

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 4 КЛАСС
ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. Установите соответствие таким образом, чтобы были выполнены все четыре равенства.

$$\begin{array}{r} \boxed{A} + \boxed{B} = 6 \\ - \quad \quad : \\ \boxed{C} \times \boxed{D} = 3 \\ = \quad \quad = \\ 1 \quad \quad 2 \end{array}$$

Каждой из букв А, В, С, D поставьте в соответствие числа 1, 2, 3, 4. Каждое число можно использовать один раз.

Ответ:

A	B	C	D
4	2	3	1

Решение. Поскольку $C \cdot D = 3$, то есть два случая.

- $C = 1, D = 3$. Также известно, что $B : D = 2$, поэтому $B = 6$, но такого числа у нас нет. Значит, такой случай невозможен.
- $C = 3, D = 1$. Также известно, что $B : D = 2$, поэтому $B = 2$. Методом исключения понимаем, что $A = 4$. Легко проверить, что полученный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

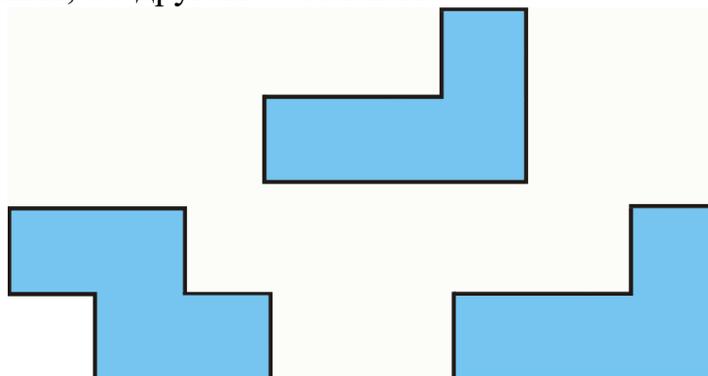
2. По зову дядьки Черномора явились 33 богатыря: каждый либо пешком, либо на коне. Каждый приехавший на коне богатырь взял с собой копьё. Пешком пришли 11 богатырей, а копьё не взяли 3 богатыря. На сколько число пеших богатырей с копьём меньше, чем богатырей, приехавших на коне?

Ответ: 14.

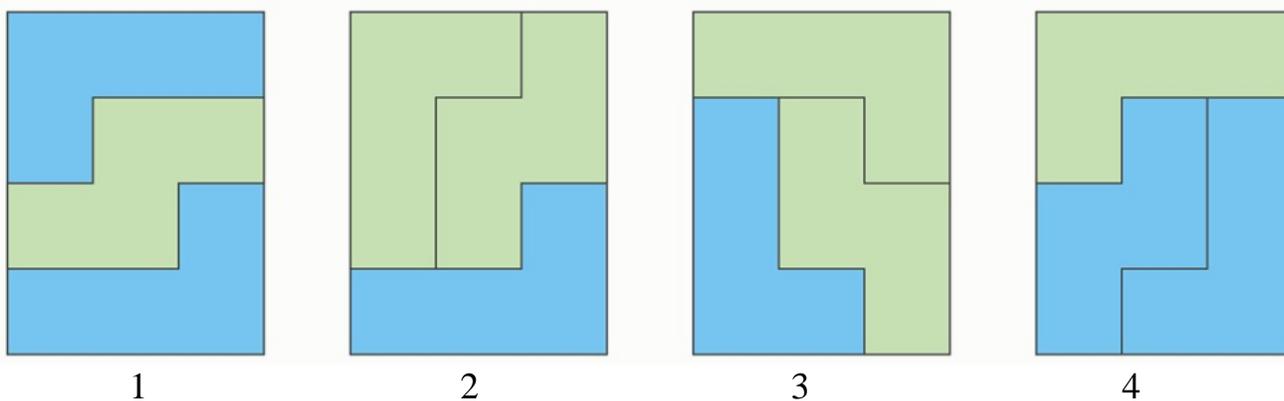
Решение. Всего $33 - 11 = 22$ богатыря приехали на коне. По условию задачи мы знаем, что все они взяли с собой копьё. Отсюда следует, что 3 богатыря, которые пришли без копьё, явились пешком. И тогда пеших богатырей с копьём было $11 - 3 = 8$.

Теперь нетрудно вычислить ответ: $22 - 8 = 14$ — именно на столько пеших богатырей с копьём меньше, чем богатырей, приехавших на коне.

3. Полина вырезала из бумаги три фигурки, изображённые ниже. Каждая из них с одной стороны синяя, а с другой — зелёная.

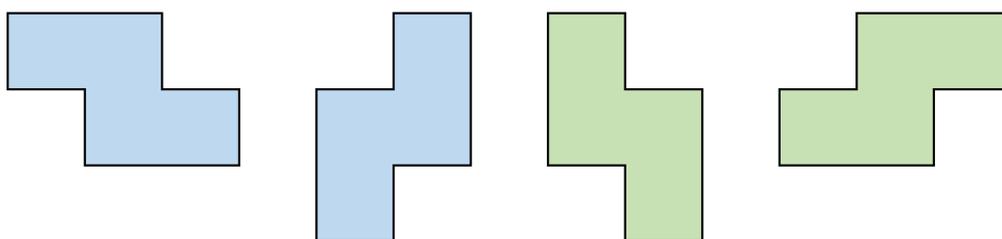


Выберите все прямоугольники, которые могла сложить Полина, используя эти фигурки:

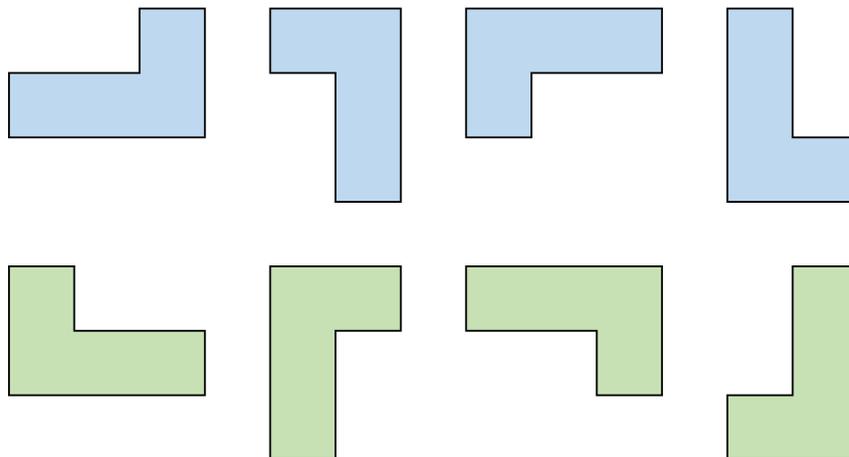


Ответ: 1, 3.

Решение. У Полины есть два вида фигурок: один «зигзаг» и две «буквы Г». Если поворачивать и переворачивать «зигзаг», то может получиться один из четырёх вариантов:



Если поворачивать и переворачивать «букву Г», то может получиться один из восьми вариантов:



Глядя на все эти возможные фигурки, нетрудно понять, что Полина сможет сложить только первый и третий прямоугольники.

4. Алёша, Вася и Саша участвовали в школьном соревновании по бегу. До начала соревнования было сделано четыре прогноза:

- выиграет Вася или Алёша;
- если Саша займёт второе место, то Вася займёт третье место;
- если Саша займёт третье место, то Алёша займёт второе место;
- второе место займёт Вася или Саша.

Оказалось, что все прогнозы сбылись. Кто какое место занял?

Ответ: Алёша занял первое место, Вася занял третье место, Саша занял второе место.

Решение. Из первого прогноза следует, что Саша занял либо второе место, либо третье.

Первый случай. Саша занял второе место.

Тогда из второго прогноза следует, что третье место занял Вася. Тогда методом исключения первое место занял Алёша. Видно, что этот случай удовлетворяет всем условиям задачи.

Второй случай. Саша занял третье место.

Тогда из третьего прогноза следует, что второе место занял Алёша. Но тогда последний прогноз не сбылся. Получаем противоречие, поэтому такой случай невозможен.

Таким образом, возможен лишь один случай: Алёша занял первое место, Саша — второе, Вася — третье.

5. Коля выпивает 3 литра газировки за 20 минут, а Саша выпивает 4 литра газировки за 40 минут. За сколько минут Коля и Саша смогут выпить 1 литр газировки, действуя сообща?

Ответ: 4.

Решение. Раз Саша выпивает 4 литра газировки за 40 минут, то за 20 минут он выпьет 2 литра газировки. Таким образом, действуя сообща, за 20 минут ребята выпьют $3 + 2 = 5$ литров газировки. Тогда 1 литр они выпьют за $20 : 5 = 4$ минуты.

6. В течение учебного полугодия на уроках математики учеников 4 «А» класса вызывали к доске суммарно 84 раза. Все мальчики выходили к доске одинаковое число раз, и все девочки — одинаковое число раз, но на 1 меньше, чем мальчики. Какое наименьшее количество детей могло учиться в этом классе, если известно, что мальчики выходили к доске суммарно столько же раз, сколько и девочки?

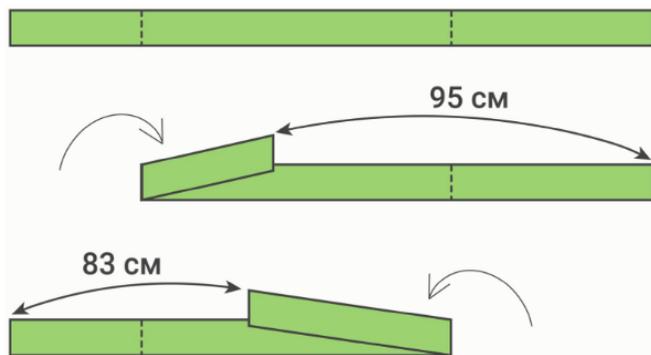
Ответ: 13.

Решение. Заметим, что все мальчики суммарно выходили к доске $84 : 2 = 42$ раза — столько же раз и все девочки суммарно выходили к доске. Чтобы понять, сколько раз мог выходить один мальчик и одна девочка, выпишем все делители числа 42 в порядке возрастания: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Нам нужно выбрать два из них так, чтобы они отличались ровно на 1 (меньшее число будет количеством выходов к доске девочки, а большее число — мальчика). Есть три случая.

- Каждая девочка вышла к доске 1 раз, а каждый мальчик — 2 раза. Тогда в классе всего $42 : 1 = 42$ девочки и $42 : 2 = 21$ мальчик — суммарно 63 ученика.
- Каждая девочка вышла к доске 2 раза, а каждый мальчик — 3 раза. Тогда в классе всего $42 : 2 = 21$ девочка и $42 : 3 = 14$ мальчиков — суммарно 35 учеников.
- Каждая девочка вышла к доске 6 раз, а каждый мальчик — 7 раз. Тогда в классе всего $42 : 6 = 7$ девочек и $42 : 7 = 6$ мальчиков — суммарно 13 учеников.

Наименьшее из этих чисел — 13.

7. На длинной полоске ткани сделали две отметки. Если согнуть полоску относительно первой отметки, то расстояние между её концами составит 95 сантиметров; если согнуть полоску ткани относительно второй отметки, то расстояние между её концами составит 83 сантиметра.



Определите расстояние между отметками. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 89.

Решение. Пусть расстояние от левого края полоски до первой отметки равняется A сантиметров, расстояние от первой отметки до второй — B сантиметров, расстояние от второй отметки до правого края — C сантиметров.

Рассмотрев сгибание полоски относительно первой отметки, получаем, что

$$95 = B + C - A.$$

Рассмотрев сгибание полоски относительно второй отметки, получаем, что

$$83 = A + B - C.$$

Сложив оба этих выражения, получаем, что

$$83 + 95 = (B + C - A) + (A + B - C) = 2 \cdot B, 2 \cdot B = 178,$$

$$B = 89.$$

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собралась компания из 33 островитян, среди которых есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. У каждого из них спросили, сколько всего лжецов в этой компании.

- 3 человека сказали: «Трое»;
- 5 человек сказали: «Меньше пяти»;
- 8 человек сказали: «Меньше восьми»;
- 17 человек сказали: «Меньше семнадцати».

Сколько всего лжецов может быть в этой компании? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 16.

Решение. Ясно, что каждую из фраз говорили либо только рыцари, либо только лжецы.

По условию задачи среди присутствующих есть хотя бы один рыцарь. Давайте рассмотрим случаи того, что он мог сказать.

Предположим, что рыцарь сказал: «Трое». Тогда лжецов всего трое, а это значит, что все островитяне сказали правду (так как $3 < 5$, $3 < 8$, $3 < 17$), и все они — рыцари. Но это противоречит тому, что среди них есть хотя бы один лжец. Значит, первые трое из нашей компании — это лжецы.

Предположим теперь, что рыцарь сказал: «Меньше пяти». Тогда фразы «Меньше восьми» и «Меньше семнадцати» также являются правдивыми. Выходит, что всего должно быть 3 лжеца и $5 + 8 + 17 = 30$ рыцарей. Но тогда лжецы сказали правду. Противоречие. Значит, первые $3 + 5 = 8$ человек — лжецы.

Предположим, что рыцарь сказал: «Меньше восьми». Тогда фраза «Меньше семнадцати» также является правдивой. Выходит, что всего должно быть $3 + 5 = 8$ лжецов и $8 + 17 = 25$ рыцарей. Но тогда рыцарь, сказавший, что лжецов меньше восьми, соврал. Противоречие. Значит, первые $3 + 5 + 8 = 16$ человек — лжецы.

Тогда нашему рыцарю ничего не остаётся, кроме как сказать: «Меньше семнадцати». Выходит, что всего должно быть $3 + 5 + 8 = 16$ лжецов и 17 рыцарей. И это удовлетворяет всем условиям задачи.