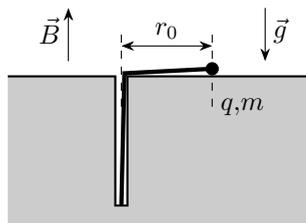


11 класс

Задача №1. Две окружности

В толстой плите из непроводящего твёрдого материала перпендикулярно поверхности просверлено отверстие маленького диаметра, глубина которого меньше толщины плиты. К «дну» отверстия прикреплён один конец резинки с коэффициентом жёсткости k . Длина недеформированной резинки в точности равна глубине отверстия. На другом конце резинки прикреплена бусинка массы m , заряженная положительным зарядом q . Плита расположена горизонтально в поле тяжести. Поверхность плиты гладкая. Перпендикулярно поверхности плиты включено однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен противоположно вектору ускорения свободного падения. Величина индукции магнитного поля равна B . Растягивая резинку, бусинку смещают по поверхности плиты на расстояние r_0 от оси отверстия и отпускают, сообщив ей такую перпендикулярную резинке скорость, что бусинка движется по окружности.



1. Определите угловые скорости движения бусинки при вращении её по часовой стрелке и против часовой стрелки (если смотреть за её движением сверху).

Сила, действующая на бусинку, зависит и от ее координаты \vec{r} , и от ее скорости \vec{v} линейным образом. Поэтому, если есть два разных закона движения $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$, описывающие некоторые движения бусинки, то уравнение $\vec{r}(t) = \alpha \cdot \vec{r}_1(t) + \beta \cdot \vec{r}_2(t)$ при любых постоянных α и β правильно описывает закон физически реализуемого движения этой бусинки под действием таких же сил (ведь скорость и ускорение бусинки в любой момент времени будут описываться такими же комбинациями). Например, если бусинку из того же начального положения, что и в пункте 1, отпускают без начальной скорости, то закон ее движения можно найти как результат наложения («суперпозиции») законов вращений, изученных Вами в этом пункте.

2. На какое минимальное расстояние к оси отверстия приблизится бусинка после отпускания без начальной скорости с расстояния r_0 от отверстия?

3. Через какое время τ после отпускания бусинка вновь окажется на расстоянии r_0 от оси отверстия?

4. Изобразите траекторию бусинки для случая $q^2 B^2 / (mk) = 1/2$. Через какое время после отпускания бусинка в первый раз окажется в исходной точке?

Задача №2. Лепёшка из ртути

На верхнее горизонтальное основание сплошного кругового цилиндра с площадью поперечного сечения S аккуратно налили немного ртути. Краевой угол

смачивания материала, из которого изготовлен этот цилиндр, равен θ . Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен σ , плотность ртути равна ρ . Ускорение свободного падения равно g . Считайте, что параметры σ , ρ , g и S удовлетворяют неравенству:

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ll \sqrt{S}.$$

1. При каком минимальном значении объёма ртути V_0 она целиком покроеет основание цилиндра?

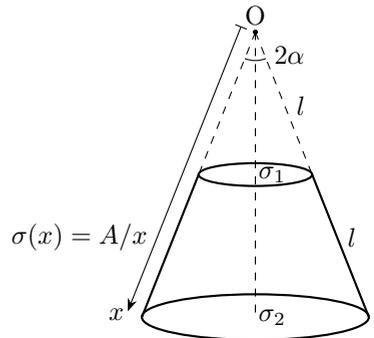
На основание цилиндра наливают ртуть объёмом $V < V_0$. Сверху аккуратно помещают второй цилиндр с таким же поперечным сечением, но изготовленный из другого материала, который полностью не смачивается ртутью. Считайте расположение цилиндров и ртути всё время осесимметричным.

2. При какой минимальной массе m_1 верхнего цилиндра ртуть будет контактировать с основанием нижнего цилиндра по всей площади его поверхности?

3. При какой минимальной массе m_2 верхнего цилиндра ртуть вытечет из зазора между цилиндрами? Считайте, что граница между основанием цилиндра и его боковой поверхностью является закруглённой (радиус закругления много меньше толщины слоя ртути) и выпуклой.

Задача №3. Усечённый конус

Прямой сплошной непроводящий усечённый конус заряжен по боковой поверхности так, что его поверхностная плотность заряда зависит от расстояния до вершины O целого конуса как $\sigma(x) = A/x$, где A — известная положительная константа. Основания усечённого конуса заряжены однородно с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 (см. рис.). Длина образующей и половинный угол раствора конуса, дополняющего усечённый конус до целого, равны l и $\alpha = 30^\circ$ соответственно, длина образующей усечённого конуса равна l .



1. Пусть $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$, где σ_0 — известная величина. Найдите вектор напряжённости \vec{E}_O в точке O .

В конусе просверлили тонкий канал, так что пробный отрицательный заряд $-q$ ($q > 0$) массы m может без трения перемещаться вдоль оси симметрии конуса. Далее справедливо $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$.

2. Докажите, что существует положение равновесия пробного заряда, не зависящее от значения σ_0 . Найдите это положение равновесия. В качестве ответа

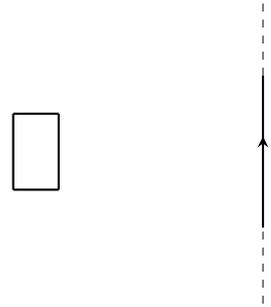
приведите расстояние от него до точки O .

3. При каких значениях σ_0 найденное положение равновесия будет устойчивым? Для значений, соответствующих устойчивому равновесию, найдите период малых колебаний пробного заряда в окрестности положения равновесия.

Примечание: конус закреплён, диэлектрическая проницаемость усечённого конуса $\varepsilon = 1$, влиянием силы тяжести и явлениями магнетизма пренебречь.

Задача №4. Рамка и провод

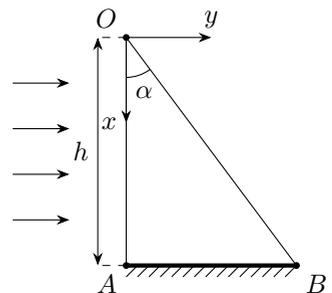
Жёсткая прямоугольная рамка, изготовленная из тонкой проволоки, может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности, на которой закреплён тонкий бесконечно длинный прямолинейный провод. На рисунке показан вид сверху на данную систему. Изначально силы токов в проводе и в рамке равны нулю. Рамка покоится в таком положении, что одна из пар её сторон параллельна проводу, причём расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки во много раз превышает все размеры рамки. Силу тока в проводе увеличивают до некоторого максимального значения настолько быстро, что смещением рамки за время увеличения силы тока можно пренебречь. В дальнейшем силу тока в проводе поддерживают постоянной. Оказалось, что в момент достижения силой тока в проводе максимального значения скорость рамки равнялась v_0 . Индуктивностью рамки можно пренебречь, а её сопротивление можно считать постоянным. Чему будет равна скорость рамки v_1 спустя очень большое время после достижения силой тока в проводе максимального значения?



Задача №5. Неоднородность в призме

Экспериментатор Глюк проводит оптические исследования со сплошной призмой, поперечное сечение OAB которой представляет собой прямоугольный треугольник с катетами AB и $OA = h$. Все грани призмы либо параллельны, либо перпендикулярны плоскости рисунка. Если ввести прямоугольную систему координат xOy с началом в точке O так, как показано на рисунке, то показатель преломления материала призмы зависит только от координаты x по закону:

$$n(x) = \frac{3}{2 - x/h}.$$



Глюк решил целиком осветить грань призмы, содержащую OA и перпендикулярную плоскости рисунка, перпендикулярным ей пучком света. Дно призмы, содержащее AB и перпендикулярное плоскости рисунка, покрыто веществом, полностью поглощающим попавший на неё свет. Призма расположена в воздухе, показатель преломления которого можно считать равным единице. Далее рассматривайте только лучи, попадающие внутрь призмы через точки, расположенные на стороне OA призмы.

1. Рассмотрим луч, попадающий в призму в точке с координатой x_0 . Найдите уравнение траектории данного луча внутри призмы до попадания на стороны AB и OB призмы. Значения x , при которых полученное уравнение траектории является применимым, находить не обязательно.

2. При каких значениях угла $\angle AOB = \alpha$ лучи света попадают во все точки стороны OB сечения призмы?

3. При каких значениях угла α все лучи, достигнувшие стороны OB сечения призмы, преломляются и проходят в воздух?