Пригласительный этап 2023

Математика. 6 класс

1. **Клон 1**

   В коробке лежат конфеты трёх видов: шоколадные, леденцы и мармеладные. Всего 110 конфет. Если не считать мармеладные, то в коробке 100 конфет. Если не считать шоколадные, то получится количество, на 20 большее, чем количество всех конфет без леденцов. Сколько конфет каждого вида в коробке?

   Ответ: шоколадных 40, леденцов 60, мармеладных 10.

   Решение

   Обозначим количество шоколадных конфет – Ш, мармеладных – М, леденцов – Л. По условию Ш+М+Л=110, Ш+Л=100. Отсюда М=10. Также известно, что М+Л=Ш+М+20, тогда Л=Ш+20. Подставим Л в первое выражение и, учитывая, что М=10 получим Ш+10+Ш+20=110. Тогда Ш=40 и Л=60.

   Клон 2

   В коробке лежат конфеты трёх видов: шоколадные, леденцы и мармеладные. Всего 140 конфет. Если не считать мармеладные, то в коробке 110 конфет. Если не считать шоколадные, то получится количество, на 30 большее, чем количество всех конфет без леденцов. Сколько конфет каждого вида в коробке?

   Ответ: шоколадных 40, леденцов 70, мармеладных 30.

   Клон 3

   В коробке лежат конфеты трёх видов: шоколадные, леденцы и мармеладные. Всего 130 конфет. Если не считать мармеладные, то в коробке 120 конфет. Если не считать шоколадные, то получится количество, на 20 большее, чем количество всех конфет без леденцов. Сколько конфет каждого вида в коробке?

   Ответ: шоколадных 50, леденцов 70, мармеладных 10.

   Клон 4

   В коробке лежат конфеты трёх видов: шоколадные, леденцы и мармеладные. Всего 120 конфет. Если не считать мармеладные, то в коробке 100 конфет. Если не считать шоколадные, то получится количество, на 40 большее, чем количество всех конфет без леденцов. Сколько конфет каждого вида в коробке?

   Ответ: шоколадных 30, леденцов 70, мармеладных 20.

2. **Клон 1**

   Учительница хотела записать на доске пример на вычисление:

   $$1,05 + 1,15 + 1,25 + 1,4 + 1,5 + 1,6 + 1,75 + 1,85 + 1,95 =?,$$

   но случайно забыла написать одну запятую. После этого Коля вышел к доске и, верно выполнив все действия, получил в результате целое число. Какое?

   Ответ: 27

Решение

Вычислим сумму

$$1,05+1,15+1,25+1,4+1,5+1,6+1,75+1,85+1,95=13,5$$

Следовательно, для того, чтобы получилось целое число, запятая должна быть пропущена в числе с дробной частью $0,5$. В результате вместо числа 1,5 на доске появится число 15 и результат увеличится на $15-1,5=13,5$ и будет равен 27. Можно посчитать по-другому: заметим, что 1,05+1,95=1,15+1,85=1,25+1,75=1,6+1,4=3. Тогда Коля получил сумму $3\cdot 4+15=27$.

Клон 2

Учительница хотела записать на доске пример на вычисление:

$$2,05+2,15+2,25+2,4+2,5+2,6+2,75+2,85+2,95=?,$$

но случайно забыла написать одну запятую. После этого Коля вышел к доске и, верно выполнив все действия, получил в результате целое число. Какое?

Ответ: 45

Клон 3

Учительница хотела записать на доске пример на вычисление:

$$3,05+3,15+3,25+3,4+3,5+3,6+3,75+3,85+3,95=?,$$

но случайно забыла написать одну запятую.После этого Коля вышел к доске и, верно выполнив все действия, получил в результате целое число. Какое?

Ответ: 63

Клон 4

Учительница хотела записать на доске пример на вычисление:

$$4,05+4,15+4,25+4,4+4,5+4,6+4,75+4,85+4,95=?,$$

но случайно забыла написать одну запятую. После этого Коля вышел к доске и, верно выполнив все действия, получил в результате целое число. Какое?

Ответ: 81

3. **Клон 1**

На острове живут рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Перед товарищеским матчем собрались 30 островитян в футболках, на которых написаны номера – произвольные натуральные числа. Каждый из них сказал: «У меня футболка с нечётным номером». После этого они обменялись футболками, и каждый сказал: «У меня футболка с чётным номером». Сколько рыцарей участвовало в обмене?

Ответ: 15

Решение

Заметим, что каждый рыцарь поменял футболку с нечётным номером на футболку с чётным номером, а каждый лжец поменял футболку с чётным номером на футболку с нечётным номером. Значит, каждый рыцарь поменялся со лжецом, то есть рыцарей не больше, чем лжецов. С другой стороны, каждый лжец поменялся с рыцарем, то есть лжецов не больше, чем рыцарей. Тогда рыцарей и лжецов одинаковое количество – половина от общего числа островитян.

Клон 2

На острове живут рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Перед товарищеским матчем собрались 40 островитян в футболках, на которых написаны номера – произвольные натуральные числа. Каждый из них сказал: «У меня футболка с нечётным номером». После этого они обменялись футболками, и каждый сказал: «У меня футболка с чётным номером». Сколько рыцарей участвовало в обмене?

Ответ: 20

Клон 3

На острове живут рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Перед товарищеским матчем собрались 50 островитян в футболках, на которых написаны номера – произвольные натуральные числа. Каждый из них сказал: «У меня футболка с нечётным номером». После этого они обменялись футболками, и каждый сказал: «У меня футболка с чётным номером». Сколько рыцарей участвовало в обмене?

Ответ: 25

Клон 4

На острове живут рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Перед товарищеским матчем собрались 60 островитян в футболках, на которых написаны номера – натуральные числа. Каждый из них сказал: «У меня футболка с нечётным номером». После этого они обменялись футболками, и каждый сказал: «У меня футболка с чётным номером». Сколько рыцарей участвовало в обмене?

Ответ: 30

4. **Клон 1**

Заяц и Волк бегут по кругу длиной 200 метров в одном направлении со скоростями 5 м/с и 3 м/с. Оказалось, что расстояние между ними ровно такое же, как было 40 секунд назад (расстояние измеряется по наименьшей из двух дуг). Каким может быть это расстояние?

Выбор варианта ответа из множества: 40, 50, 60, 70, 80, 90

Ответ: 40, 60

Решение

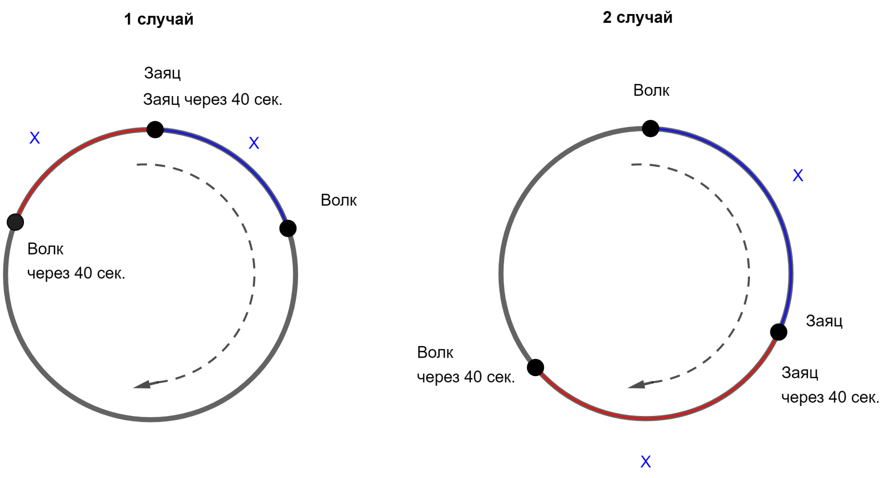
Из условия следует, что Заяц бежит быстрее Волка. Кроме того, за 40 секунд Заяц пробежит 200 метров, то есть не более 1 круга. Будем считать, что Заяц и Волк движутся по кругу по часовой стрелке. Рассмотрим два возможных случая.

1) Заяц догоняет и обгоняет Волка (рисунок слева).

Пусть между Зайцем и Волком было x метров. Тогда за 40 секунд Заяц пробежал расстояние $2x$ метров плюс расстояние, которое пробежал Волк: $3 \cdot 40 = 120$ метров. С другой стороны, за 40 секунд он пробежал $5 \cdot 40 = 200$ метров. Значит, $2x + 120 = 200$, или $x = 40$.

2) Заяц был впереди Волка по направлению круга, а через 40 секунд расстояние между ними стало считаться не по дуге Волк-Заяц, а по дуге Заяц-Волк (рисунок справа).

Пусть также изначально между Зайцем и Волком расстояние x метров. Чтобы оказаться на таком же расстоянии от Волка, Зайцу нужно пробежать $200 - 2x + 120$. Это величина получается, если из общей длины круга вычесть дважды расстояние между Зайцем и Волком и прибавить расстояние, которое пробежал Волк за это время. С другой стороны, Заяц пробежал за 40 секунд 200 метров. Значит $320 - 2x = 200$, $x = 60$.



Клон 2

Заяц и Волк бегут по кругу длиной 260 метров в одном направлении со скоростями 5 м/с и 3 м/с. Оказалось, что расстояние между ними ровно такое же, как было 40 секунд назад (расстояние измеряется по наименьшей из двух дуг). Каким может быть это расстояние?

Выбор варианта ответа из множества: 40, 50, 60, 70, 80, 90

Ответ: 40, 90

Клон 3

Заяц и Волк бегут по кругу длиной 260 метров в одном направлении со скоростями 5 м/с и 3 м/с. Оказалось, что расстояние между ними ровно такое же, как было 50 секунд назад (расстояние измеряется по наименьшей из двух дуг). Каким может быть это расстояние?

Выбор варианта ответа из множества: 40, 50, 60, 70, 80, 90

Ответ: 50, 80

Клон 4

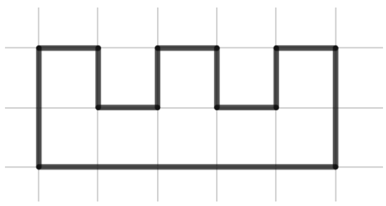
Заяц и Волк бегут по кругу длиной 280 метров в одном направлении со скоростями 5 м/с и 3 м/с. Оказалось, что расстояние между ними ровно такое же, как было 50 секунд назад (расстояние измеряется по наименьшей из двух дуг). Каким может быть это расстояние?

Выбор варианта ответа из множества: 40, 50, 60, 70, 80, 90

Ответ: 50, 90

5. **Клон 1**

Сколько существует способов поставить 3 ладьи на доске, изображённой на рисунке так, чтобы они не били друг друга? Ладья бьёт все клетки в горизонтали и в вертикали, в которой она стоит, ладья не может бить через вырезанные клетки по горизонтали.



Ответ: 10

Решение

Будем называть нижнюю горизонталь *длинной горизонталью*. Заметим, что на длинной горизонтали может стоять не более 1 ладьи. Рассмотрим 2 случая.

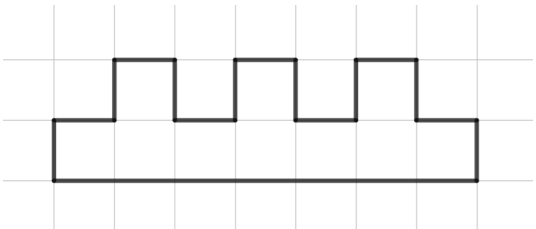
1. Если одна из ладей стоит на длинной горизонтали, то две другие ладьи могут стоять только на верхней горизонтали. Из трёх клеток выбрать две можно тремя способами. Выбрав эти две клетки, мы исключаем две клетки длинной горизонтали, так как они будут под боем. Остаются 3 клетки, на которые можно поставить ладью. Таким образом, всего в этом случае $3 \cdot 3 = 9$ вариантов расстановки.

2. Если ни одна из ладей не стоит на длинной горизонтали, то все они стоят на верхней. Такая расстановка только одна.

Итого 10 способов расставить ладьи на доске.

Клон 2

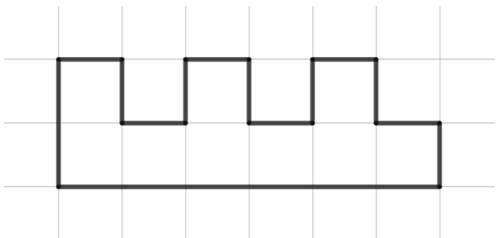
Сколько существует способов поставить 3 ладьи на доске, изображённой на рисунке так, чтобы они не били друг друга? Ладья бьёт все клетки в горизонтали и в вертикали, в которой она стоит, ладья не может бить через вырезанные клетки по горизонтали.



Ответ: 16

Клон 3

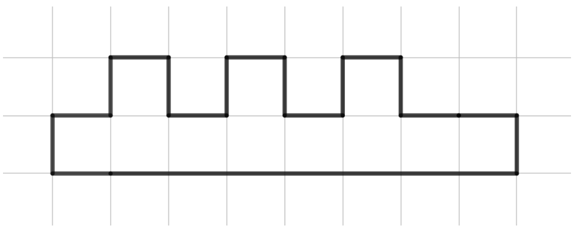
Сколько существует способов поставить 3 ладьи на доске, изображённой на рисунке так, чтобы они не били друг друга? Ладья бьёт все клетки в горизонтали и в вертикали, в которой она стоит, ладья не может бить через вырезанные клетки по горизонтали.



Ответ: 13

Клон 4

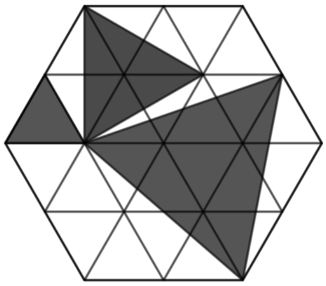
Сколько существует способов поставить 3 ладьи на доске, изображённой на рисунке так, чтобы они не били друг друга? Ладья бьёт все клетки в горизонтали и в вертикали, в которой она стоит, ладья не может бить через вырезанные клетки по горизонтали.



Ответ: 19

6. **Клон 1**

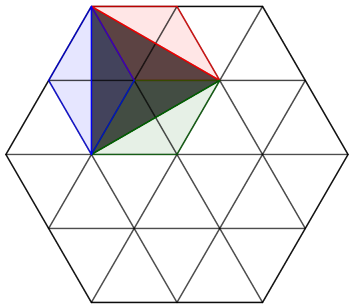
На рисунке изображён шестиугольник, составленный из одинаковых равносторонних треугольников, площадь каждого из которых равна 10. Найдите площадь закрашенной части.



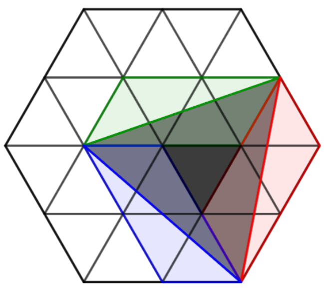
Ответ: 110

Решение

Будем называть равносторонние треугольники, из которых составлен исходный шестиугольник, *единичными*. Рассмотрим в отдельности каждый из выделенных треугольников внутри шестиугольника. Самый маленький совпадает с единичным и имеет площадь 10. Средний треугольник вписан в шестиугольник, составленный из шести равносторонних единичных треугольников. На рисунке показано, что этот треугольник равен половине площади шестиугольника, так как его можно разбить на части, равные незакрашенным частям этого шестиугольника. Получаем, что его площадь равна трём площадям единичных треугольников.



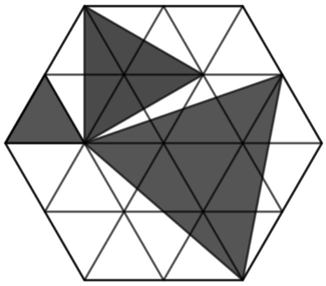
Самый большой треугольник вписан в фигуру, составленную из 13 единичных треугольников. Заметим, что он тоже составлен из целого числа единичных треугольников. Если не учитывать центральный треугольник, то остальную часть можно разбить на фрагменты, равные незакрашенным частям. Тогда его площадь равна $(13 - 1)/2 + 1 = 7$ площадям единичных треугольников.



Тогда общая площадь закрашенной части равна $10 \cdot (1 + 3 + 7) = 110$.

Клон 2

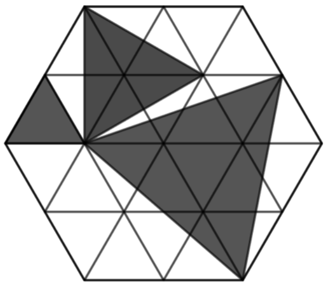
На рисунке изображён шестиугольник, составленный из одинаковых равносторонних треугольников, площадь каждого из которых равна 2. Найдите площадь закрашенной части.



Ответ: 22

Клон 3

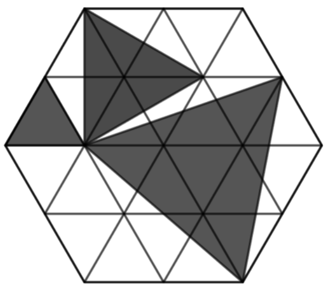
На рисунке изображён шестиугольник, составленный из одинаковых равносторонних треугольников, площадь каждого из которых равна 3. Найдите площадь закрашенной части.



Ответ: 33

Клон 4

На рисунке изображён шестиугольник, составленный из одинаковых равносторонних треугольников, площадь каждого из которых равна 5. Найдите площадь закрашенной части.



Ответ: 55

7. **Клон 1**

На столе лежат 14 монет по 2 и 5 рублей (каждый из номиналов присутствует). Некоторые из них перевёрнуты номиналом (решкой) вверх, а некоторые – орлом вверх. Если каждую монету, лежащую на столе, перевернуть, то сумма видимых номиналов станет в 3 раза больше, чем была изначально. Сколько пятирублёвых монет может лежать на столе? Укажите все возможные варианты.

Ответы: 4 или 8

Решение. Если обозначить сумму видимых номиналов за x, то сумма номиналов перевёрнутых монет будет равна $3x$, значит, общая сумма денег, лежащих на столе равна $4x$, то есть делится на 4. Так как оба номинала присутствуют, то всего на столе может быть от 31 до 67 рублей. Минимальная сумма получается, если взять 1 монету 5 рублей и 13 монет по 2 рубля $5 + 2 \cdot 13 = 31$, а максимальная, если взять 13 монет по 5 рублей и одну монету 2 рубля $2 + 13 \cdot 5 = 67$. Заменяя одну монету 2 рубля на монету в 5 рублей, общая сумма увеличивается на 3 рубля. Тогда возможны следующие варианты: 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67.

Из этих чисел делятся на 4 только числа 40, 52 и 64. Покажем, что на столе могло лежать 40 рублей. Пусть всего 10 монет по 2 рубля и 4 монеты по 5 рублей. Изначально номиналом вверх лежат 5 двухрублёвых монет, то есть 10 рублей, а после переворота – 30 рублей.

Покажем, что 52 рубля тоже могло лежать на столе. Пусть всего 6 монет по 2 рубля и 8 монет по 5 рублей. Изначально номиналом вверх лежат 4 двухрублёвых и 1 пятирублёвая монета, то есть 13 рублей. После переворота – 39 рублей.

Примера на 64 не существует, так как монеты должны быть разбиты на группы с суммами 16 и 48, что невозможно для 14 монет. Покажем это. Рассмотрим, как можно получить 16 рублей. Мы должны взять чётное число монет по 5 рублей, иначе придётся набрать нечётную сумму двухрублёвыми монетами, что невозможно. Поэтому возможно только два случая.

1) Взять 2 монеты по 5 рублей и 3 монеты по 2 рубля, тогда у нас остаётся 9 монет, которые дают сумму 45 рублей < 48 рублей.

2) Взять 8 монет по 2 рубля, тогда остаётся 6 монет, с помощью которых можно получить сумму не более 30 рублей < 48 рублей.

Замечание. В 3 и 4 клонах этой задачи идея решения точно такая же. Но все три примера можно построить.

Клон 2

На столе лежат 14 монет по 2 и 5 рублей (каждый из номиналов присутствует). Некоторые из них перевёрнуты номиналом (решкой) вверх, а некоторые – орлом вверх. Если каждую монету, лежащую на столе, перевернуть, то сумма видимых номиналов станет в 3 раза больше, чем была изначально. Сколько двухрублёвых монет может лежать на столе? Укажите все возможные варианты.

Ответы: 6 или 10

Клон 3

На столе лежат 13 монет по 2 и 5 рублей (каждый из номиналов присутствует). Некоторые из них перевёрнуты номиналом (решкой) вверх, а некоторые – орлом вверх. Если каждую монету, лежащую на столе, перевернуть, то сумма видимых номиналов станет в 3 раза больше, чем была изначально. Сколько двухрублёвых монет может лежать на столе? Укажите все возможные варианты.

Ответы: 3 или 7 или 11

Клон 4

На столе лежат 13 монет по 2 и 5 рублей (каждый из номиналов присутствует). Некоторые из них перевёрнуты номиналом (решкой) вверх, а некоторые – орлом вверх. Если каждую монету, лежащую на столе, перевернуть, то сумма видимых номиналов станет в 3 раза больше, чем была изначально. Сколько пятирублёвых монет может лежать на столе? Укажите все возможные варианты.

Ответы: 10 или 6 или 2

8. **Клон 1**

Поле для игры в «Морской бой» представляет собой прямоугольник 1×203. Петя расставляет на этом поле одноклеточные детекторы, после чего Вася размещает двухпалубный корабль (прямоугольник 1×2). Детектор срабатывает, если клетка, на которую он поставлен, находится под кораблём. Какое минимальное количество детекторов должен поставить Петя, чтобы по их показаниям однозначно определить положение Васиного корабля?

Ответ: 134

Решение

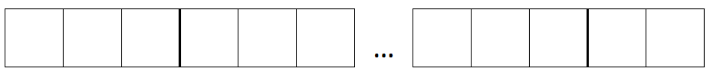
Решение этой задачи состоит из двух частей: оценки, где мы докажем, что меньшим количеством детекторов обойтись не удастся, и примера, который показывает, что данного количества детекторов хватает.

Оценка.

Замечание 1. Если рядом с детектором находятся две свободные клетки, то в случае, когда он сработает, определить положение корабля не удастся, так как у нас будет два возможных варианта его расположения.

Замечание 2. Промежутков из двух соседних клеток, свободных от детекторов, может быть не более одного. Иначе в ситуации, когда ни один детектор не сработает, положение корабля однозначно не восстанавливается. Это, в частности, означает, что три клетки подряд не могут быть пустыми.

Докажем оценку в общем случае, пусть прямоугольник имеет размеры $1 \times 3k + 2$ клетки. Разобьём наше поле на прямоугольники 1×3. Всего получится k прямоугольников и две клетки останется. Мы хотим доказать, что детекторов должно быть хотя бы $2k$.



В каждом прямоугольнике 1×3 есть 2 прямоугольника 1×2, которые пересекаются в центральной клетке. Выделим на поле $2k + 1$ прямоугольник 1×2 – по два в каждом 1×3 и последние две клетки.

Предположим, что детекторов не больше, чем $2k - 1$, тогда есть хотя бы два пустых прямоугольника 1×2, что невозможно согласно замечанию 2.

Следует отметить, что один детектор может принадлежать 2 прямоугольникам 1×2, но тогда он стоит в центре прямоугольника 1×3, а такое расположение согласно замечанию 1 не даёт возможности однозначно определить положение корабля.

Таким образом, если у нас имеется $3k + 2$ клетки, то детекторов должно стоять не менее чем $2k$.

Пример.

Пусть первые две клетки пустые, а затем в каждой следующей тройке клеток поставим два детектора подряд, а третью клетку оставим пустой. Докажем, что в этом случае мы сможем определить положение корабля. Если ни один детектор не сработал, то корабль стоит на 1 и 2 клетках. Если сработали два детектора, то корабль стоит на них. Назовём два детектора, стоящих рядом, левым и правым. Если сработал левый или правый детектор, то корабль стоит на нём и примыкающей к нему пустой клетке.

Клон 2

Поле для игры в «Морской бой» представляет собой прямоугольник 1×221. Петя расставляет на этом поле одноклеточные детекторы, после чего Вася размещает двухпалубный корабль (прямоугольник 1×2). Детектор срабатывает, если клетка, на которую он поставлен, находится под кораблём. Какое минимальное количество детекторов должен поставить Петя, чтобы по их показаниям однозначно определить положение Васиного корабля?

Ответ: 146

Клон 3

Поле для игры в «Морской бой» представляет собой прямоугольник 1×248. Петя расставляет на этом поле одноклеточные детекторы, после чего Вася размещает двухпалубный корабль (прямоугольник 1×2). Детектор срабатывает, если клетка, на которую он поставлен, находится под кораблём. Какое минимальное количество детекторов должен поставить Петя, чтобы по их показаниям однозначно определить положение Васиного корабля?

Ответ: 164

Клон 4

Поле для игры в «Морской бой» представляет собой прямоугольник 1×233. Петя расставляет на этом поле одноклеточные детекторы, после чего Вася размещает двухпалубный корабль (прямоугольник 1×2). Детектор срабатывает, если клетка, на которую он поставлен, находится под кораблём. Какое минимальное количество детекторов должен поставить Петя, чтобы по их показаниям однозначно определить положение Васиного корабля?

Ответ: 154