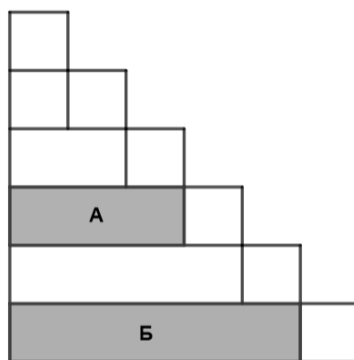


Пригласительный этап 2023

Математика. 5 класс

1. Клон 1

Фигура разделена на 7 равных квадратов и несколько прямоугольников. Периметр прямоугольника А равен 112 см. Чему равен периметр прямоугольника Б? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 168

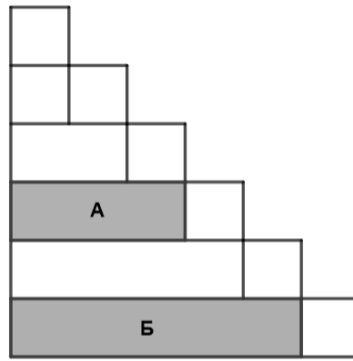
Решение

1 способ. Прямоугольники А и Б состоят из одинаковых квадратиков: прямоугольник А – из трёх, а прямоугольник Б – из четырёх. Назовём «палочкой» сторону такого квадратика и будем считать периметр в палочках. Периметр прямоугольника Б больше периметра А на четыре палочки. Также заметим, что четыре палочки – это половина периметра прямоугольника А. Тогда периметр Б равен $112/2 + 112 = 168$ см.

2 способ. Прямоугольники А и Б состоят из одинаковых квадратиков: прямоугольник А – из трёх, а прямоугольник Б – из четырёх. Назовем «палочкой» сторону такого квадратика и будем считать периметр в палочках. Периметр А равен 8 палочек, а периметр Б – 12 палочек. Длина одной палочки равна $112/8 = 14$ см. Тогда периметр Б равен $12 \cdot 14 = 168$ см.

Клон 2

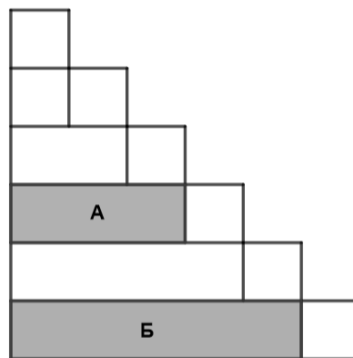
Фигура разделена на 7 равных квадратов и несколько прямоугольников. Периметр прямоугольника А равен 116 см. Чему равен периметр прямоугольника Б? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 174

Клон 3

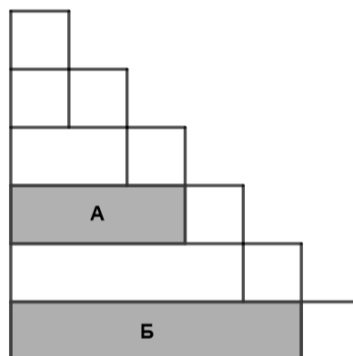
Фигура разделена на 7 равных квадратов и несколько прямоугольников. Периметр прямоугольника А равен 122 см. Чему равен периметр прямоугольника Б? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 183

Клон 4

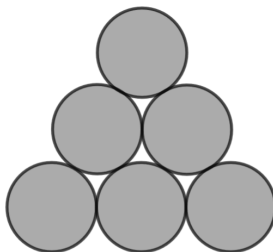
Фигура разделена на 7 равных квадратов и несколько прямоугольников. Периметр прямоугольника А равен 126 см. Чему равен периметр прямоугольника Б? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 189

2. Клон 1

На стене висит раскраска в виде треугольника из кружочков. Сколькими способами можно раскрасить её так, чтобы в итоге в ней было 4 синих, 1 зелёный и 1 красный кружочек? Поворачивать картинку нельзя.



Ответ: 30

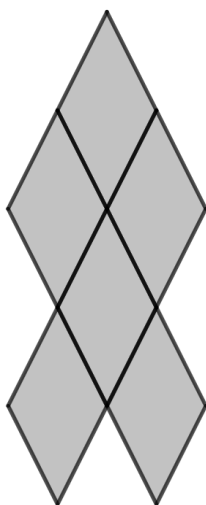
Решение

Если выбрать два кружочка в раскраске и один покрасить в зелёный, а другой – в красный цвет (или наоборот), то все остальные кружочки будут синими. Осталось посчитать сколькими способами можно выбрать 2 кружочка из 6. Для этого пронумеруем кружочки цифрами от 1 до 6 и выпишем все различные пары. При этом мы не будем выписывать дважды пары (а, б) и (б, а), а просто умножим полученный результат на 2. Чтобы не запутаться, будем выписывать пары в которых числа идут по возрастанию (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6) – всего получилось 15 пар. Тогда общее количество способов будет равно $15 \cdot 2 = 30$.

Замечание. Умножение на 2 нужно для того, чтобы учесть, что два выбранных кружочка могут быть покрашены двумя способами (зелёный, красный) и (красный, зелёный).

Клон 2

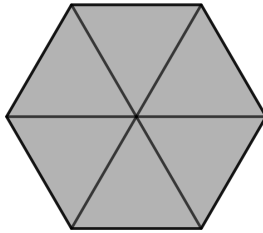
На стене висит раскраска в виде ромбиков. Сколькими способами можно раскрасить её так, чтобы в итоге в ней было 4 синих, 1 жёлтый и 1 коричневый ромбик? Поворачивать картинку нельзя.



Ответ: 30

Клон 3

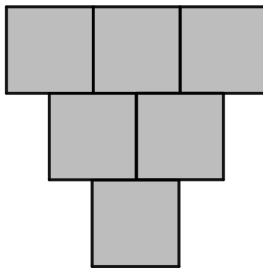
На стене висит раскраска в виде треугольничков. Сколькими способами можно раскрасить её так, чтобы в итоге в ней было 4 зелёных, 1 красный и 1 синий треугольник. Поворачивать картинку нельзя.



Ответ: 30

Клон 4

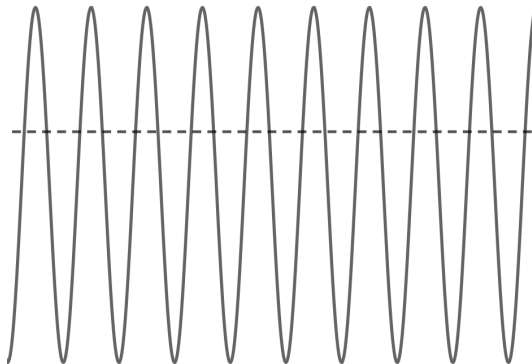
На стене висит раскраска в виде квадратиков. Сколькими способами можно раскрасить её так, чтобы в итоге в ней было 4 жёлтых, 1 зелёный и 1 синий квадратик. Поворачивать картинку нельзя.



Ответ: 30

3. Клон 1

Шнур разделили на 19 равных частей и сложили змейкой. После этого сделали разрез по пунктирной линии. Шнур распался на 20 кусков: самый длинный из них – 8 метров, самый короткий – 2 метра. Чему была равна длина шнура до того, как его разрезали? Ответ выразите в метрах.



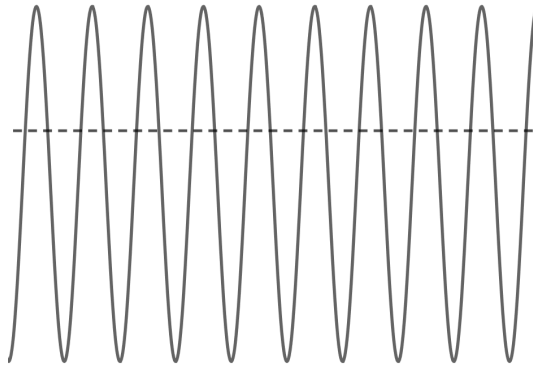
Ответ: 114

Решение

Найдём длину каждой из 19 равных частей, на которые был разделен шнур. Для этого нужно к половине самого длинного куска, полученного после разреза прибавить самый короткий. Получим $8/2 + 2 = 6$. Тогда общая длина шнура равна $19 \cdot 6 = 114$ метров.

Клон 2

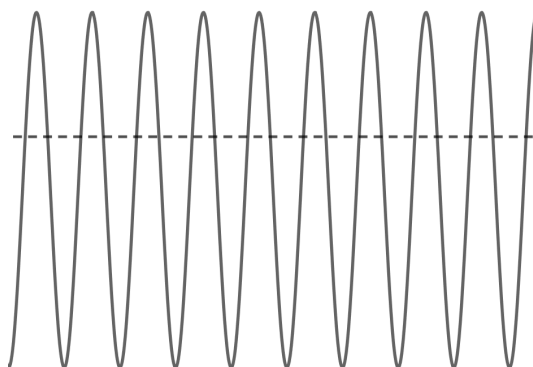
Шнур разделили на 19 равных частей и сложили змейкой. После этого сделали разрез по пунктирной линии. Шнур распался на 20 кусков: самый длинный из них – 8 метров, самый короткий – 1 метр. Чему была равна длина шнура до того, как его разрезали? Ответ выразите в метрах.



Ответ: 95

Клон 3

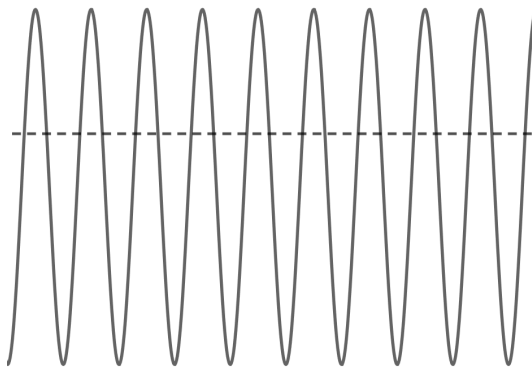
Шнур разделили на 19 равных частей и сложили змейкой. После этого сделали разрез по пунктирной линии. Шнур распался на 20 кусков: самый длинный из них – 10 метров, самый короткий – 2 метра. Чему была равна длина шнура до того, как его разрезали? Ответ выразите в метрах.



Ответ: 133

Клон 4

Шнур разделили на 19 равных частей и сложили змейкой. После этого сделали разрез по пунктирной линии. Шнур распался на 20 кусков: самый длинный из них – 10 метров, самый короткий – 3 метра. Чему была равна длина шнура до того, как его разрезали? Ответ выразите в метрах.



Ответ: 152

4. Клон 1

На рисунке изображены 8 костяшек домино, на последней из которых стёрлись точки. Известно, что все костяшки можно поместить в квадрат 4×4 так, что во всех строках количество точек будет одинаково (одна костяшка занимает 2 клетки). Какое максимальное количество точек могло быть на стёртой половинке?

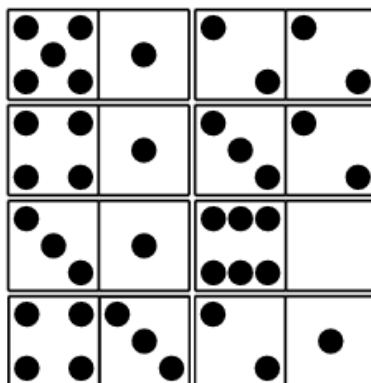


Ответ: 3

Решение

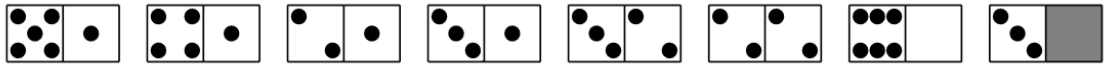
Найдём общее количество видимых точек на костяшках домино. Это количество равно 37. Так как в квадрате 4×4 содержится 4 строки, количество точек в каждой из которых одинаковое, общее количество точек должно делиться на 4. Т.е. к числу 37 нужно добавить несколько точек (от 0 до 6) так, чтобы общее количество делилось на 4. Это возможно, только если добавить 3 точки. Значит на стёртой половинке может быть только 3 точки.

Ниже приведён пример, что такое расположение возможно.



Клон 2

На рисунке изображены 8 костяшек домино, на последней из которых стёрлись точки. Известно, что все костяшки можно поместить в квадрат 4×4 так, что во всех строках количество точек будет одинаково (одна костяшка занимает 2 клетки). Какое максимальное количество точек могло быть на стёртой половинке?



Ответ: 4

Клон 3

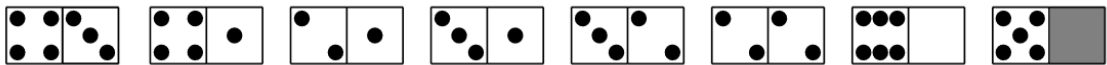
На рисунке изображены 8 костяшек домино, на последней из которых стёрлись точки. Известно, что все костяшки можно поместить в квадрат 4×4 так, что во всех строках количество точек будет одинаково (одна костяшка занимает 2 клетки). Какое максимальное количество точек могло быть на стёртой половинке?



Ответ: 5

Клон 4

На рисунке изображены 8 костяшек домино, на последней из которых стёрлись точки. Известно, что все костяшки можно поместить в квадрат 4×4 так, что во всех строках количество точек будет одинаково (одна костяшка занимает 2 клетки). Какое минимальное количество точек могло быть на стёртой половинке?



Ответ: 1

5. Клон 1

Из 125 кубиков сахара был выложен куб $5 \times 5 \times 5$. Пончик выбрал все кубики, имеющие нечётное число соседей и съел их (соседними считаются те кубики, которые имеют общую грань). Сколько всего кубиков съел Пончик?

Ответ: 62

Решение

Рассмотрим возможные случаи расположения кубика в кубе:

1. Кубик может находиться полностью внутри куба, тогда он имеет 6 соседей.
2. Кубик примыкает к грани, но не образует ребро куба, тогда у него 5 соседей.
3. Кубик примыкает к ребру куба, при этом не является вершиной, тогда у него 4 соседа.
4. Кубик является вершиной куба, в этом случае у него 3 соседа.

Нам подходят 2 и 4 случаи. Для каждой грани куба количество кубиков, удовлетворяющих случаю 2 равно: $3 \times 3 = 9$. Так как граней у куба 6, всего выходит 54 кубика. Вершин у куба 8, поэтому всего Пончик съел $54 + 8 = 62$ кубика.

Клон 2

Из 125 кубиков сахара был выложен куб $5 \times 5 \times 5$. Пончик съел все кубики, имеющие чётное число соседей (соседними считаются те кубики, которые имеют общую грань). Сколько всего кубиков съел Пончик?

Ответ: 63

Клон 3

Из 216 кубиков сахара был выложен куб $6 \times 6 \times 6$. Пончик выбрал все кубики, имеющие нечётное число соседей и съел их (соседними считаются те кубики, которые имеют общую грань). Сколько всего кубиков съел Пончик?

Ответ: 104

Клон 4

Из 216 кубиков сахара был выложен куб $6 \times 6 \times 6$. Пончик выбрал все кубики, имеющие чётное число соседей и съел их (соседними считаются те кубики, которые имеют общую грань). Сколько всего кубиков съел Пончик?

Ответ: 112

6. Клон 1

Катя записала десятизначное число, у которого все цифры различны. Затем каждую цифру девочка заменила на количество соседних цифр в числе, которые меньше неё. Какие из приведённых ниже последовательностей могли получиться в результате?

Варианты ответов: а) 1101111111 б) 1201201020 в) 1021021020 г) 0112102011

Ответ: а) в) г)

Решение

Заметим, что последовательность 120... не может встретиться в начале числа. Единица в начале означает, что первая цифра больше второй, а двойка на втором месте, говорит о том, что вторая цифра больше, чем оба её соседа. Получается, что с одной стороны первая цифра больше второй, а с другой – вторая больше первой. Противоречие. Остальные варианты возможны: для а) подойдёт, например, число 9801234567, для в) число 5496382170, а для г) можно взять 2679108345. Заметим, что существуют и другие примеры и любой из них будет служить обоснованием того, что указанный вариант ответа возможен.

Клон 2

Катя записала десятизначное число, у которого все цифры различны. Затем каждую цифру девочка заменила на количество соседних цифр в числе, которые меньше неё. Какие из приведённых ниже последовательностей могли получиться в результате?

Варианты ответов: а) 1111011111 б) 0120201120 в) 1101101021 г) 0210120111

Ответ: а) б) г)

Клон 3

Катя записала десятизначное число, у которого все цифры различны. Затем каждую цифру девочка заменила на количество соседних цифр в числе, которые меньше неё. Какие из приведённых ниже последовательностей могли получиться в результате?

Варианты ответов: а) 0201111201 б) 0111111120 в) 0111111201 г) 1201201020

Ответ: а) б) в)

Клон 4

Катя записала десятизначное число, у которого все цифры различны. Затем каждую цифру девочка заменила на количество соседних цифр в числе, которые меньше неё. Какие из приведённых ниже последовательностей могли получиться в результате?

Варианты ответов: а) 2101101021 б) 0111111120 в) 0201120201 г) 0112011120

Ответ: б) в) г)

7. Клон 1

В выражении $ОЛ * ИМ * П * ИА * ДА$ требуется поставить вместо звёздочек два знака плюс и два знака минус, а буквы заменить цифрами по правилу ребуса (одинаковые буквы – одинаковыми цифрами, а разные – разными). Какое наибольшее значение выражения можно получить таким образом? Первая цифра в двузначном числе должна быть отлична от нуля.

Ответ: 263

Решение

Значение выражения окажется наибольшим, если слагаемые с плюсом будут максимально возможными, а слагаемые с минусом – минимальными. Плюсы необходимо поставить перед двузначными числами ИМ и ИП, тогда мы получим максимально возможную сумму из-за того, что в разряде десятков сможем использовать максимальную цифру 9 два раза.

Далее максимизируем значение выражения

$$ОЛ + ИМ - П + ИА - ДА = 10 \cdot (2И + О - Д) + (М + Л - П).$$

Из последнего равенства видно, что И умножается на 20, О – на 10, а М и Л на 1. Чтобы получить максимальную сумму, нужно наибольшую цифру умножать на наибольшее число. Тогда $И=9$, $О=8$, $М=7$ и $Л=6$ (можно взять 6 и 7 в другом порядке). Аналогично получаем с цифрами, перед которыми стоит знак минус. Самой маленькой должна быть Д, так как она умножается на 10. Но Д не может быть нулём, так как это первая цифра двузначного числа. Тогда $Д=1$, $П=0$. Вместо цифры А можно взять любую из оставшихся цифр, так как она на результат не влияет. Пусть, например, $А=5$. Наибольшее значение выражения будет в итоге равно $86 + 97 - 0 + 95 - 15 = 263$.

Клон 2

В выражении $КР * ОС * СВ * ОР * Д$ требуется поставить вместо звёздочек два знака плюс и два знака минус, а буквы заменить цифрами по правилу ребуса (одинаковые буквы – одинаковыми цифрами, а разные – разными). Какое наибольшее значение выражения можно получить таким образом? Первая цифра в двузначном числе должна быть отлична от нуля.

Ответ: 263

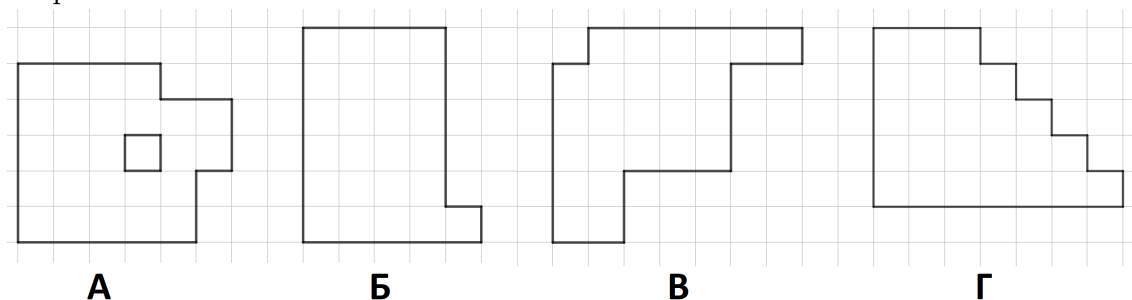
Клон 3

В выражении $К * АР * ТИ * НН * АЯ$ требуется поставить вместо звёздочек два знака плюс и два знака минус, а буквы заменить цифрами по правилу ребуса (одинаковые буквы – одинаковыми цифрами, а разные – разными). Какое наибольшее значение выражения можно получить таким образом? Первая цифра в двузначном числе должна быть отлична от нуля.

Ответ: 170

8. Клон 1

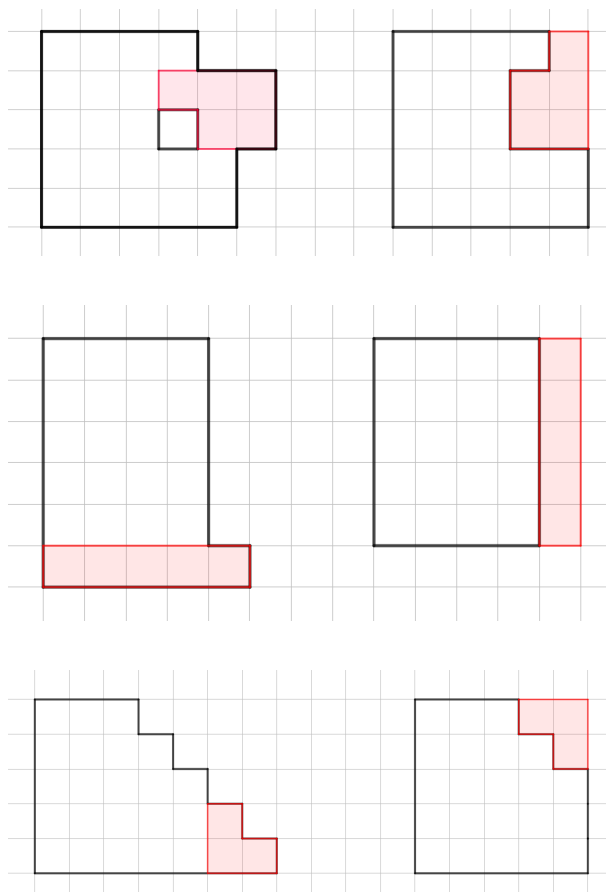
Какие из приведённых четырёх фигур можно разрезать по линиям сетки на две части, из которых получится сложить квадрат 5×5 ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



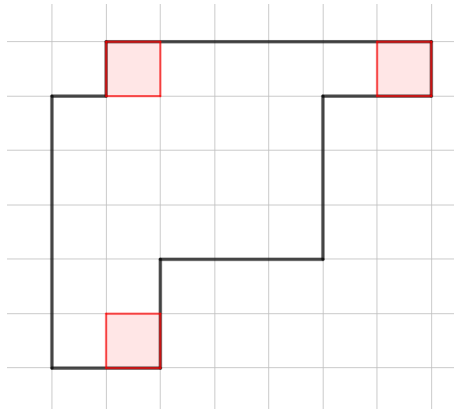
Ответ: А, Б, Г

Решение

Покажем, как можно разрезать фигурки А, Б, Г.

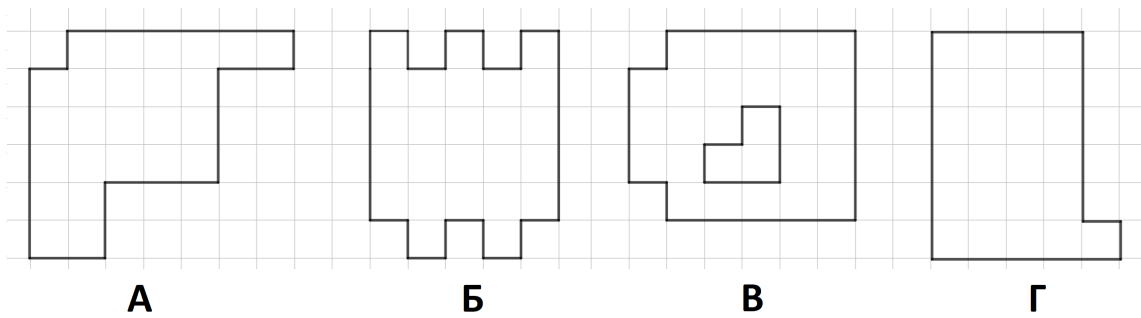


Теперь докажем, что фигуру В разрезать невозможно. Выделим в ней три квадратика и заметим, что никакие два из них не могут остаться в одной части, так как длина стороны полученной фигуры окажется больше 5 клеток. С другой стороны, так как мы разрезаем фигуру на две части, то найдётся часть, в которой будут находиться хотя бы два из выделенных квадратиков. Получили противоречие.



Клон 2

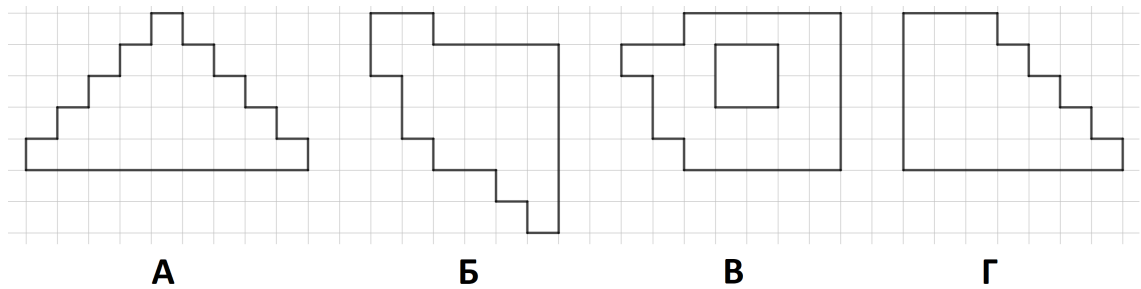
Какие из приведённых четырёх фигур можно разрезать по линиям сетки на две части, из которых получится сложить квадрат 5×5 ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Ответ: Б, В, Г

Клон 3

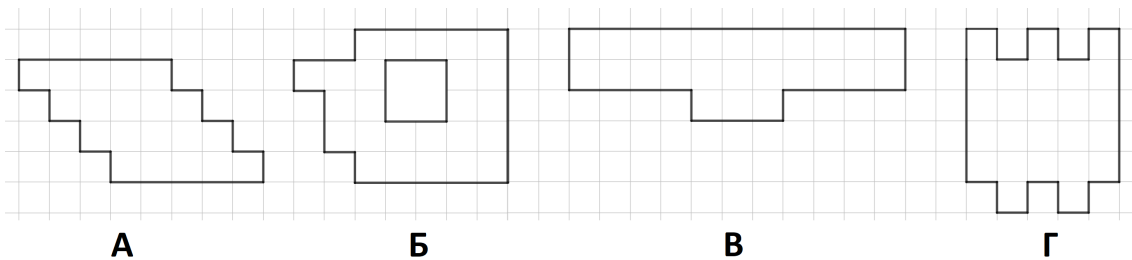
Какие из приведённых четырёх фигур можно разрезать по линиям сетки на две части, из которых получится сложить квадрат 5×5 ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Ответ: А, В, Г

Клон 4

Какие из приведённых четырёх фигур можно разрезать по линиям сетки на две части, из которых получится сложить квадрат 5×5 ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Ответ: Б, Г