	Критерий	Балл
10.1	Приведена стратегия, но не показано, как должен ходить Вася, если соответствующая клетка уже занята или не существует	баллы не снижаются
	В решении не описан случай, когда Петя ставит букву, отличную от П, Е, Т или Я	баллы не снижаются
10.2	Баллы по критериям НЕ суммируются	
	А1. Доказана вписанность (BCQR) без дальнейших продвижений	1 балл
	А2. При инверсии с центром в A доказано, что окружности (BPC) и (QPR) меняются местами	1 балл
	В. Получен один из результатов **А1** или **А2** и заявлено (но не доказано), что центр (BCQR) является центром искомой окружности	2 балла
	С. Пусть точки O_1 и O_2 - центры окружностей (BPC) и (QPR). Получен один из результатов **А1** или **А2** и заявлено (но не доказано), что треугольник, образованный прямыми BO_1, QO_2 и AB (или прямыми CO_1, RO_2 и AC), является равнобедренным.	2 балла
	Получены различные равенства углов (выведены из касания и т.д.)	баллы не добавляются
10.3	Только случаи n=1 и n=2	0 баллов
	Только случай n=3 и, возможно, n=1 и n=2 (другие частные случаи n не добавляют баллов)	1 балл
	Только идея рассматривать числа вида $a^{2^k}-1$ с наибольшим подходящим k	1 балл
	Два предыдущих критерия вместе	2 балла
	Есть случай n=3, для случая n не меньше 4 доказано, что если 2^{k+1} <= n < 2^{k+2}), то a^(2^k) + 1 взаимно просто с другими скобками, но отсюда не выведена задача	5 баллов
	Задача сведена к доказательству того, что $a^{2^k}+1$ (с наибольшим возможным k) взаимно просто с остальными скобками	4 балла
	Сведение задачи к случаю, что $a^{p-1}+...+a+1$ --- точный квадрат для некоторого простого p (например, с помощью постулата Бертрана)	баллы не добавляются
	Доказано, что если n чётно, то a≡0 (mod 8), а если n нечётно, то a≡6 (mod 8)	баллы не добавляются
10.4	Только пример на $c \neq 15/4$	0 баллов
	Доказано, что найдется шестерка с суммой, по модулю не превосходящей 5	0 баллов
	Идея перехода к семи точкам, среди которых есть шестерки как с положительной, так и с отрицательной суммой	0 баллов
	Пример на $c = 15/4$	2 балла
10.5	Оценка на [n/2] декларирована, но не доказана	штраф 1 балл
	Алгоритм для примера ломается (не отслеживается, что некоторые четные числа могут уже быть использованы)	5 баллов
	нет обоснования, что все НОДы встретятся	штраф 1 балл
10.6	Только доказательство, что для любого многочлена f(x) можно подобрать многочлен g(x) степени не выше 98	3 балла
	Только доказательство, что для каких-то многочленов f(x) может не быть подходящего многочлена g(x) степени не выше 97	4 балла
	Только пример многочлена f(x), про который утверждается, что не удастся подобрать подходящий многочлен g(x) степени не более 97 (без доказательства этого факта).	0 баллов
	Мелкие ошибки (одна или несколько): -- в формулировке теоремы Виета потерян знак и/или забыто деление на старший коэффициент -- в построенном примере g(x) для некоторых многочленов f(x) у многочлена f(x)-g(x) могут быть кратные корни -- при взятии производной у многочлена f(x)-g(x) никак не поясняется, почему она в точке пересечения не равна 0	штраф 1 балл
	В формулировке теоремы Виета перепутаны коэффициенты при старших степенях и при младших степенях (например, утверждается, что коэффиеинт при x^{99} равен минус сумме всех возможных произведений по 99 корней)	0 баллов за соотв. часть
10.7	Только верный пример БЕЗ обоснования	4 балла
	Только верный пример С обоснованием	5 баллов
	Только оценка, почему не может быть 25. При этом эта оценка должна быть явно сформулирована и доказана (с разбором всех случаев)	1 балл
	Примеры на $k<24$ не оцениваются	0 баллов
	В обосновании оценки упущен один случай (или разобран неверно)	штраф 1 балл

	Критерий	Балл
10.8	НЕТ критериев	

10 класс

10.1. Петя и Вася играют в игру на изначально пустой клетчатой таблице 100×100, делая ходы по очереди. Начинает Петя. За свой ход игрок вписывает в некоторую пустую клетку любую заглавную букву русского алфавита (в каждую клетку можно вписать ровно одну букву). Когда все клетки будут заполнены, Петя объявляется победителем, если найдутся четыре подряд идущие клетки по горизонтали, в которых слева направо написано слово «ПЕТЯ», или найдутся четыре подряд идущие клетки по вертикали, в которых сверху вниз написано слово «ПЕТЯ». Сможет ли Петя выиграть независимо от действий Васи?

Ответ. Не сможет.

Решение. Опишем выигрышную стратегию Васи. Пусть Вася все время пишет букву «Ю» в клетку согласно следующим ниже условиям; а если указанная клетка не существует или уже занята, а также если Петя ставит любую букву отличную от «П», «Е», «Т», «Я», то пусть Вася ставит «Ю» в любую свободную клетку.

Если Петя в некоторой клетке пишет букву «П», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней справа; если Петя пишет букву «Е», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней слева; если Петя пишет букву «Т», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней снизу; если Петя пишет букву «Я», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней сверху.

Из первых двух условий следует, что в двух соседних по горизонтали клетках не могло появиться «ПЕ», читаемое слева направо. В самом деле, предположим, что горизонтальное «ПЕ» появилось; тогда после появления первой из этих двух букв Вася, согласно описанной стратегии, сразу займёт место второй из этих букв — противоречие. Аналогично, в двух соседних по вертикали клетках не могло появиться «ТЯ», читаемое сверху вниз.

10.2. Внутри треугольника ABC отмечена точка P. На отрезке AB отмечена точка Q, а на отрезке AC — точка R так, что описанные окружности треугольников BPQ и CPR касаются прямой AP. Через точки B и C провели прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника BPC, а через точки

Q и R — прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника PQR. Докажите, что существует окружность, которая касается четырёх проведённых прямых.

Решение. Поскольку $AB \cdot AQ = AP^2 = AC \cdot AR$, четырёхугольник $BCRQ$ — вписанный. Пусть O — центр окружности $(BCRQ)$. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей (BPC) и (QPR). Покажем, что прямые BO_1, CO_1, QO_2, RO_2 равноудалены от O. Так как $OB = OC = OQ = OR$, для этого достаточно установить равенство (направленных) углов $\angle OCO_1 = \angle O_1BO = \angle OQO_2 = \angle O_2RO$. Здесь первое и последнее равенства очевидны из симметрии относительно серединных перпендикуляров к BC и QR.

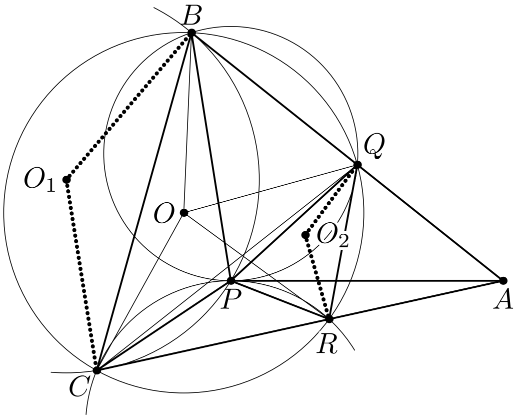

Рис. 7

Остаётся доказать равенство $\angle O_1BO = \angle OQO_2$ $(*)$. Из счёта углов получаем $\angle OQO_2 = \angle OQR - \angle O_2QR = (90^\circ - \angle RCQ) - (90^\circ - \angle RPQ) = \angle RPQ - \angle RCQ$. Аналогично $\angle O_1BO = \angle BPC - \angle BQC$. Значит, $(*)$ эквивалентно равенству $\angle RPQ - \angle RCQ = \angle BPC - \angle BQC$ или $\angle BQC - \angle RCQ = \angle BPC - \angle RPQ$ $(**)$. Из касания окружностей (BPQ) и (CPR) следует $\angle RPQ = \angle RCP + \angle PBQ$, что равно (из суммы углов четырёхугольника $BPCA$) $\angle BPC - \angle BAC$. Тем самым, $(**)$ преобразуется к виду $\angle BQC - \angle RCQ = \angle BAC$, что верно. Задача решена.

10.3. Найдите все натуральные n, для которых существует такое *чёт-*

ное натуральное a, что число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ является точным квадратом.

Ответ. $n=1$ и $n=2$.

Решение. Для $n=1$ подойдёт любое чётное a вида m^2+1, например, $a=2$. Для $n=2$ подойдёт любое чётное a вида m^2-1, например, $a=8$.

Предположим, что для $n=3$ нашлось требуемое число a. Тогда число $(a-1)(a^2-1)(a^3-1)=(a-1)^3(a+1)(a^2+a+1)$ является точным квадратом. Поскольку $a^2+a+1=a(a+1)+1$, числа $a+1$ и a^2+a+1 взаимно просты. Раз число $a+1$ нечётно, числа $a+1$ и $a-1$ также взаимно просты. Следовательно, числа $a+1$ и $(a-1)(a^2+a+1)$ — точные квадраты. В частности, число $a+1$ при делении на 3 может давать лишь остаток 0 или 1, а тогда число $a-1$ не делится на 3. Отсюда

$$\begin{aligned}\text{НОД}(a-1,a^2+a+1)=\text{НОД}(a-1,(a+2)(a-1)+3)=\\=\text{НОД}(a-1,3)=1,\end{aligned}$$

значит, числа $a-1$ и a^2+a+1 также являются точными квадратами. Но второе являться квадратом не может, поскольку $a^2<a^2+a+1<(a+1)^2$. Противоречие.

Осталось доказать, что требуемого a не существует при $n\geqslant 4$. Предположим, что такое a нашлось. Возьмём такое натуральное $k\geqslant 2$, что $2^k\leqslant n<2^{k+1}$. Поскольку $a^{2^k}-1=(a^{2^{k-1}}-1)(a^{2^{k-1}}+1)$, число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ представляется в виде произведения $a^{2^{k-1}}+1$ и нескольких множителей вида a^m-1, где $1\leqslant m\leqslant n$ и $m\neq 2^k$.

Докажем, что множитель $a^{2^{k-1}}+1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в этом разложении. Пусть $a^{2^{k-1}}+1$ и a^m-1 имеют некоторый общий делитель d. Тогда и $\text{НОД}(a^{2^k}-1,a^m-1)$ кратен d. Но $\text{НОД}(a^{2^k}-1,a^m-1)=a^{\text{НОД}(2^k,m)}-1$. Поскольку $m\neq 2^k$ и $m\leqslant n<2^{k+1}$, число m не может делиться на 2^k. Таким образом, $\text{НОД}(2^k,m)$ — степень двойки, не превосходящая 2^{k-1}. Следовательно, $a^{2^{k-1}}-1$ делится на $\text{НОД}(a^{2^k}-1,a^m-1)$, а значит, делится и на d. Поскольку a

чётно, числа $a^{2^{k-1}} - 1$ и $a^{2^{k-1}} + 1$ не имеют общих делителей, отличных от 1, значит, $d = 1$, что и требовалось.

Множитель $a^{2^{k-1}} + 1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в произведении, являющемся точным квадратом, поэтому он сам является точным квадратом. Тогда $a^{2^{k-1}} + 1$ и $a^{2^{k-1}}$ — отличающиеся на 1 квадраты натуральных чисел, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, и для $n \geqslant 4$ требуемых чисел a не найдётся.

10.4. На плоскости отмечены 10^6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведены все отрезки между ними. Гриша поставил на каждом проведённом отрезке вещественное число, по модулю не превосходящее 1, и для каждой шестёрки отмеченных точек посчитал сумму чисел на всех 15 отрезках, соединяющих их. Оказалось, что каждая такая сумма по модулю не меньше числа C, при этом среди таких сумм есть как положительная, так и отрицательная. При каком наибольшем C это возможно?

Ответ. $\frac{15}{4}$.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются отмеченные точки, а рёбрами — проведённые отрезки.

Оценка. Докажем оценку $C \leqslant \frac{15}{4}$. Условие гласит, что в нашем полном графе есть как шестёрки вершин, сумма на рёбрах между которыми положительна, так и шестёрки, сумма на рёбрах между которыми отрицательна. Тогда найдутся две шестёрки, отличающиеся заменой только одной вершины, такие, что у одной из них сумма положительна, у другой отрицательна. В самом деле, возьмём шестёрку с положительной суммой, и будем превращать её в шестёрку с отрицательной, меняя вершины по одной – на каком то шаге произошло изменение знака, шестёрки, которые были до и после этого шага – искомая пара.

Далее работаем с полным подграфом на множестве S из семи вершин — объединении вышеописанной пары шестёрок. Рассмотрим все семь шестёрок, которые можно получить выбрасыванием одной вершины из S. Пусть среди них k с отрицательными суммами — получающиеся выбрасыванием вершин $A_1, \ldots, A_k$ (будем называть эти вершины A-*вершинами*, а соответствующие шестёрки — A-*шестёрками*), и $7-k$ с положительными суммами — получающиеся выбрасыванием вершин $B_1, \ldots, B_{7-k}$ (будем называть эти вершины B-*вершинами*, а соответствующие шестёрки — B-*шестёрками*). Рёбра между двумя A-вершинами будем называть AA-*рёбрами*, между двумя B-вершинами — BB-*рёбрами*, а рёбра, соединяющие A-вершину с B-вершиной — AB-*рёбрами*.

Из *старой* расстановки чисел на рёбрах, соединяющих вершины множества S, получим *новую* расстановку, заменив все числа на AA-рёбрах на число x, равное их среднему арифметическому, и аналогично заменив все числа на AB-рёбрах на их среднее арифметическое y, а все числа на BB-рёбрах на их среднее арифметическое z. Очевидно, $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, так как все старые числа по модулю не превосходят 1.

Лемма. Подграф S с новыми числами на рёбрах удовлетворяет условию с той же константой C.

Доказательство леммы. Заметим, что для каждого AA-ребра есть одно и то же количество A-шестёрок, в которые входят оба его конца. И наоборот, для любой A-шестёрки среди 15 рёбер между её вершинами есть одно и то же количество AA-рёбер. То же верно для AB-рёбер и для BB-рёбер. Значит, сумма Σ_A чисел на рёбрах в A-шестёрке в новой расстановке есть среднее сумм по всем A-шестёркам в старой расстановке, то есть среднее нескольких чисел, не больших $-C$; значит, $\Sigma_A \leqslant -C$. Аналогичное утверждение верно для сумм в B-шестёрках. Лемма доказана. $\square$

Далее изучаем новую расстановку. Рассмотрим случаи.

Случай $k=1$. Иными словами, есть ровно одна A-шестёрка, на которой пятнадцать BB-рёбер, и шесть B-шестёрок, на каждой из которых десять BB-рёбер и пять AB-рёбер. Имеем систему неравенств: $15z \leqslant -C$, $5y + 10z \geqslant C$. Умножим первое на -2, сложим со вторым, умноженным на 3, получим $15y \geqslant 5C$, откуда $C \leqslant 3$.

Случай $k = 2$. Теперь у нас две A-вершины и пять B-вершин, то есть на A-шестёрке есть десять BB-рёбер и пять AB-рёбер, а на B-шестёрке – шесть BB-рёбер, восемь AB-рёбер и одно AA-ребро. Имеем $5y + 10z \leqslant -C$, $x + 8y + 6z \geqslant C$. Исключая z, получаем $8C \leqslant 5x + 25y \leqslant 30$, значит, $C \leqslant \frac{15}{4}$.

Случай $k = 3$. Аналогично предыдущему, имеем $x + 8y + 6z \leqslant -C$, $3x + 9y + 3z \geqslant C$. Избавляясь на этот раз от y, получаем $17C \leqslant 15x - 30z \leqslant 45$, откуда $C \leqslant \frac{45}{17} < \frac{15}{4}$.

Случаи $k \geqslant 4$ сводятся к рассмотренным умножением всех чисел на -1, что ведёт к замене $k \mapsto 7 - k$. Итак, оценка $C \leqslant \frac{15}{4}$ доказана.

Пример. Любое число вершин от двух до 999995 объявим вершинами типа A, остальные — вершинами типа B. На всех рёбрах между двумя вершинами типа B напишем число $-\frac{7}{8}$, на всех остальных — число 1. Тогда, если в шестёрке вершин хотя бы пять B-вершин, то сумма в ней не больше $-\frac{15}{4}$, а иначе — не меньше $\frac{15}{4}$.

10.5. Дано натуральное число n. Натуральные числа $1, 2, \ldots, n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n - 1$ выписанных на листке чисел?

Ответ. $\lfloor n/2 \rfloor$.

Решение. *Оценка.* Предположим, что какое-то из выписанных на листке чисел больше $\lfloor n/2 \rfloor$, скажем, НОД$(a, b) = d > \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда наибольшее из чисел a, b не меньше $2d$, что больше n — противоречие. Значит, каждый из написанных НОДов не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, потому количество различных НОДов не может превышать $\lfloor n/2 \rfloor$.

Пример. Разобьём все числа от 1 до n на цепочки вида $a, 2a, 4a, 8a, \ldots, 2^k a$, где a — нечётное число, не превосходящее n. Выпишем в строчку цепочки одну за другой. Тогда для любого натурального $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ найдётся цепочка, в которой встречается d, а следующее за d число будет $2d$. Видим, что каждое натуральное $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ будет выписано на листке.

10.6. При каком наименьшем k для любого многочлена $f(x)$ степени 100 с вещественными коэффициентами найдётся такой многочлен $g(x)$ степени не выше k с вещественными коэффициентами, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют ровно 100 общих точек?

Ответ. 98.

Решение. Положим $n = 100$.

1. Покажем, как подобрать нужный многочлен g степени не выше $n-2$ для данного многочлена f степени n. При домножении f на ненулевую константу условие не поменяется (g можно домножить на ту же константу), поэтому считаем, что старший коэффициент f равен 1, так что $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Возьмём произвольный набор n различных чисел $x_1, \ldots, x_n$, дающих в сумме $-a_1$, и положим $h(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)$, $g(x) = f(x) - h(x)$, так что $h = f - g$. Видим, что у f и h совпадают коэффициенты при x^n и при x^{n-1}, поэтому степень g не превышает $n - 2$. С другой стороны, абсциссы точек пересечения графиков f и g — это в точности корни многочлена h, а их ровно n.

2. Покажем, что $k \leqslant n-3$ не работает. Пусть дан многочлен $f(x) = x^n$, а $g(x)$ — многочлен степени не выше $n - 3$. Предположим, что графики f и g пересекаются в n точках, имеющих абсциссы $x_1, \ldots, x_n$. Но тогда многочлен $f - g$ степени n имеет n вещественных корней $x_1, \ldots, x_n$. С другой стороны, у $f-g$ коэффициенты при x^{n-1} и x^{n-2} равны 0. Но тогда по теореме Виета сумма $s_1 = x_1 + \ldots + x_n$ и сумма попарных произведений $s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$ равны 0. Отсюда $x_1^2+\ldots+x_n^2 = s_1^2-2s_2 = 0$, следовательно $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, что противоречит тому, что x_i различны.

10.7. В программу соревнования входит 25 видов спорта, в каждом из которых определяется один победитель, получающий золотую медаль. В соревновании участвуют 25 спортсменов, каждый — во всех 25 видах спорта. Имеется 25 экспертов, каждый из которых должен сделать *прогноз*, сколько золотых медалей получит каждый спортсмен, при этом в его прогнозе количества медалей должны являться целыми неотрицательными числами с суммой 25. Эксперта признают *компетентным*, если он верно угадает количество золотых медалей хотя бы у одного спортсмена. При каком наибольшем k эксперты могут сделать такие прогнозы, что хотя бы k из них будут признаны компетентными независимо от исхода соревнования?

Ответ. 24.

Решение. *Оценка.* Покажем, что $k \leqslant 24$, т. е. что любой эксперт может оказаться некомпетентным. Если этот эксперт считает, что все спортсмены возьмут по одной медали, опровергнем его результатом $(25, 0, 0, \ldots, 0)$. Иначе эксперт считает, что несколько (хотя бы один) спортсменов получат 0 медалей. Тогда распределим все медали между этими спортсменами так, чтобы каждый из них получил хотя бы одну медаль. В таком случае эксперт не угадает ни одного количества медалей.

Пример. Пусть прогноз одного эксперта — $(1, 1, 1, \ldots, 1)$, а прогнозы остальных — $(1, 0, \ldots, 0, 24)$, $(0, 1, \ldots, 0, 24)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1, 24)$ (на последнем месте 24, и ещё одна единица).

Если некомпетентным оказался первый эксперт, то в исходе точно есть хотя бы три нуля, иначе хотя бы в 23 позициях количество медалей не меньше 2, и тогда общее количество медалей не меньше $23 \cdot 2 > 25$ — противоречие. Но тогда каждый из остальных экспертов компетентный.

Предположим теперь, что двое экспертов, отличных от первого, оказались некомпетентными. Тогда в двух позициях их прогнозы — 0 и 1 медалей, а значит, в реальном исходе в этих позициях не менее 2 медалей. Кроме того, ещё в 22 позициях прогнозы обоих экспертов — нули, значит, в реальном исходе в этих позициях не менее 1 медали. Тогда общее количество медалей не меньше $2 \cdot 2 + 22 \cdot 1 > 25$ — противоречие.

10.8. На периметре треугольника ABC выбраны точки D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2, равны.

Решение. Начнём со следующей полезной леммы.

Лемма. *Пусть точки F и E выбраны соответственно на сторонах AB и AC параллелограмма $ABKC$ так, что $BE = CF$. Тогда точка K равноудалена от прямых BE и CF (см. рис. 8).*

Доказательство. Поскольку $BK \parallel EC$ и $CK \parallel FB$, имеем $S_{KBE} = S_{KBC} = S_{KFC}$. Так как $BE = CF$, отсюда и следует, что расстояния от точки K до прямых BE и CF равны. □

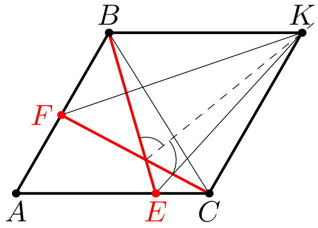

Рис. 8

Перейдём к решению. Пусть прямые из условия образуют треугольники $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ (точки обозначены как на рис. 9).

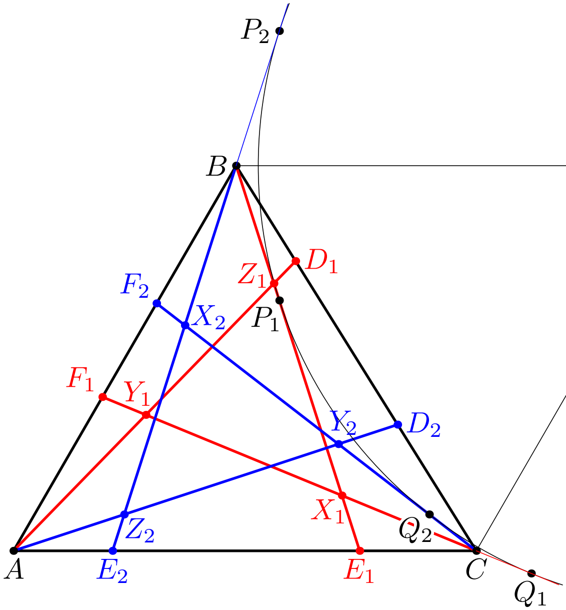

Рис. 9

Выберем точку K так, что $ABKC$ — параллелограмм; согласно лемме, точка K равноудалена от прямых BE_1, CF_1, BE_2 и CF_2; значит, существует окружность с центром K, касающаяся этих прямых в некоторых точках P_1, Q_1, P_2 и Q_2 соответственно. Тогда из равенств отрезков касательных вытекает, что

$$BX_1 - CX_1 = BP_1 + X_1P_1 - X_1Q_1 + CQ_1 = BP_2 + CQ_2 =$$
$$= BP_2 - X_2P_2 + X_2Q_2 + CQ_2 = CX_2 - BX_2.$$

Аналогично получаем, что $CY_1 - AY_1 = AY_2 - CY_2$ и $AZ_1 -$

$- BZ_1 = BZ_2 - AZ_2$. Складывая полученные три равенства, получаем требуемое равенство периметров.