

Первый тур

Задача 1. Блиц

(12 баллов)

В первом задании олимпиады вам предстоит решить три не связанных друг с другом коротких задачи.

а) (4 балла) В январе 2025 года китайская компания *DeepSeek* представила чат-бота на основе собственной большой языковой модели. По заявлению компании, новая технология обучения модели потребовала в несколько раз меньше вычислительных ресурсов, чем у конкурентов. Это вызвало ожидания снижения спроса на графические процессоры, и акции *NVIDIA* — крупнейшего их производителя — резко упали.

Рассмотрим фирму «Джевонс и Ко», использующую чипы *NVIDIA* для производства нейросетевых решений. Чтобы выпустить q единиц продукта, фирма использует x чипов, производственная функция $q = a\sqrt{x}$, где $a > 0$. Рыночная цена продукта составляет 2 д.е. за единицу, один чип стоит 1 д.е. Распространение новой технологии повышает параметр a с 2 до 5. Рассчитайте, как изменится количество покупаемых фирмой чипов, и содержательно объясните направление этого изменения.

б) (4 балла) Из города А в город Б идут две дороги: старая и новая, проезд по ним бесплатный. Если по старой дороге едут x машин в час, то время в пути между городами составляет $40 + \frac{x}{20}$ минут. Если по новой дороге едут y машин в час, то время в пути между городами составляет $30 + \frac{y}{30}$ минут. Суммарный поток по двум дорогам составляет 1000 машин в час. Каждый водитель выбирает дорогу так, чтобы минимизировать сумму денежной ценности своего времени в пути (минуту своего времени он ценит в 10 рублей) и платы за проезд (если она есть). Время в пути водитель узнаёт через навигатор, использующий текущие данные загруженности дорог; небольшой собственный вклад в загруженность дороги никто не учитывает. В министерстве транспорта заметили, что новая дорога слишком загружена, и решили сделать ее платной. Какую плату p за проезд по новой дороге следует установить, чтобы минимизировать суммарное время в пути всех водителей на двух дорогах?

в) (4 балла) В деревне есть 60 крестьянских хозяйств, каждое из которых располагает 1 единицей земли и 5 единицами рабочего времени. Жители деревни умеют выращивать пшеницу и лён, а также выпекать хлеб и изготавливать ткань. Производство единицы пшеницы требует 5 единиц рабочего времени и 1 единицы земли, а производство единицы льна требует только 1 единицы земли и не требует труда. Производство единицы хлеба требует 1 единицы пшеницы и 1 единицы рабочего времени. Производство единицы ткани требует единицы льна и 4 единиц рабочего времени. Опишите формулой вида $y = f(x)$ (где x — хлеб, y — ткань), как устроена КПП этой экономики.

Решение

а) Прибыль фирмы составляет

$$\pi(x) = pq - cx = 2a\sqrt{x} - x.$$

Это квадратичная функция (парабола ветвями вниз) от $\sqrt{x}$, следовательно, максимум достигается при $\sqrt{x} = a$, откуда $x = a^2$.

Таким образом, спрос «Джевонс и Ко» на чипы до появления DeepSeek (при $a = 2$) был равен 4, а после появления DeepSeek ($a = 5$) увеличился до 25.

Объяснение. В результате появления DeepSeek MRP_x (предельная отдача от использования чипов в денежном выражении) увеличилась: каждый следующий чип стал приносить больше выпуска, т.е. больше выручки при тех же ценах. Поскольку затраты на чипы не изменились, выгодно расширить производство, пока использование дополнительных чипов не перестанет окупаться.

Таким образом, несмотря на повышение эффективности использования ресурса, его потребление выросло. Этот эффект известен в экономике как *парадокс Джевонса* (например, технология, экономящая топливо, ведёт к повышению его суммарного расхода).

б) Пусть транспортные потоки распределились так: y машин в час едут по новой дороге, а $1000 - y$ машин в час — по старой дороге. Если плата за пользование новой дорогой составляет p , то суммарные денежно-временные затраты водителя, выраженные в рублях, составляют $400 + \frac{1000-y}{2}$, если он едет по старой дороге, и $300 + \frac{y}{3} + p$, если он едет по новой дороге. Водитель поедет по новой дороге, если $300 + \frac{y}{3} + p < 400 + \frac{1000-y}{2}$, т.е. если $y < 720 - \frac{6}{5}p$, и по старой, если $y > 720 - \frac{6}{5}p$.

Если $y < 720 - \frac{6}{5}p$, то водители, выезжающие на развилку между новой и старой дорогой, выберут новую дорогу, так что поток y по ней будет расти, пока не станет равен $720 - \frac{6}{5}p$, и до этого же значения он будет падать, если $y > 720 - \frac{6}{5}p$. Следовательно, спрос на пользование новой дорогой при стоимости проезда p составляет $y(p) = 720 - \frac{6}{5}p$.

При потоке y по новой дороге суммарные потери времени всех водителей составляют

$$(1000 - y) \left(40 + \frac{1000 - y}{20} \right) + y \left(30 + \frac{y}{30} \right) = \frac{5}{60}y^2 - 110y + 90000.$$

Это квадратичная функция (парабола ветвями вверх), достигающая минимума по y при $y = 660$.

Следует установить такую стоимость проезда p , чтобы достичь оптимальной загрузки новой дороги $y(p) = 720 - \frac{6}{5}p = 660$. Отсюда оптимальная стоимость проезда p составляет 50 рублей.

в) Пусть в деревне произведено x единиц хлеба. Это означает, что произведено не менее x единиц пшеницы и на производство хлеба затрачено не менее x единиц рабочего времени. На всю производственную цепочку, дающую на выходе хлеб, затрачено не менее x единиц земли и не менее $6x$ единиц рабочего времени. Следовательно, на производственную цепочку, дающую на выходе ткань, остаётся не более $60 - x$ единиц земли и не более $300 - 6x$ единиц рабочего времени. Из такого количества ресурсов можно произвести не более $60 - x$ единиц льна, т.е. не более $\min \left\{ 60 - x, 75 - \frac{3}{2}x \right\}$ единиц ткани. Этот объём производства ткани достигим, так как в предыдущих рас-

суждениях, где нужно, можно заменить «не менее» и «не более» на «ровно». Хлеба не может быть произведено больше 50 единиц, а ткани — больше 60 единиц.

Ответ: $y = \min \left\{ 60 - x, 75 - \frac{3}{2}x \right\}, 0 \leq x \leq 50$.

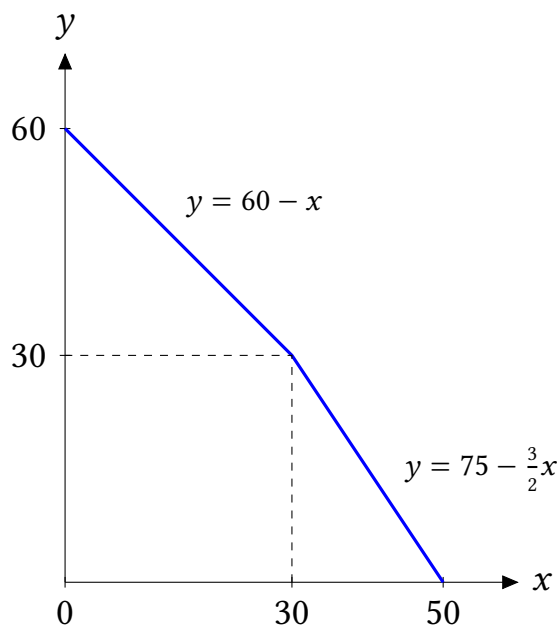


Схема проверки

а)

К1 Получен вывод, что использование чипов увеличилось с 4 до 25 → 2 балла

К1.1 Арифметическая ошибка → минус 1 балл

К1.2 Не подставлены значения a → минус 1 балл

К2 Дано содержательное объяснение → 2 балла

К2.1 Правильные объяснения (2 из 2 баллов) используют:

- * повышение MRP_x
- * повышение предельной производительности
- * снижение издержек на производство единицы продукции
- * повышение эффективности производства

К2.2 Неправильные объяснения (0 из 2 баллов):

- * упоминание MR без формулы ($MR = p = 2$ не изменилась)
- * стоимость акций упала (не объясняет эффекта)
- * увеличение объёма производства (без доп. пояснений)
- * при росте x выручка растёт (без доп. пояснений)

б)

К3 Получен спрос $y(p) = 720 - \frac{6}{5}p$ или эквивалентное выражение → 1 балл

К4 Правильно выписана целевая функция (суммарные потери времени) → 1 балл

К5 Найдено оптимальное распределение потоков (или дошли до К6 без этого) → 1 балл

К6 Найдена оптимальная плата за проезд $p = 50$ → 1 балл

К7 Арифметические ошибки, не влияющие на качественные выводы → минус 1 балл

- К8 Арифметические ошибки, влияющие на качественные выводы (например, $p = 0$ или $p < 0$) → минус 2 балла
- К9 Использование числа 999 → минус 1 балл (из 1000 машин/час вычитается одна машина)
- в)
- К10 Получена формула для куска КПВ $y = 60 - x \rightarrow 1$ балл
- К11 Получена формула для куска КПВ $y = 75 - \frac{3}{2}x \rightarrow 1$ балл
- К12 Правильно найдена взаимосвязь кусков → 2 балла
- К12.1 Есть рисунок, нет формулы $y = f(x) \rightarrow$ минус 1 балл
- К12.2 Найдена точка излома, но взята верхняя огибающая вместо нижней → 0 из 2 баллов
- К12.3 Ошибка в нахождении ключевых точек → минус 1 балл
- К12.4 Нет указания, что $x \geq 0$ и $x \leq 50 \rightarrow$ без снижения
- К13 Арифметические ошибки в К10, К11 (в том числе, если один кусок оказался ниже другого и это было проверено) → минус 1 балл

Задача 2. Тарифы президента

(12 баллов)

Страна А имеет дефицит торгового баланса с остальным миром, при этом с разными странами величина этого дефицита разная, а с некоторыми странами торговый баланс положительный. Президенту страны А не нравятся торговые дефициты, и он хочет свести их к 0 с теми странами, с которыми они сейчас есть. Экономические советники предложили ему поднять импортную пошлину (тариф) на товары из каждой страны i , с которой сейчас есть торговый дефицит, на следующее количество процентных пунктов:

$$\Delta\tau_i = \frac{x_i - m_i}{\varepsilon \cdot \varphi \cdot m_i}.$$

Здесь ε — эластичность спроса на импорт в стране по цене импорта, φ — полуэластичность¹ цены импорта по ставке тарифа, x_i и m_i — текущие значения экспорта и импорта со страной i . Считайте, что «цена импорта» — это некоторая средняя цена, измеряемая индексом.

а) (4 балла) Покажите, что формула, предложенная советниками, имеет смысл, то есть введение пошлин в соответствии с ней может привести к обнулению торгового дефицита. Укажите необходимые предпосылки, приняв которые, можно прийти к этой формуле.

б) (3 балла) Используя эту формулу, президент намерен увеличить тарифы на величины до 50 процентных пунктов, рассчитывая, что дефицит торгового баланса сведется к нулю. Объясните, почему в реальности при таком увеличении тарифов обнуления торгового дефицита, скорее всего, не случится.

в) (1 балл) Объясните, как страна может иметь торговый дефицит с остальным миром на протяжении долгого времени — в частности, откуда она будет брать иностранную валюту на закупку импортных товаров?

г) (4 балла) Ведущие экономисты страны А выступили с заявлением, что предлагаемое повышение тарифов, хоть и является в теории протекционистской мерой, на деле может сделать отечественным производителям (особенно сложных товаров) хуже. Приведите два аргумента, почему это может оказаться так.

Решение

а) Торговый баланс между страной А и страной i равен $TB_i = x_i - m_i$. Задача — найти такое изменение тарифа $\Delta\tau_i$, которое обнуляет торговый баланс: $x_i = m'_i$, где m'_i — импорт после введения тарифа.

- эластичность импорта по цене — $\varepsilon = \frac{\% \Delta m_i}{\% \Delta p}$;
- полуэластичность цены по тарифу — $\varphi = \frac{\% \Delta p}{\Delta \tau_i}$.

Предпосылки:

- валютный курс и экспорт не меняются при вводе тарифа;

¹Полуэластичностью у по x здесь называется соотношение процентного изменения y и абсолютного изменения x . В данном случае φ отвечает на вопрос, на сколько процентов изменится цена импорта при изменении ставки тарифа на один процентный пункт.

- изменения тарифов малы ($<10\%$), и значит может быть использована формула точечной эластичности.

Тогда:

$$\frac{m'_i - m_i}{m_i} = \frac{\Delta m_i}{m_i} = \varepsilon \cdot \frac{\Delta p}{p} = \varepsilon \cdot \varphi \cdot \Delta \tau_i$$

или:

$$m'_i = m_i \cdot (1 + \varepsilon \cdot \varphi \cdot \Delta \tau_i)$$

Требуемое условие: $m'_i = x_i \Rightarrow x_i = m_i(1 + \varepsilon \cdot \varphi \cdot \Delta \tau_i)$. Решаем относительно $\Delta \tau_i$:

$$\Delta \tau_i = \frac{x_i - m_i}{\varepsilon \cdot \varphi \cdot m_i}$$

что и требовалось показать.

б) В реальности формула не сработает по следующим причинам:

- экспорт x_i может также измениться, если страна i введет ответные меры, изменится валютный курс или из-за других причин;
- если тарифы $>10\%$, то формула, использующая (точечную) эластичность, может дать очень неточный результат.

В результате даже при большом увеличении тарифов импорт может не сократиться настолько, чтобы сбалансировать торговлю.

в) Если страна систематически импортирует больше, чем экспортирует, это означает, что она финансирует дефицит счета текущих операций за счет:

- притока капитала (например, иностранные инвестиции, займы, покупка активов);
- продажи золотовалютных резервов.

Таким образом, торговый дефицит компенсируется профицитом по финансовому счету платежного баланса.

г) Несмотря на протекционистский характер, повышение тарифов может навредить отечественным производителям, потому что:

- многие производственные цепочки используют импортные компоненты, сырье или оборудование. Повышение тарифов увеличит издержки производства и снизит конкурентоспособность продукции на внутреннем и внешнем рынках;
- ввод тарифа снизит спрос на импортную продукцию и вместе с ней спрос на иностранную валюту. Отечественная валюта подорожает, что снизит конкурентоспособность отечественных производителей.

Схема проверки

а) 4 балла, из них:

- +2 Вывод формулы. Если приведены только правильные математические формулировки эластичности и полуэластичности, а затем ошибка, то ставился 1 балл. Если ошибки и в формулировках, то 0 баллов.
- +2 По одному баллу за формулировку двух предпосылок: малые изменения и стабильность других параметров (экспорт, валютный курс). Не обязательно писать пример и пояснять, тут можно просто сформулировать.

б) 3 балла, из них:

- +1 Сказано про большое изменение и объяснено, что формула для больших изменений может не работать.
- +2 Сформулирована причина и экономический механизм нарушения стабильности (ответные меры, изменение курса и пр.).

в) 1 балл за любую из причин (займы, продажа резервов, иностранные инвестиции) или упоминание профицита по финансовому счету платежного баланса.

г) 4 балла, из них по 2 балла за каждый пример при условии объяснения экономического механизма. В случае недостатка обоснования за правильный пример 1 балл. Примеры должны быть различными и не быть про одно и то же (например, один пример про рост стоимости сырья, а другой про рост стоимости оборудования)

Задача 3. Находим цены одних активов через цены других (12 баллов)

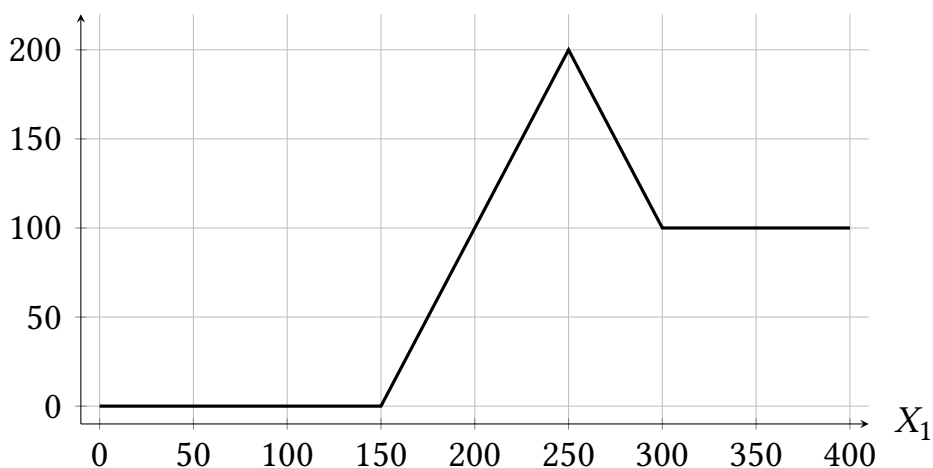
На фондовом рынке торгуется акция компании X, которая в ближайшие несколько лет не будет платить дивиденды. Цена акции в текущий момент равна $X_0 = 220$. Кроме того, торгуются безрисковые, бескупонные облигации со сроком погашения через год и номиналом 22. Доходность по ним равна 10 % годовых.

Цену акции через 1 год обозначим за X_1 (в текущий момент она неизвестна, и ваши ответы не могут от нее зависеть). Известно, что на рынке отсутствуют возможности для арбитража, откуда следует, что портфели активов, приносящие одинаковый поток доходов через год при каждом X_1 , сегодня должны стоить одинаково. Для решения задачи записывайте, как будущий доход от того или иного контракта (возможно, отрицательный) зависит от X_1 . Все цены контрактов, которые нужно найти в задаче, — это цены в текущий момент.

а) (4 балла) Если инвестор А купит у инвестора В финансовый контракт 1, то он будет *обязан* купить у инвестора В одну акцию компании X через 1 год по цене 220. Найдите цену контракта 1.

б) (4 балла) Контракт 2 дает своему владельцу *право* купить одну акцию компании X через 1 период по цене 220. Контракт 3 дает своему владельцу право продать одну акцию компании X через 1 год по цене 220. Найдите цену контракта 3, если цена контракта 2 в текущий момент равна 30. Подсказка: вам может помочь результат п. а).

в) (4 балла) Теперь рассмотрим экзотический контракт 4, доход от которого зависит от будущей цены акции X_1 так, как показано на графике:



Кроме того, известны цены других контрактов, которые дают право на покупку или продажу 1 акции компании X через год по определенным ценам:

Контракт	Дает право на:	По цене:	Цена контракта:
5	покупку	150	80
6	покупку	250	10
7	продажу	250	190/11
8	покупку	300	1

Найдите цену контракта 4.

Решение

Будем обозначать цену контракта i за p_i .

а) Контракт 1 принесет инвестору случайную величину $X_1 - 220$ через год. Рассмотрим два портфеля.

1. Портфель 1 состоит из 1 акции компании X. Поток доходов от этого портфеля через год равен X_1 .
2. Портфель 2 состоит из контракта 1 и 10 облигаций. Поток доходов от этого портфеля равен $(X_1 - 220) + 10 \cdot 22 = X_1$.

Таким образом, потоки доходов от этих двух портфелей совпадают. Значит, сегодня портфели должны стоить одинаково.

Стоимость портфеля 1 сегодня равна 220. Стоимость портфеля 2 равна $p_1 + 10 \cdot 22/(1+r) = p_1 + 200$. Значит, $220 = p_1 + 200$, откуда $p_1 = 20$.

б) Контракт 2 принесет через год $\max(X_1 - 220, 0)$. Контракт 3 принесет $\max(220 - X_1, 0)$. Снова рассмотрим два портфеля.

3. Портфель 3 состоит из контракта 2. Поток доходов от этого портфеля равен $\max(X_1 - 220, 0)$.
4. Портфель 4 состоит из контракта 1 и контракта 3. Поток доходов от этого портфеля равен $(X_1 - 220) + \max(220 - X_1, 0) = \max(X_1 - 220, 0)$.

Таким образом, потоки доходов от этих двух портфелей совпадают. Значит, сегодня портфели должны стоить одинаково.

Стоимость портфеля 3 сегодня равна 30. Стоимость портфеля 2 равна $p_1 + p_3 = 20 + p_3$. Отсюда $p_3 = 10$.

в) Доход контракта 4 (из графика):

$$f_1(X_1) = \begin{cases} 0, & X_1 \leq 150, \\ 2(X_1 - 150), & 150 < X_1 \leq 250, \\ 2(350 - X_1), & 250 < X_1 \leq 300, \\ 100, & 300 > X_1. \end{cases}$$

Найдем, какой набор контрактов 5, 6, 7, 8 принесет такой же доход через год, что и контракт 4. Пусть купили a контрактов 5, b контрактов 6, c контрактов 7, d контрактов 8. Найдем такие a, b, c, d , при которых при любых значениях X_1 доход от портфеля из контрактов 5, 6, 7, 8 будет равен доходам, приведенным на графике в условии задачи.

Запишем доходы от контрактов 5, 6, 7, 8:

Доход от контракта 5 $\max(X_1 - 150, 0)$, доход от контракта 6 $\max(X_1 - 250, 0)$, доход от контракта 7 $\max(250 - X_1, 0)$, доход от контракта 8 $\max(X_1 - 300, 0)$.

$$f_2(X_1) = \begin{cases} c(250 - X_1), & X_1 \leq 150, \\ a(X_1 - 150) + c(250 - X_1), & 150 < X_1 \leq 250, \\ a(X_1 - 150) + b(X_1 - 250), & 250 < X_1 \leq 300, \\ a(X_1 - 150) + b(X_1 - 250) + d(X_1 - 300), & 300 > X_1. \end{cases}$$

Так как при всех X_1 потоки через год должны быть равны ($f_1(X_1) = f_2(X_1)$), получаем:

$$\begin{cases} c(250 - X_1) = 0, & X_1 \leq 150, \\ a(X_1 - 150) + c(250 - X_1) = 2(X_1 - 150), & 150 < X_1 \leq 250, \\ a(X_1 - 150) + b(X_1 - 250) = 2(350 - X_1), & 250 < X_1 \leq 300, \\ a(X_1 - 150) + b(X_1 - 250) + d(X_1 - 300) = 100, & 300 > X_1. \end{cases}$$

Отсюда $a = 2$, $b = -4$, $c = 0$, $d = 2$. При отсутствии арбитража цены таких активов должны быть равны. А значит, цена контракта 4 равна $80a + 10b + 190c/11 + d = 2 \cdot 80 - 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 122$.

Данное решение использует отрицательное количество одного из контрактов (короткие продажи), но можно обойтись и без них. Действительно, портфель, состоящий из контракта 4 и четырех контрактов 6, приносит всегда столько же, сколько портфель, состоящий из двух единиц контракта 5 и двух единиц контракта 8. Отсюда можно найти p_4 .

Схема проверки

Если все решение участника основывалось на предпосылке о том, что цена по контракту выплачивается через год, баллы не снижались (при условии того, что все остальное верно).

Если решение верное, но формулы, требуемые в критериях, не были выведены явно, баллы за соответствующие критерии ставились.

а) Всего за пункт — 4 балла, из них:

К1. Определение будущего дохода по контракту 1: $(X_1 - 220)$ — 1 балл.

К2. Составление двух портфелей, приносящих один и тот же доход в будущем при каждом X_1 — 2 балла.

- Если в работе находилось конкретное X_1 , ставилось 0 баллов.
- Если в работе утверждалось, что NPV контракта должна быть равна 0 (без учета неопределенности X_1), ставилось 0 баллов.
- Если приравнивались NPV контракта 1 и NPV акции без явного уточнения что через год у обладателя контракта на руках будет одна акция, ставился 1 балл. При наличии такого уточнения ставилось 2 балла.
- Если приравнивались матожидания доходностей или NPV по контракту и по акции, ставилось 2 балла.
- За идею о репликации контракта 1 с помощью акций и облигаций при отсутствии верной процедуры репликации ставился 1 балл. При успешной репликации ставилось 2 балла.

К3. Нахождение p_1 из верных соображений, соответствующих критерию 2, — 1 балл.

При нахождении верного p_1 из других соображений, балл не ставился.

б) Всего за пункт — 4 балла, из них:

К4. Определение дохода по контракту 2 $\max\{X_1 - 220, 0\}$ — 1 балл.

К5. Определение дохода по контракту 3 $\max\{220 - X_1, 0\}$ — 1 балл.

- К6. Составление двух портфелей, приносящих один и тот же доход в будущем при каждом X_1 — 1 балл.
- Если в работе находилось конкретное X_1 , ставилось 0 баллов.
 - Если приравнивались NPV контрактов 2 и 3 отдельно для случаев $X_1 > 220$ и $X_1 < 220$, ставилось 0 баллов.
 - Если приравнивались матожидания доходностей или NPV по контракту и по акции, ставился 1 балл.
- К7. Нахождение p_3 — 1 балл.
- в) Всего за пункт — 4 балла, из них:
- К8. Идея репликации одного контракта другими — 1 балл
- К9. Определение того, как доход по контракту 4 выражается через доходы контрактов 5, 6 и 8 — 2 балла.
- К10. Нахождение p_3 — 1 балл.

Задача 4. О пользе конкуренции (12 баллов)

Как конкуренция на рынке влияет на стимулы фирм к инновациям? Данный вопрос является одним из классических в экономической науке. В этой задаче мы рассмотрим модель, проливающую на него свет.

На рынке пряжи для вязания действует фирма-монополист «Анна». Обратная функция спроса задана уравнением $p = 1 - q$, предельные издержки производства постоянны и изначально равны 0,5. «Анна» может снизить предельные издержки производства, осуществляя инновации. Чтобы снизить предельные издержки на $I \leq 0,5$, нужно понести дополнительные издержки в размере $0,5kI^2$ на инновационную деятельность, где $k > 1$. Других издержек, кроме издержек на производство и инновации, фирма не несет.

а) (2 балла) Выведите общие издержки «Анны» на производство и инновации как функцию только от q . Подсказка: проминимизируйте издержки «Анны» по I при произвольно выбранном q .

б) (2 балла) Найдите оптимальный объем выпуска q^* и инноваций I^* «Анны» в зависимости от k .

в) (6 баллов) Представим, что до того, как «Анна» осуществила инновации, на горизонте маячила другая фирма — «Белла», потенциальный конкурент «Анны». Ее предельные издержки постоянны и равны 0,5. Снизить их она не может. Взаимодействие фирм устроено следующим образом.

1. «Анна» выбирает объем выпуска q_A и инноваций I .

2. Пронаблюдав выбор «Анны», «Белла» решает, зайти на рынок, или нет. Если она входит, то затем выбирает объем $q_B > 0$, а если не входит, то $q_B = 0$. Издержки входа на рынок равны 0.

3. На рынке устанавливается цена по правилу $p = 1 - q_A - q_B$, фирмы продают произведенную продукцию и получают соответствующую прибыль, взаимодействие заканчивается.

Определите значения q_A^* , I^* и q_B^* , которые выберут фирмы в зависимости от k .

г) (1 балл) В каком из пунктов — б) или в) — «Анна» больше вкладывается в инновации?

д) (1 балл) Вы — исследователь некоторого рынка, и видите что на нем действует лишь одна фирма. Всегда ли верно, что выпуск этой фирмы равен ее монопольному выпуску? Почему? Ваш ответ должен быть основан на контексте задачи.

Решение

а) Издержки «Анны» в зависимости от q и I имеют следующий вид:

$$(0,5 - I)q + 0,5kI^2 = 0,5q + (0,5kI^2 - qI)$$

Это парабола ветвями вверх относительно I , минимум лежит в вершине, если она доступна, или в точке $I = 0,5$ в противном случае.

$$I = \begin{cases} \frac{q}{k}, & \frac{q}{k} \leq 0,5 \\ 0,5, & \frac{q}{k} \geq 0,5 \end{cases}$$

Подставим найденную зависимость в исходную функцию издержек:

$$TC = \begin{cases} 0,5q - \frac{1}{2k}q^2, & \frac{q}{k} \leq 0,5 \\ 0,125k, & \frac{q}{k} \geq 0,5 \end{cases}$$

б) Заметим, что при фиксированном q для максимизации прибыли «Анна» должна выбирать такой уровень инноваций I , который минимизирует ее издержки. Поэтому, с учетом решения предыдущего пункта, мы можем записать функцию прибыли «Анны» только от q :

$$\pi = pq - TC = \begin{cases} (1-q)q - 0,5q + \frac{1}{2k}q^2, & \frac{q}{k} \leq 0,5 \\ (1-q)q - 0,125k, & \frac{q}{k} \geq 0,5 \end{cases} \Rightarrow \pi = \begin{cases} 0,5q - \left(1 - \frac{1}{2k}\right)q^2, & q \leq 0,5k \\ q - q^2 - 0,125k, & q \geq 0,5k \end{cases}$$

На обоих участках функция прибыли является квадратичной параболой с ветвями вниз. Оптимум на первом участке достигается в вершине соответствующей параболы: $q = \frac{k}{2(2k-1)}$. Вершина 0,5 на втором участке недоступна в силу $k > 1$, а потому оптимум достигается на границе: $q = 0,5k$. Но поскольку функция прибыли непрерывна, и граница $q = 0,5k$ является общей для обоих участков, а на первом участке мы выбираем другую точку, она не доставляет глобальный максимум прибыли. Стало быть, $q^* = \frac{k}{2(2k-1)}$ и $I^* = \frac{q^*}{k} = \frac{1}{2(2k-1)}$.

в) Решим игру между «Анной» и «Беллой» с конца. Воспринимая q_A как заданную величину, «Белла» решает следующую задачу:

$$\pi_B = pq_B - TC_B = (1 - q_A - q_B)q_B - 0,5q_B = (0,5 - q_A)q_B - q_B^2 \rightarrow \max$$

Эта функция — парабола ветвями вниз относительно q_B при фиксированном q_A , а потому ее максимум лежит либо в вершине, если она доступна, либо в нуле:

$$q_B = \begin{cases} \frac{0,5 - q_A}{2}, & q_A \leq 0,5 \\ 0, & q_A \geq 0,5 \end{cases}$$

Зная это и пользуясь тем фактом, что $k > 1$, можем записать функцию прибыли «Анны».

$$\pi_A = pq_A - TC_A = (1 - q_A - q_B)q_A - TC_A \rightarrow \max$$

$$\pi_A = \begin{cases} \left(1 - q_A - \frac{0,5 - q_A}{2}\right)q_A - 0,5q_A + \frac{1}{2k}q_A^2, & q_A \leq 0,5 \\ (1 - q_A)q_A - 0,5q_A + \frac{1}{2k}q_A^2, & 0,5 \leq q_A \leq 0,5k \rightarrow \max \\ (1 - q_A)q_A - 0,125k, & q_A \geq 0,5k \end{cases}$$

$$\pi_A = \begin{cases} 0,25q_A - \left(0,5 - \frac{1}{2k}\right)q_A^2, & q_A \leq 0,5 \\ 0,5q_A - \left(1 - \frac{1}{2k}\right)q_A^2, & 0,5 \leq q_A \leq 0,5k \rightarrow \max \\ q_A - q_A^2 - 0,125k, & q_A \geq 0,5k \end{cases}$$

Эта функция — прибыль «Анны» как фирмы-монополиста с поправкой на появление нового участка при $q_A \leq 0,5$. Пользуясь рассуждениями из пункта а) можно откинуть анализ третьего участка — оптимум будет достигаться либо на первом, либо на втором, на каждом из которых функция ведет себя как парабола ветвями вниз.

В зависимости от k оптимум на первом участке достигается в точке

$$q_A = \begin{cases} \frac{k}{4(k-1)}, & \frac{k}{4(k-1)} \leq 0,5 \\ 0,5, & \frac{k}{4(k-1)} \geq 0,5 \end{cases} \Rightarrow q_A = \begin{cases} 0,5, & k \leq 2 \\ \frac{k}{4(k-1)}, & k \geq 2 \end{cases}$$

На втором же участке

$$q_A = \begin{cases} 0,5, & \frac{k}{2(2k-1)} \leq 0,5 \\ \frac{k}{2(2k-1)}, & \frac{k}{2(2k-1)} \geq 0,5 \end{cases} \Rightarrow q_A = \begin{cases} \frac{k}{2(2k-1)}, & k \leq 1 \\ 0,5, & k \geq 1 \end{cases}$$

Однако по условию $k > 1$, поэтому оптимум на втором участке всегда лежит на границе. Значит, оптимум всей функции совпадает с оптимумом на первом участке, поскольку если оптимум первого участка лежит на границе, оба оптимума совпадают, а если точка оптимума на первом участке является внутренней, то значение функции прибыли в ней больше, чем на границе.

$$q_A^* = \begin{cases} 0,5, & k \leq 2 \\ \frac{k}{4(k-1)}, & k \geq 2 \end{cases}$$

$$I^* = \frac{q_A^*}{k} = \begin{cases} \frac{1}{2k}, & k \leq 2 \\ \frac{1}{4(k-1)}, & k \geq 2 \end{cases}$$

$$q_B^* = \frac{0,5 - q_A^*}{2} = \begin{cases} 0, & k \leq 2 \\ \frac{0,5 - \frac{k}{4(k-1)}}{2}, & k \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k \leq 2 \\ \frac{k-2}{8(k-1)}, & k \geq 2 \end{cases}$$

г) Заметим, что при $k > 1$ верно, что $2(2k-1) > 2k$ и $2(2k-1) > 4(k-1)$, поэтому объем инноваций в случае монополизации рынка (пункт б)) всегда меньше, чем при наличии конкуренции (пункт в)):

$$I_{\text{Монополия}}^* = \frac{1}{2(2k-1)} < \begin{cases} \frac{1}{2k}, & k \leq 2 \\ \frac{1}{4(k-1)}, & k \geq 2 \end{cases} = I_{\text{конкуренция}}^*$$

д) Как видно из решения пункта в), при малых предельных издержках инноваций ($1 < k \leq 2$) «Анна» полностью вытесняет «Беллу» ($q_B = 0$), выбирая выпуск больше монопольного:

$$q_{\text{монополия}}^* = \frac{k}{2(2k-1)} < 0,5 = q_{\text{конкуренция}}^*$$

Стало быть, если только у одной из фирм выпуск положителен, то он может не быть равен ее монопольному выпуску, коль скоро он выбран «с запасом» из соображений вытеснения конкурентов с рынка.

Примечание 1: Нобелевский лауреат 1972 года по экономике Кеннет Эрроу впервые описал эффект увеличения объема инноваций при конкуренции в сравнении с монополией, ныне известный как «эффект возмещения Эрроу». В данной задаче была произведена попытка в рамках простой модели продемонстрировать этот эффект.

Примечание 2: Описанную в задаче ситуацию можно интерпретировать следующим образом:

1) при малых значениях предельных издержек инноваций лидер может вытеснить последователя с рынка, вложив в инновационную деятельность небольшое количество денег;

2) с ростом k стимулы к более дорогим инновациям уменьшаются, что выливается в снижение q_A^* и I^* ;

3) после некоторого порога для k ($k = 2$) лидеру становится непозволительно дорого вытеснять последователя с рынка, поэтому объем инноваций, а за ним и объем произведенной лидером продукции снижается настолько, что последователь выходит на рынок и производит тем больше, чем дороже для лидера процесс инноваций.

Схема проверки

За каждую арифметическую ошибку снимается от 1 балла в зависимости от ее серьезности и влияния на дальнейшее решение. За нерассмотрение достаточных условий оптимизации баллы не снимаются. Баллы в пунктах б) и в) при нерассмотрении участков функций при $q > 0,5k$ не снимаются.

а) 2 балла за пункт:

K1 Найдена зависимость $TC = 0,5q - \frac{1}{2k}q^2$ при $q \leq 0,5k$ - 1 балл.

K2 Найдена зависимость $TC = 0,125k$ при $q > 0,5k$ - 1 балл.

б) 2 балла за пункт:

K3 Выписана функция прибыли «Анны» $\pi_A = 0,5q - \left(1 - \frac{1}{2k}\right)q^2$ - 1 балл.

K4 Найдены значения $q^* = \frac{k}{2(2k-1)}$ и $I^* = \frac{1}{2(2k-1)}$ - 1 балл.

в) 6 баллов за пункт:

K5 Найдено оптимальное значение $q_B = \frac{0,5-q_A}{2}$ при фиксированном q_A - 1 балл.

K6 Выписана функция прибыли «Анны» только от q_A : $\pi_A = 0,25q_A - \left(0,5 - \frac{1}{2k}\right)q_A^2$ - 1 балл.

K7 Найдена вершина параболы $q_A^* = \frac{k}{4(k-1)}$ - 1 балл.

K8 Продemonстрировано, что если точка вершины параболы больше 0,5, то $q_A^* = \frac{1}{2}$ - 1 балл.

K9 Найдены значения $I^* = \frac{1}{2k}$ и $q_B^* = 0$ при $k \leq 2$ - 1 балл.

K10 Найдены значения $I^* = \frac{1}{4(k-1)}$ и $q_B^* = \frac{k-2}{8(k-1)}$ при $k > 2$ - 1 балл.

г) 1 балл за пункт:

K11 Произведено сравнение корректных значений инноваций «Анны» в случае монополии и конкуренции при различных k и указано, что в пункте в) «Анна» больше вкладывается в инновации - 1 балл.

д) 1 балл за пункт:

K12 Приведено обоснование отличия выпуска от монопольного, связанное со стимулами к вытеснению конкурентов - 1 балл.