8 класс

8.1 Резонансное затмение

Известно, что спутники Юпитера Ио, Европа и Ганимед находятся в орбитальном резонансе $4 : 2 : 1$. Иными словами, их периоды обращения вокруг Юпитера соотносятся как целые числа, причём период обращения Европы в 2 раза больше, чем у Ио, но в 2 раза меньше, чем у Ганимеда. Также известно, что все три спутника обращаются в одной плоскости и могут отбрасывать тень на поверхность Юпитера.

Какое минимальное и максимальное количество «двойных» (то есть происходящих одновременно) солнечных затмений, вызванных этими спутниками, может произойти на Юпитере за один оборот Ганимеда? Заметим, что «тройных» затмений при этом не бывает.

См. решение задачи 7.1, страница 7.

8.2 Космические гонки

Анализируя спектр источника излучения, можно определить скорость его приближения или удаления относительно наблюдателя. Находясь на Земле, астроном изучает внесолнечную планетную систему — звезду с обращающейся вокруг неё экзопланетой. Орбита экзопланеты находится в плоскости орбиты Земли и видна «с ребра». Астроном обнаружил, что звезда приближается к Солнечной системе со скоростью 15 км/с, а скорость обращения экзопланеты вокруг этой звезды равна 20 км/с.

С какой максимальной скоростью экзопланета может приближаться к Земле? Удаляться от неё? Чему равна минимальная (по модулю) скорость экзопланеты относительно Земли? Земля обращается вокруг Солнца со скоростью 30 км/с.

Возможное решение. Скорость экзопланеты относительно Земли складывается из трёх *независимых* компонент:

- орбитальной скорости экзопланеты v_p относительно звезды,
- скорости звезды v_r относительно Солнечной системы,
- орбитальной скорости Земли $v_\oplus$ относительно Солнца.

При этом первая и последняя компоненты меняются в зависимости от положения экзопланеты и Земли на своих орбитах: так, в некоторый момент времени Земля будет двигаться со скоростью 30 км/с по направлению к звезде, а через полгода — с той же скоростью удаляться от неё.

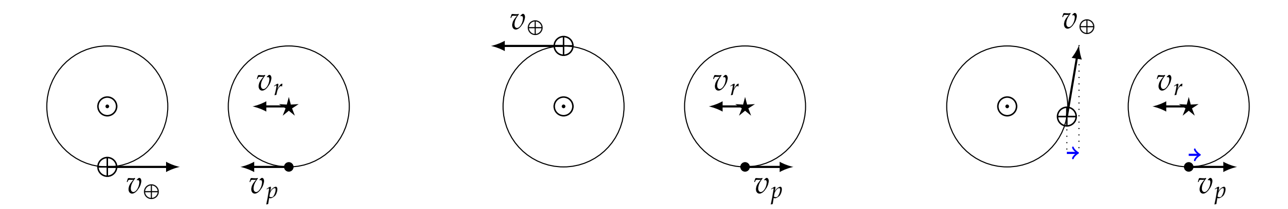
Для начала определим возможные значения скорости экзопланеты относительно Солнечной системы, то есть без учёта движения Земли. Если экзопланета к нам приближается, то её орбитальная скорость складывается со скоростью звезды, так что максимальная скорость приближения к Солнцу равна $v_p + v_r = 20 + 15 = 35$ км/с. Если экзопланета удаляется, то с учётом скорости звезды получаем наибольшую возможную гелиоцентрическую скорость удаления $v_p - v_r = 20 - 15 = 5$ км/с.

Теперь учтём скорость Земли. **Максимальная скорость сближения** получится, если Земля будет двигаться навстречу экзопланете: итоговая скорость сближения составит

$$v_p + v_r + v_\oplus = 35 + 30 = \mathbf{65\ км/с.}$$

Для максимизации скорости удаления скорость Земли должна быть направлена от звезды; **наибольшая скорость удаления** экзопланеты от Земли составит

$$v_p - v_r + v_\oplus = 5 + 30 = \mathbf{35\ км/с.}$$



(a) Максимальная возможная скорость сближения

(b) Максимальная возможная скорость удаления

(c) Минимальный модуль относительной скорости

Рис. 6: Различные конфигурации Земли и экзопланеты

Заметим, что скорости как Земли, так и экзопланеты могут быть направлены под углом к линии «Солнце – звезда». Тогда приближению (удалению) планеты будет соответствовать не вся орбитальная скорость, а только её часть. Например, если экзопланета удаляется от Солнца со скоростью 5 км/с, можно подобрать положение Земли на орбите так, чтобы она приближалась к звезде с такой же скоростью, и тогда относительная скорость экзопланеты относительно Земли будет **нулевой.** Поскольку модуль скорости неотрицателен, это и есть **минимально возможная по модулю** геоцентрическая скорость экзопланеты.

Критерии оценивания:

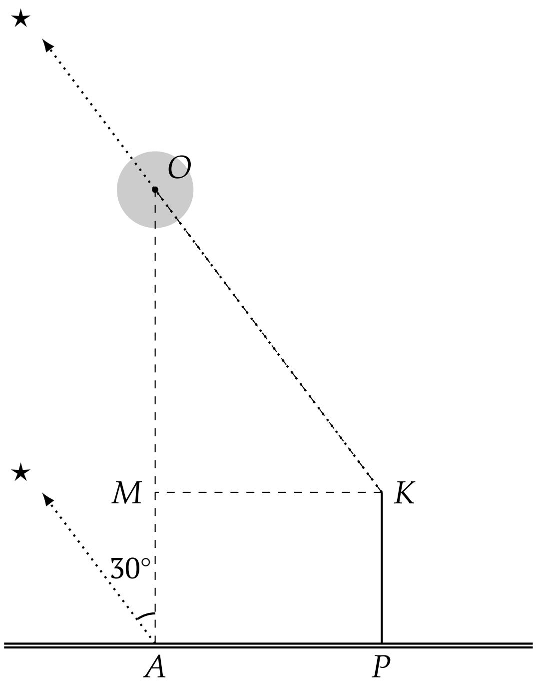
1	Скорость экзопланеты относительно Земли складывается из трёх компонент	2
2	Максимальная скорость сближения: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
3	Максимальная скорость удаления: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
4	Минимальный модуль относительной скорости экзопланеты: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
	Всего	**8**

8.3 Таинственный остров

Любитель ночных пейзажей решил сфотографировать небольшой остров в море на фоне звёздного неба. Он обнаружил, что при съёмке из точки A, ближайшей к острову точки прямого берега, Полярная звезда наблюдается в 30° к западу от острова. Следующей ночью наблюдатель решил сфотографировать остров с крайней точки пирса, расположенного в 300 метрах от точки A. Полярная звезда при этом оказалась прямо над островом. Определите расстояние от берега до острова, если известно, что пирс перпендикулярен береговой линии и имеет длину 50 метров.

Словарь. Пирс — сооружение, выступающее в акваторию водоёма и служащее для швартовки судов или в рекреационных целях (купание, рыбалка и т. п.).

Возможное решение. Изобразим описанную в условии ситуацию на чертеже:



Точка A — ближайшая к острову O точка берега, поэтому прямая OA перпендикулярна береговой линии. Пусть P — основание пирса и K — его крайняя точка. Опустим из точки K перпендикуляр KM на прямую OA. В результате получаем прямоугольник $AMKP$, где $KM = AP = 300$ м, $AM = KP = 50$ м.

Поскольку Полярная звезда (★) является очень далёким объектом и указывает направление на север как из точки A, так и с края пирса, прямые A★ и K★ параллельны. Отсюда получаем, что в прямоугольном треугольнике OKM $\angle O = 30°$, так что гипотенуза OK в 2 раза больше противолежащего катета KM и равна $300 \times 2 = 600$ м.

Теперь по теореме Пифагора возможно найти второй катет:

$$OM = \sqrt{OK^2 - KM^2} = \sqrt{600^2 - 300^2} \approx 520 \text{ м.}$$

В результате получаем, что расстояние от берега до острова есть

$$AM + OM = 50 + 520 = \mathbf{570\ м.}$$

Критерии оценивания:

1	Корректный чертёж: геометрия чертежа позволяет определить искомое расстояние	2
2	Направления на Полярную параллельны	1
3	***Пирс с правильной стороны***	1
4	Выделение прямоугольника	1
5	Решение треугольника	2
6	Ответ	1
	Всего	**8**

8.4 Удаление Бетельгейзе

В 2007 году была получена оценка годичного параллакса Бетельгейзе, равная $6.55 \cdot 10^{-3}$ угловой секунды. В 2020 году была получена оценка, равная $5.95 \cdot 10^{-3}$ угловой секунды. На сколько процентов бо́льшим получается расстояние до Бетельгейзе по данным 2020 года по сравнению с 2007 годом?

Заметим: различие оценок не связано с собственным движением Бетельгейзе в пространстве, а только с погрешностью измерения параллакса. Какая пространственная скорость соответствовала бы такому перемещению, будь оно реальным?

Возможное решение. Расстояние, выраженное в парсеках, обратно пропорционально годичному параллаксу, выраженному в угловых секундах. Такая пропорциональность следует как из определения парсека (расстояние, с которого 1 астрономическая единица видна под углом в 1 угловую секунду), так и из приближения малых углов (малый угловой размер объекта обратно пропорционален расстоянию до него).

Определим, каким расстояниям соответствовали полученные значения годичного параллакса Бетельгейзе:

$$r_1 = \frac{1\ \text{пк}}{6.55 \cdot 10^{-3}} = 152.7\ \text{пк},$$

$$r_2 = \frac{1\ \text{пк}}{5.95 \cdot 10^{-3}} = 168.1\ \text{пк}.$$

Отметим, что возможно и более подробное вычисление исходя из определения годичного параллакса. Можно заметить, что его величина равна углу, под которым радиус орбиты Земли виден из окрестности звезды. В случае малого углового размера его величина в радианной мере примерно равна отношению линейного размера к расстоянию в тех же единицах длины. Для оценки параллакса 2007 года соотношение примет вид

$$\frac{6.55 \cdot 10^{-3}\,''}{206265''/\text{рад}} = \frac{1\ \text{а. е.}}{r_1},$$

откуда $r_1 = 3.15 \cdot 10^7$ а. е., что при переводе в парсеки из расчёта 1 пк = 206 265 а. е. даёт результат 152.7 пк. Аналогичным образом получается значение $r_2 = 168.1$ пк.

Разность расстояний составляет $168.1 - 152.7 = 15.4$ пк. Переводим эту величину в долю оценки 2007 года, затем переводим ответ в проценты:

$$\frac{15.4}{152.7} \times 100\,\% \approx \mathbf{10\,\%}.$$

Различие параллаксов дало разницу расстояний в 15.4 пк. Неизвестно, в какие моменты года были получены оценки параллакса, поэтому будем считать, что изменение произошло за 13 лет. Тогда соответствующая «скорость движения» звезды (напоминаем, что речь идёт не о действительном смещении) равна отношению «пройденного расстояния» и промежутка времени, за которое это расстояние «пройдено».

Возможно сразу получить величину «скорости» в парсеках в год:

$$v = \frac{15.4\text{ пк}}{13\text{ лет}} = \mathbf{1.2\text{ пк/год.}}$$

Величина выглядит большой, но насколько реалистичной? Вспомним, что 1 парсек равен примерно 3.26 светового года (в справочных данных приведено значение парсека в метрах, а величина светового года определяется домножением скорости света на длительность года в секундах). В таком случае скорость перемещения Бетельгейзе окажется равной ≈ 4 световых года за год, то есть в 4 раза выше скорости света: $v \approx 1.2 \cdot 10^6$ км/с.

Критерии оценивания:

1	Обратная пропорциональность годичного параллакса в секундах дуги и расстояния в парсеках ***либо*** формула связи углового расстояния, линейного размера и расстояния до объекта	2
2	Оценка расстояний до Бетельгейзе в любых одинаковых единицах длины, допустима погрешность 10 % *Арифметическая ошибка*	1 + 1 *−1*
3	Оценка разности расстояний ***исходя из полученных участником значений*** расстояний, допустима погрешность 10 %	1
4	Определение разности расстояний в процентах от оценки 2007 года ***исходя из полученных участником значений***, допустима погрешность 10 % *Арифметическая ошибка*	1 *−1*
5	Определение скорости удаления звезды в любых единицах измерения скорости ***исходя из полученных участником значений расстояний***, допустима погрешность 10 % *Арифметическая ошибка*	1 *−1*
6	Указание на превышение звездой скорости света	1
	Всего	**8**

8.5 Планета в глазури

Представим планету-гигант моделью из трех слоёв: вокруг плотного ядра расположен менее плотный твёрдый слой, выше которого находится атмосфера. В таблице приведены границы слоёв в процентах радиуса планеты и средние плотности вещества этих слоёв. Определите среднюю плотность планеты.

Граничное расстояние от центра, % радиуса	25	85	100
Плотность, г/см^3	8.0	2.0	0.4

Возможное решение. Средняя плотность планеты равна отношению её массы к объёму. Масса планеты складывается из трёх компонент: массы шарообразного ядра, масс среднего и внешнего слоя-атмосферы. Плотности компонент известны; необходимо найти объёмы ядра и двух слоёв.

Объёмы планеты V и ядра V_1 вычислим по формуле объёма шара. Обозначим радиус планеты как R, тогда

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi R^3; \\ V_1 &= \frac{4}{3}\pi \cdot (0.25R)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 0.25^3. \end{aligned}$$

Объём сферического слоя равен разности объёмов шаров с радиусами, равными внешнему и внутреннему радиусам слоя. Тогда

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{4}{3}\pi \cdot (0.85R)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (0.25R)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \left(0.85^3 - 0.25^3\right); \\ V_3 &= \frac{4}{3}\pi \cdot (1.00R)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (0.85R)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \left(1.00^3 - 0.85^3\right). \end{aligned}$$

Общая масса планеты

$$M = V_1\rho_1 + V_2\rho_2 + V_3\rho_3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \left(0.25^3\rho_1 + \left(0.85^3 - 0.25^3\right)\rho_2 + \left(1.00^3 - 0.85^3\right)\rho_3\right),$$

откуда средняя плотность

$$\begin{aligned} \langle\rho\rangle = \frac{M}{V} &= 0.25^3\rho_1 + \left(0.85^3 - 0.25^3\right)\rho_2 + \left(1.00^3 - 0.85^3\right)\rho_3 \\ &= 0.25^3 \times 8.0 + \left(0.85^3 - 0.25^3\right) \times 2.0 + \left(1.00^3 - 0.85^3\right) \times 0.4 = 1.5 \text{ г/см}^3. \end{aligned}$$

Критерии оценивания:

1	Утверждение о пропорциональности $V \propto R^3$ для ядра ***либо*** выражение $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	2
	Неверный коэффициент, если приводится равенство	*−1*
	Неверный показатель степени	*−2*
2	Запись выражений для объёма среднего слоя и атмосферы как разностей объёмов шаров или как объёмов сферических слоёв с подстановкой радиусов ***исходя из полученного участником выражения для объёма шара***	1×3
3	Запись формулы для средней плотности как отношения полной массы к полному объёму	1
4	Запись формулы для полной массы как суммы масс компонент с подстановкой массы как произведения объёма и плотности ***исходя из полученных участником выражений для объёмов***	1
5	Вычисление средней плотности планеты ***исходя из полученного участником выражений***, допустима погрешность 10 %	1
	Всего	**8**

Если участник оценивает среднюю плотность планеты как среднее арифметическое плотностей слоёв, за решение выставляется не более 2 баллов.

8.6 Провал века

На рис. 7 (страница 31) представлена кривая блеска — зависимость блеска некоторой звезды от времени. На графике отчётливо видны моменты кратковременного падения блеска, вызванного прохождением экзопланеты по диску звезды.

а) Определите период обращения этой экзопланеты вокруг звезды.
б) Во сколько раз радиус звезды больше радиуса экзопланеты? Считайте прохождение центральным.
в) Как называются такие планеты?

Возможное решение. Период обращения экзопланеты вокруг звезды равен промежутку времени между её прохождениями по диску звезды для земного наблюдателя, то есть между «провалами». Формально возможно напрямую измерить длину отрезка, соответствующего одному периоду. Чтобы уменьшить влияние погрешностей измерений, имеет смысл измерить отрезок в несколько периодов, а потом разделить полученный результат на соответствующее количество периодов. Так, первый минимум приходится на отметку времени в 1.2 суток, третий — 5.6 суток. Тогда период обращения планеты равен

$$\frac{5.6 - 1.2}{2} = \mathbf{2.2\ сут.}$$

Когда экзопланета оказывается между звездой и наблюдателем, она закрывает часть диска звезды, что и вызывает видимое уменьшение яркости, причём это уменьшение пропорционально доле закрытой площади диска. Как видно из графика, во время транзита планета закрывает от наблюдателя долю площади диска звезды

$$1 - 0.99325 = 0.00675.$$

Строго говоря, отношение видимых площадей дисков звезды и экзопланеты зависит от отношения их *угловых* размеров (так, для земного наблюдателя Луна может целиком закрыть Солнце, хотя физические размеры Луны гораздо меньше). Но ввиду того, что расстояние от Земли до звезды и экзопланеты гораздо больше, чем расстояние между экзопланетой и звездой, возможно считать, что их видимые угловые радиусы относятся так же, как и линейные.

Обозначим радиусы планеты и звезды как r и R. Тогда

$$\pi r^2 = 0.00675\,\pi R^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{1}{0.00675}} \approx \mathbf{12.}$$

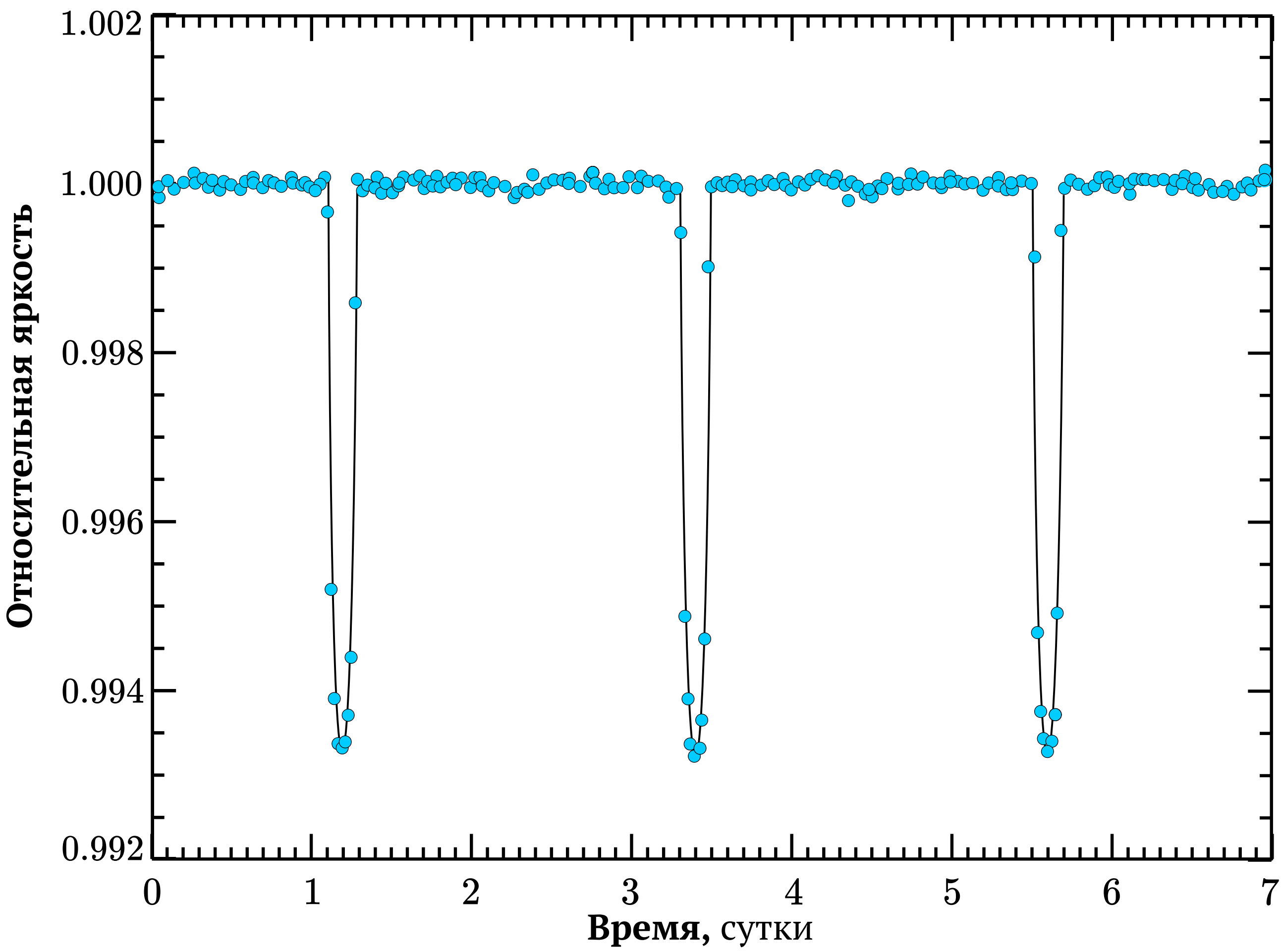


Рис. 7: Кривая блеска к задаче 8.6

Как видно, планета достаточно велика (для сравнения: радиус Юпитера меньше радиуса Солнца примерно в 10 раз). При этом столь малый (пара суток) период обращения говорит о том, что планета расположена к своей звезде очень близко. Такие экзопланеты принято называть **горячими юпитерами.**

Критерии оценивания:

а1	Описание метода определения периода		1
а2	Масштаб графика (хотя бы неявно)		1
а3	Период от 2.1 до 2.3 сут.		2
	от 2.0 до 2.4 сут.	*1*	
б1	Яркость пропорциональна видимой площади диска звезды		1
б2	Падение блеска по графику		1
б3	Отношение размеров звезды и планеты		3
в	Это горячий юпитер		1
	Всего		**10**