскольку всего пар чисел 100^2, то каждая пара остатков от деления на 100 достигается ровно один раз. Значит, достигаются все 4 возможные пары чётностей чисел $F(a,b), G(a,b)$. Поскольку чётность значения многочлена с целыми коэффициентами в точке (a,b) зависит только от чётности чисел a и b, мы получаем, что пары значений $(F(0,0); G(0,0))$, $(F(1,0); G(1,0))$, $(F(0,1); G(0,1))$, $F(1,1); G(1,1))$ дают все четыре возможные пары чётностей. Однако заметим, что для пар многочленов $F = P$, $G = Q$ и $F(x,y) = P(x,y) - xy$, $G(x,y) = Q(x,y) + xy$ первые три пары чётностей одинаковые, а последняя пара — разная. Следовательно, обе такие пары многочленов важными быть не могут.

11.4. Дано натуральное число N. Куб со стороной $2N+1$ сложен из $(2N+1)^3$ единичных кубиков, каждый из которых — либо чёрный, либо белый. Оказалось, что среди любых 8 кубиков, имеющих общую вершину и образующих куб $2\times2\times2$, не более 4 чёрных кубиков. Какое наибольшее количество чёрных кубиков могло быть использовано?

Ответ. $(N+1)^2(4N+1)$.

Решение. Положим $k = (N+1)^2(4N+1)$. Введём систему координат так, что все вершины единичных кубиков будут иметь целые координаты от 0 до $2N+1$.

Начнём с примера, показывающего, что количество чёрных кубиков действительно может быть равно k. У каждого кубика рассмотрим его вершину, ближайшую к началу координат (её координаты принимают значения от 0 до $2N$). Пусть кубик чёрный, если хотя бы две координаты этой вершины чётны, и белый иначе. Ясно, что тогда в любом кубе $2\times2\times2$ будет ровно 4 чёрных и 4 белых кубика. При этом количество чёрных кубиков, у которых все три соответствующих координаты чётны, равно $(N+1)^3$, а количество кубиков, у которых чётны ровно две координаты, равно $3(N+1)^2N$, поэтому общее количество чёрных кубиков будет равно k.

Осталось доказать, что этот пример оптимальный. Пусть куб сложен из чёрных и белых кубиков так, что выполнены условия задачи. Назовём кубик *тёмным* или *светлым*, если он является соответственно чёрным или белым в приведённом выше примере.

Для каждой точки с координатами (a, b, c) в большом кубе назовём её x-, y- и z-рангом числа $r_x = \min(a, 2N+1-a)$, $r_y = \min(b, 2N+1-b)$ и $r_z = \min(c, 2N+1-c)$ соответственно. Назовём *рангом* этой точки число $r = \min(r_x, r_y, r_z)$. Иначе говоря, x-, y- или z-ранг точки — это расстояние от неё до ближайшей грани большого куба, перпендикулярной соответствующей оси, а её ранг — это просто расстояние от неё до ближайшей грани большого куба.

Отметим все вершины единичных кубиков с нечётными рангами. Для каждой отмеченной вершины рассмотрим разность количеств чёрных и белых кубиков, сходящихся в этой вершине; поскольку все эти вершины являются центрами кубов $2 \times 2 \times 2$, эта разность неположительна. Значит, и сумма Σ всех таких разностей неположительна.

Скажем, что *кратность* единичного кубика — это количество его отмеченных вершин (столько раз этот кубик учтён в Σ). Тогда Σ равна разности суммы всех кратностей чёрных кубиков и суммы кратностей всех белых кубиков. Поэтому нам достаточно доказать, что если такая разность неположительна, то количество чёрных кубиков ℓ не превосходит k.

Пусть r_x, r_y и r_z — это x-, y- и z-ранги центра некоторого кубика; пусть для определённости $r_x \leqslant r_y \leqslant r_z$. Тогда нетрудно видеть, что

• если $r_x < r_y$, то кратность этого кубика равна 4;

• если $r_x = r_y = 1/2 + d$, где d чётно, то кратность кубика меньше 4, и он тёмный;

• если $r_x = r_y = 1/2 + d$, где d нечётно, то кратность кубика больше 4, и он светлый.

Итак, кратности всех тёмных кубиков не больше 4, а всех светлых — не меньше 4.

Пусть теперь $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{(2N+1)^3}$ — кратности всех кубиков, расположенные в неубывающем порядке. Из сказанного выше вытекает, что $s_1 + s_2 + \ldots + s_k - s_{k+1} - \ldots - s_{(2N+1)^3} = 0$, поскольку в приведённом выше примере значение Σ было равно 0.

Если теперь в рассматриваемой раскраске $\ell > k$ чёрных кубиков, то

$$0 \geqslant \Sigma \geqslant s_1 + s_2 + \ldots + s_\ell - s_{l+1} - s_{\ell+2} - \ldots - s_{(2N+1)^3} > \\ > s_1 + s_2 + \ldots + s_k - s_{k+1} - \ldots - s_{(2N+1)^3} = 0,$$

поскольку $s_{k+1} \geqslant 4$. Это противоречие показывает, что $\ell \leqslant k$, что и требовалось доказать.

Замечание. Оценку можно доказать и по-другому — например, так.

Рассмотрим четыре вершины большого куба A, B, C, D, образующие правильный тетраэдр. Отметим вершину единичного кубика, если у вектора, соединяющего её с ближайшей к ней вершиной из A, B, C и D, все координаты нечётны. Пусть p — количество отмеченных вершин, а q — количество единичных кубиков, не имеющих отмеченной вершины. Тогда количество чёрных кубиков не превосходит $4p + q$.

Осталось выяснить, что $4p+q = k$. Это можно сделать непосредственно; но вместо этого можно воспользоваться той же схемой, что и в решении выше. Именно, нетрудно заметить, что если у единичного кубика есть две отмеченных вершины, то он светлый, а если нет отмеченных вершин, то он тёмный. Тогда рассуждение выше сработает с несложными изменениями.

11.5. Дано натуральное число n. Натуральные числа $1, 2, \ldots, n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n - 1$ выписанных на листке чисел?

Ответ. $\lfloor n/2 \rfloor$.

Решение. *Оценка.* Предположим, что какое-то из выписанных на листке чисел больше $\lfloor n/2 \rfloor$, скажем, НОД$(a, b) = d > > \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда наибольшее из чисел a, b не меньше $2d$, что больше n — противоречие. Значит, каждый из написанных НОДов не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, потому количество различных НОДов не может превышать $\lfloor n/2 \rfloor$.

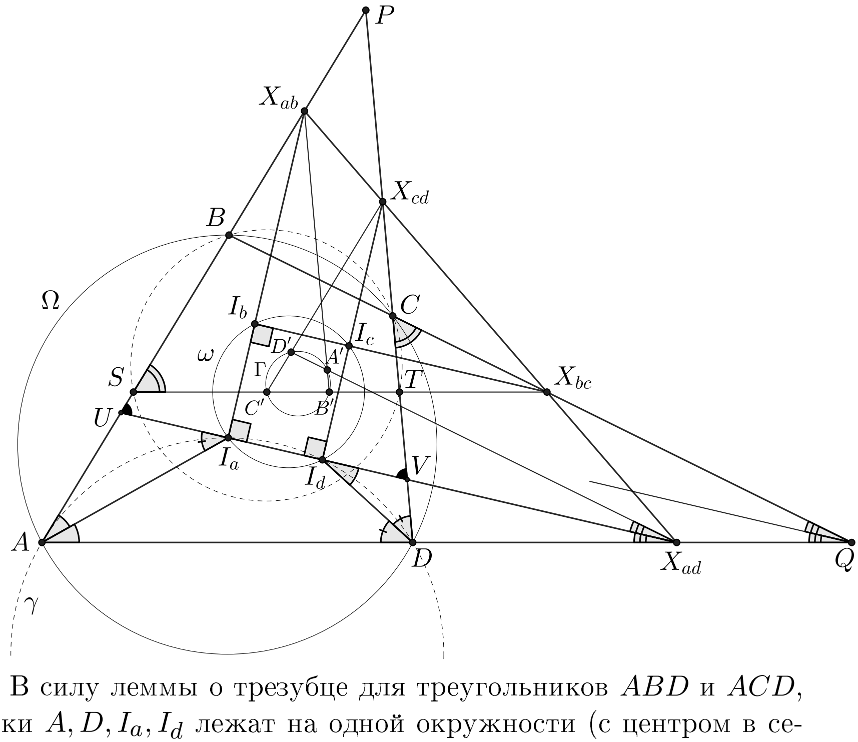
Пример. Разобьём все числа от 1 до n на цепочки вида $a, 2a, 4a, 8a, \ldots, 2^k a$, где a — нечётное число, не превосходящее n. Выпишем в строчку цепочки одну за другой. Тогда для любого натурального $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ найдётся цепочка, в которой встречается d, а следующее за d число будет $2d$. Видим, что каждое натуральное $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ будет выписано на листке.

11.6. По кругу выписаны 100 единиц. Петя и Вася играют в игру, каждый делает по 10^{10} ходов. Петя каждым своим ходом выбирает 9 стоящих подряд чисел и уменьшает каждое из них на 2. Вася каждым своим ходом выбирает 10 стоящих подряд чисел и увеличивает каждое из них на 1. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Докажите, что Вася сможет действовать так, чтобы после каждого его хода среди 100 выписанных чисел было не менее пяти положительных, как бы ни играл Петя.

Решение. Обозначим записанные по кругу числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100}. Вася будет следить лишь за десятью числами, которые он разобьёт на пары: (a_9, a_{18}), (a_{27}, a_{36}), $\ldots$, (a_{90}, a_{99}). За один ход Петя может уменьшить не более чем одно из этих 10 чисел. Если Петя уменьшил одно из чисел пары (a_i, a_{i+9}), Вася в ответ добавит 1 к числам a_i, a_{i+1}, $\ldots$, a_{i+9}. Если же Петя не уменьшил ни одно из этих 10 чисел, Вася сделает любой разрешённый ход. Таким образом, после пары ходов Пети и Васи сумма чисел в каждой из пяти Васиных пар не уменьшится. Поскольку изначально пять сумм в парах положительны, то после каждого Васиного хода сумма в каждой из этих пяти пар будет положительной, поэтому в каждой из пар будет хотя бы одно положительное число. Таким образом, после любого Васиного хода будет хотя бы 5 положительных чисел, что и требовалось.

11.7. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность Ω. В треугольники DAB, ABC, BCD, CDA вписаны окружности $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ соответственно. Проведены общие внешние касательные к окружностям ω_a и ω_b, ω_b и ω_c, ω_c и ω_d, ω_d и ω_a, не содержащие сторон четырёхугольника $ABCD$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на четырёх проведённых прямых (именно в таком порядке), вписан в окружность Г. Докажите, что прямые, соединяющие центры окружностей ω_a и ω_c, ω_b и ω_d, Ω и Γ, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть, не умаляя общности, лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q. Обозначим центр окружности ω_a через I_a, точки I_b, I_c, I_d определим аналогично. Обозначим четырёхугольник, образованный четырьмя касательными через $A'B'C'D'$ (прямая $A'B'$ — общая внешняя касательная к ω_a и ω_b, аналогично с тремя другими сторонами).



В силу леммы о трезубце для треугольников ABD и ACD, точки A, D, I_a, I_d лежат на одной окружности (с центром в середине дуги AD окружности Ω). Пусть прямая I_aI_d пересекает стороны AB и CD в точках U и V, а также пересекает прямую AD в точке X_{ad}. Обозначим в четырёхугольнике $ABCD$: $\angle A = \alpha$, $\angle D = \delta$. Тогда в силу вписанности четырёхугольников $ABCD$ и AI_aI_dD, выполняются равенства углов: $\angle QCD = \alpha$, $\angle UI_aA = \angle ADI_d = \delta/2$, $\angle VI_dD = \angle DAI_a = \alpha/2$. Следовательно, $\angle CQD = \delta - \alpha$ и $\angle PUV = \angle PVU = (\alpha + \delta)/2$. В частности, $\alpha < \delta$, поэтому точка X_{ad} лежит на луче AD и $\angle DX_{ad}I_d = \angle ADV - \angle PVU = (\delta - \alpha)/2$. Последнее равенство означает, что прямая I_aI_d параллельна биссектрисе угла CQD. Поскольку прямая $A'D'$ симметрична прямой AD относительно линии центров I_aI_d, мы получаем, что $A'D' \parallel BC$, а также прямая $A'D'$ проходит через точку X_{ad}. Определим аналогично точки X_{ab}, X_{bc}, X_{cd} и получим, что эти точки лежат на прямых $A'B', B'C', C'D'$, которые параллельны сторонам четырёхугольника $ABCD$.

Как мы поняли выше, прямая I_aI_d параллельна биссектрисе угла CQD. Рассуждая аналогично, мы получаем, что этой биссектрисе параллельна прямая I_bI_c, а прямые I_aI_b и I_cI_d параллельны биссектрисе угла BPC. Поскольку $\angle PUV = \angle PVU$, то биссектриса угла BPC перпендикулярна прямой I_aI_d. Таким образом, соседние стороны четырёхугольника $I_aI_bI_cI_d$ перпендикулярны, то есть это прямоугольник. Значит, он вписан в окружность, обозначим её через ω, центр которой — точка пересечения диагоналей. Таким образом, достаточно доказать, что центры окружностей ω, Ω и Γ лежат на одной прямой. Мы докажем, что у этих трёх окружностей общая радикальная ось, причём на ней лежат точки $X_{ab}, X_{bc}, X_{cd}, X_{da}$ $(\star)$.

Обозначим через γ описанную окружность четырёхугольника AI_aI_dD. Тогда точка X_{ad} — радикальный центр окружностей γ, ω и Ω, поскольку она лежит на двух их радикальных осях. Значит, радикальная ось окружностей ω и Ω проходит через точку X_{ad}, аналогично, на ней лежат и точки X_{ab}, X_{bc}, X_{cd}. В частности, эти 4 точки лежат на одной прямой.

Пусть прямая $B'C'$ пересекает сторону AB в точке S и сторону CD в точке T. Поскольку $B'C' \parallel AD$, то $\angle BST = \angle BAD = 180^\circ - \angle BCT$, поэтому четырёхугольник $BCTS$ — вписанный. Поскольку $C'D' \parallel AB$ и $A'B' \parallel CD$, то по теореме Фалеса

$$\frac{X_{bc}B'}{X_{bc}T} = \frac{X_{bc}X_{ab}}{X_{bc}X_{cd}} = \frac{X_{bc}S}{X_{bc}C'}.$$

Из этого равенства отношений и вписанности $BCTS$ мы получаем, что $X_{bc}B' \cdot X_{bc}C' = X_{bc}S \cdot X_{bc}T = X_{bc}B \cdot X_{bc}C$, то есть степень точки X_{bc} относительно окружностей Ω и Γ одинакова.

Рассуждение для точек X_{ab}, X_{ad}, X_{cd} аналогично. Итого доказано утверждение ($\star$), что и требовалось.

11.8. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. *Хордой* будем называть отрезок целой длины, параллельный оси абсцисс, концы которого лежат на графике функции f. Известно, что у графика функции f ровно N хорд, причём среди них есть хорда длины 2025. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ. 4049.

Решение. Для натурального n положим $g_n(x) = f(x+n) - f(x)$. Тогда число хорд длины n равно количеству нулей функции $g_n(x)$.

В качестве *примера* выберем следующую кусочно-линейную функцию f: $f(x) = x$ при $x \leqslant 2024\frac{9}{10}$ и $f(x) = 20249 \cdot |2025 - x|$ при $x \geqslant 2024\frac{9}{10}$. Заметим, что при $a \notin \left[0; 2025\frac{1}{10}\right]$ функция $f(x)$ принимает значение $f(a)$ только в точке a. Следовательно, если $g_n(x) = 0$, то обе точки x и $x+n$ лежат в отрезке $\left[0, 2025\frac{1}{10}\right]$. В частности, $n \leqslant 2025$, и нули функции $g_n(x)$ лежат в промежутке $\left[0; 2025\frac{1}{10} - n\right]$. Для $n = 2025$ при $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ имеем, что $g_{2025}(x) = 20248x$. Значит, $g_{2025}(x)$ имеет единственный нуль $x = 0$, то есть хорда длины 2025 у функции f единственна. При натуральном $n \leqslant 2024$ функция $g_n(x)$ монотонно убывает при $x \in [0, 2025 - n]$ и монотонно возрастает при $x \in \left[2025 - n, 2025\frac{1}{10} - n\right]$, при этом $g_n(0) > 0$, $g_n(2025 - n) < 0$ и $g_n\left(2025\frac{1}{10} - n\right) > 0$. Таким образом, у этой функции ровно два нуля, то есть функция f имеет по две хорды длины $n = 1$, 2, …, 2024. Итого у неё 4049 различных хорд.

Теперь перейдём к *оценке*. Без ограничения общности будем считать, что хорда длины 2025 соединяет точки $(0; 0)$ и $(0; 2025)$, т. е. $f(0) = f(2025) = 0$. Положим $g(x) = g_1(x) = f(x+1) - f(x)$. Из условия следует, что у функции g конечное число нулей, а также эта функция непрерывна. Пусть все её нули лежат в промежутке $[-M, M]$. Тогда функция g знакопостоянна на лучах $x > M$ и $x < -M$. При необходимости, заменив функцию f на $-f$, мы будем считать, что $g(x) > 0$ при $x > M$.

Предположим, что $g(x) < 0$ при $x < -M$. Заметим, что $g_n(x) = g(x) + g(x+1) + \ldots + g(x+n-1)$, поэтому $g_n(x) > 0$ при $x > M$ и $g_n(x) < 0$ при $x < -M-n$. Значит, функция $g_n(x)$ имеет нуль, то есть у функции f есть хорда любой натуральной длины, что противоречит условию задачи.

Таким образом, $g(x) > 0$ при $x < -M$. Значит, $g_n(x) > 0$ при $x > M$ и при $x < -M-n$. Далее мы докажем, что при натуральных k и m, в сумме дающих 2025, функция f имеет хотя бы 4 хорды длин k и m. Применяя это утверждение для каждой такой пары k, m, мы получим заявленную оценку. Иными словами, мы докажем, что у функций $g_k(x)$ и $g_m(x)$ при $k+m = 2025$ суммарно хотя бы 4 нуля. Предположим, что это не так. Тогда можно считать, что функция g_k имеет не более одного нуля. Значит, эта функция не может принимать отрицательных значений. Действительно, пусть $g_k(t) < 0$. Поскольку функция $g_k(x)$ непрерывна и неотрицательна при достаточно больших по модулю значениях x, то у неё есть нуль на луче $(-\infty, t)$ и на луче (t, ∞), то есть хотя бы два нуля, противоречие.

Итого $g_k(x) \geqslant 0$, причём равенство нулю достигается не более чем в одной точке. Покажем, что $g_m(t) > 0$ для некоторого $t \in (0, k)$. Рассмотрим наименьшее натуральное число N, для которого число Nk делится на 2025, и обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_{N-1}$ остатки чисел $k, 2k, \ldots, (N-1)k$ по модулю 2025. Если $g_k(0) > 0$, положим $r_0 = r_N = 0$, если же $g_k(0) = 0$, положим $r_0 = r_N = 2025$. Рассмотрим разности $d_j = f(r_{j+1}) - f(r_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Заметим, что если $r_{j+1} > r_j$, то $r_{j+1} = r_j + k$ и $d_j = g_k(r_j) \geqslant 0$; если же $r_{j+1} < r_j$, то $r_j = r_{j+1} + (2025 - k) = r_{j+1} + m$ и $d_j = -g_m(r_{j+1})$. Если $r_0 = 0$, то $d_0 = g_k(0) > 0$. В случае $r_N = 2025$ мы получаем, что $d_{N-1} = g_k(2025 - k) > 0$, поскольку $g_k(0) = 0$, а $2025 - k \neq 0$. Таким образом, $d_0 + d_1 + \ldots + d_{N-1} = 0$, и первое или последнее слагаемое в этой сумме положительно. Значит, найдётся отрицательное слагаемое $d_j < 0$, что возможно лишь в ситуации $r_j = r_{j+1} + m$ и $d_j = -g_m(r_{j+1})$. Тогда для $t = r_{j+1} \in [0, k]$ мы получаем, что $g_m(t) = -d_j > 0$.

Заметим, что $g_k(0) + g_m(k) = g_m(0) + g_k(m) = f(2025) - f(0) = 0$. Поскольку функция g_k неотрицательна, то $g_m(0) \leqslant 0$

и $g_m(k) \leqslant 0$, в частности, $t \neq 0$ и $t \neq k$, поэтому $t \in (0, k)$. В случае, когда $g_k(0) > 0$ и $g_k(m) > 0$, мы получаем, что $g_m(0) < 0$, $g_m(t) > 0$, $g_m(k) < 0$, а также функция $g_m(x)$ положительна при достаточно больших по модулю x. Значит, функция g_m имеет по нулю на промежутках $(-\infty, 0)$, $(0, t)$, $(t, k), (k, \infty)$, то есть уже эта функция имеет хотя бы 4 нуля. Если $g_k(0) = 0$, то $g_k(m) > 0$, поскольку у функции g_k не более одного нуля. Тогда $g_m(k) = 0$, $g_m(t) > 0$, $g_m(0) < 0$. В этом случае у функции g_m есть по нулю на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, t)$, а также нуль k, то есть хотя бы 3 нуля, и ещё один нуль в точке 0 есть у функции g_k, что в сумме составляет хотя бы 4 нуля. Случай $g_k(m) = 0$ разбирается аналогично.