Возможные решения

Задача №9-Е1. Весы Роберваля

Фото установленных и сбалансированных весов представлено на рисунке 1. Геометрические размеры установки: $a = 184$ мм, $b = 300$ мм.

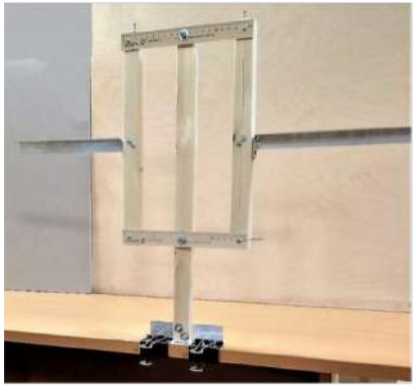


Рис. 1

Для определения момента силы трения M в шарнире будем добавлять малые грузы (дополнительные шайбы) в любом месте полки весов, пока не начнётся движение полки вниз. Это произойдет при общей массе малых грузов Δm. Рассчитаем момент силы трения в шарнире, используя метод виртуальных перемещений. Он основан на том факте, что при выводе механической системы из положения равновесия на бесконечно малое расстояние суммарная работа внешних сил равна нулю.

При опускании правого конца рычага длиной $a/2$ на расстояние Δh, жёстко связанный с ним цилиндр шарнира радиусом R поворачивается на угол φ и, соответственно, проскальзывает с силой трения $F_{\text{тр}}$ по неподвижному основанию на длину дуги ΔL (см. рисунок 2). В нашем случае:

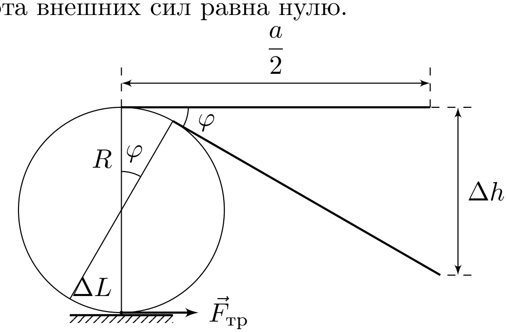


Рис. 2

$$\Delta mg\Delta h = F_{\text{тр}}\Delta L; \Delta mg\frac{a}{2}\varphi = F_{\text{тр}}R\varphi; M = F_{\text{тр}}R = \Delta mg\frac{a}{2}.$$

В силу конструктивного несовершенства исследуемой установки масса дополнительного груза Δm, выводящего весы из положения равновесия, может зависеть от того, с какой стороны расположен этот груз. Целесообразно проверить, насколько совпадают или отличаются значения Δm при размещении их на левой или правой полках весов. На контрольной установке были получены следующие результаты при расположении дополнительных грузов справа: $\Delta m_{\text{п}} = 4$ г и $M_{1\text{п}} = \Delta m_{\text{п}} g\frac{a}{2} = 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ Н $\cdot$ м. При расположении грузов слева: $\Delta m_{\text{л}} = 3$ г и $M_{1\text{л}} = \Delta m_{\text{л}} g\frac{a}{2} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$ Н $\cdot$ м. Усредним полученные результаты. Момент силы трения в верхнем шарнире наших весов без нагрузки равен:

$M_1 \approx 3{,}3 \cdot 10^{-3}$ Н · м.

Закрепим большие грузы максимально близко к вертикальным рейкам. Убедимся в устойчивости горизонтального положения верхней и нижней реек весов. Определим массу дополнительного груза Δm, выводящего систему из состояния покоя в нагруженном состоянии. На контрольной установке были получены следующие результаты при расположении дополнительных грузов справа: $\Delta m_{\text{п}} = 17$ г и $M_{2\text{п}} = \Delta m_{\text{п}} g \frac{a}{2} \approx 16 \cdot 10^{-3}$ Н · м.

При расположении грузов слева: $\Delta m_{\text{л}} = 15$ г и $M_{2\text{л}} = \Delta m_{\text{л}} g \frac{a}{2} \approx 14 \cdot 10^{-3}$ Н·м. Усредним полученные результаты и получим, что момент силы трения в верхнем шарнире наших весов под нагрузкой равен:

$M_2 = 15{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н · м, а отношение $n = \frac{M_2}{M_1} \approx 4{,}7$.

Горизонтальную силу F, действующую со стороны основания на нижний центральный шарнир, измеряем динамометром, зацепляя его за проволочную петлю, расположенную в нижней части правой рейки весов (см. рисунок 3).

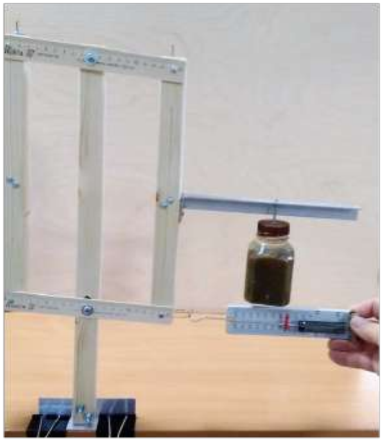


Рис. 3

Показания динамометра снимаем в тот момент, когда шарнир не касается боковых стенок большого отверстия в основании весов, а динамометр расположен горизонтально. В этот момент горизонтальная сила, создаваемая пружиной динамометра, заменяет горизонтальную силу реакции опоры со стороны боковой стенки отверстия. Измерения нужно проводить, тщательно подбирая положение динамометра в горизонтальной плоскости, обеспечивающее отсутствие перекосов нижнего основания весов, когда центральный шарнир свободно перемещается в отверстии.

Для удобства измерения величины x прочертим линию, соединяющую шарниры правой вертикальной рейки параллелограмма. Расстояние от этой линии до ближайшего отверстия на горизонтальной полке равно 52 мм. Так как остальные отверстия расположены с интервалом 20 мм, то все возможные для измерений расстояния x_i определяются соотношением $x_i = (52 + 20i)$ мм. Занесём эти значения в таблицу.

Последовательно перевешивая правый груз в отверстиях правой полки, снимаем зависимость $F(x)$. Результаты измерений представлены в таблице.

x, мм	72	92	112	132	152	172	192	212	232
F, Н	0,2	0,6	1,0	1,3	1,8	2,1	2,5	2,9	3,2

График полученной зависимости представлен на рисунке 4. На графике отложена погрешность измерений по оси F, которая принимается равной цене деления динамометра 0,1 Н.

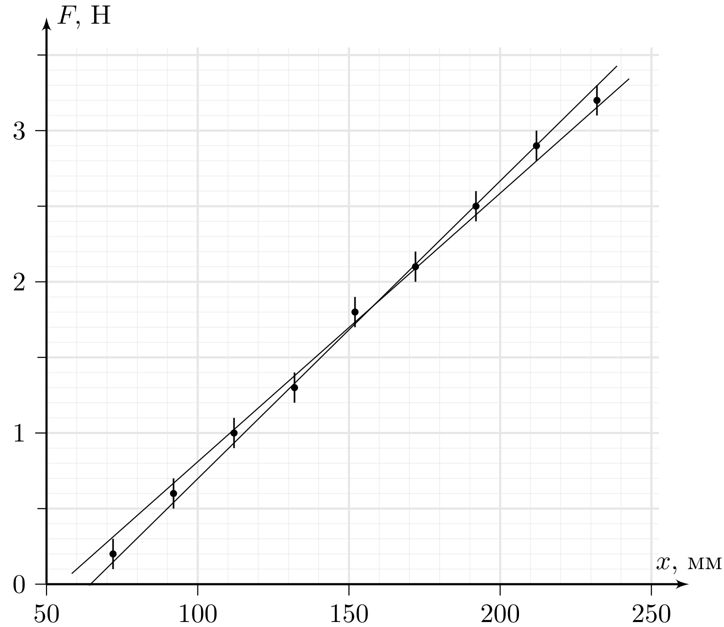


Рис. 4

Для нахождения массы грузов используем условие равновесия относительно верхнего шарнира. Правило моментов в этом случае имеет вид:

$$m_0 g(x + a/2) = m_0 g(x_0 + a/2) + Fb + M_{\text{трп}}, \tag{1}$$

где x_0 – расстояние от точки подвеса левого груза до оси левой рейки параллелограмма, $M_{\text{трп}}$ – суммарный момент, создаваемый силами трения покоя. Сила тяжести, действующая на рамку весов, не создаёт вращательного момента, так как приложена в центре параллелограмма и направлена вертикально вниз, её плечо относительно верхнего шарнира равно нулю. После преобразований получаем:

$$F = \frac{m_0 g x}{b} + C. \tag{2}$$

$F(x)$ является линейной зависимостью, угловой коэффициент которой $k = m_0 g/b$ даёт возможность определить массу груза. Второе слагаемое C в (2) является константой.

Проведём на графике прямые с максимально и минимально возможными наклонами (см. рисунок 4). Угловые коэффициенты этих прямых $k_{max} = 20{,}0$ Н/м и $k_{min} = 17{,}7$ Н/м, из которых получаем $m_{0max} = 610$ г и $m_{0min} = 540$ г. Среднее значение массы груза $m_0 = 575$ г, погрешность ± 40 г.

Окончательно для массы груза $m_0 = (580 \pm 40)$ г. Погрешность составляет 6%. Эталонное значение массы груза $m_0 = 560$ г.

Сила, действующая на рамку со стороны верхнего шарнира, представляет собой векторную сумму вертикальной силы $F_{\text{в}} = 2m_0g + Mg$, где M – полная масса рамки весов, и горизонтальной силы $F_{\text{г}}$, которая равна по величине и противоположно направлена силе F, действующей со стороны основания на нижний шарнир. Модули последних двух сил равны друг другу, так как они являются единственными горизонтальными силами, действующими на рамку, а вращательный момент относительно центра тяжести рамки отсутствует. Таким образом,

$$Q = \sqrt{F_{\text{в}}^2 + F^2}. \tag{3}$$

Для вычисления Q необходимо знать M. Положим основание весов на угол стола так, чтобы рамка не касалась стола (см. рисунок 5).

Потянем динамометром рамку вверх за проволочную петлю и зафиксируем его показание F_1 в том положении, где центральный шарнир не касается стенок большого отверстия в основании. В этом положении рамка находится в равновесии под действием двух сил, правило моментов для которых имеет вид: $F_1 b = Mg\frac{b}{2}$.

Так как в нашем случае измерения дают результат $F_1 = 1{,}4$ Н, находим $M = 290$ г, а $F_{\text{в}} = 2m_0g + Mg = 14{,}1$ Н. Подставляя это значение в (3) и используя данные таблицы пункта 5, вычисляем зависимость $Q(x)$ и заносим результаты в ту же таблицу измерений.

Рис. 5

x, мм	72	92	112	132	152	172	192	212	232
F, Н	0,2	0,6	1,0	1,3	1,8	2,1	2,5	2,9	3,2
Q, Н	14,10	14,11	14,13	14,16	14,21	14,26	14,32	14,39	14,46

График зависимости $Q(x)$ представлен на рисунке 6. График похож на параболу. Убедимся, что так и должно быть. В нашем случае можно считать, что $F \ll F_{\text{в}}$. Тогда

$$Q = \sqrt{F_{\text{в}}^2 + F^2} = F_{\text{в}}\sqrt{1 + \frac{F^2}{F_{\text{в}}^2}} \approx F_{\text{в}}\left(1 + \frac{F^2}{2F_{\text{в}}^2}\right) = F_{\text{в}} + \frac{F^2}{2F_{\text{в}}},$$

а в искомое выражение входит квадрат линейной зависимости $F(x)$. Что и требовалось доказать. Здесь мы воспользовались тем, что $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$ при $\alpha \ll 1$.

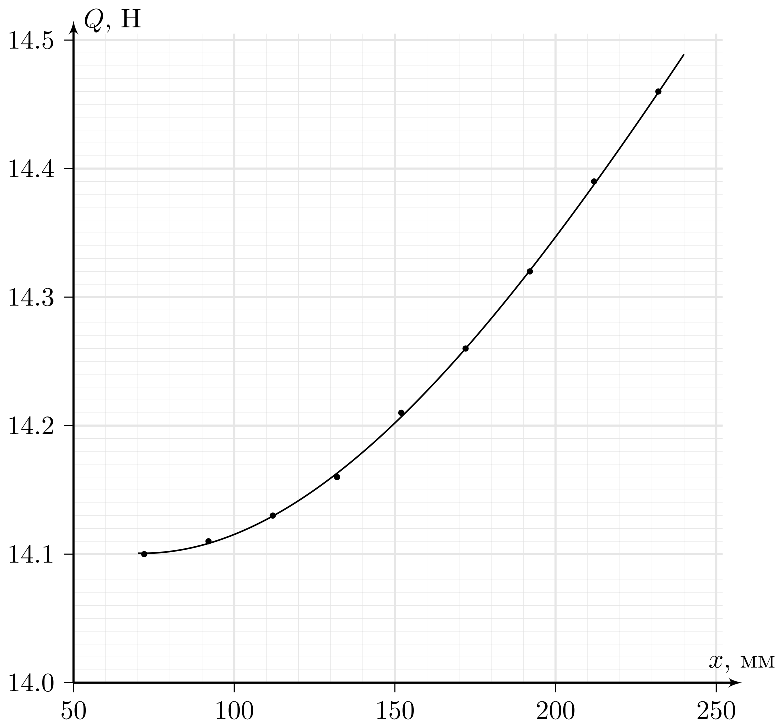


Рис. 6

Задача №9-E2. Путь в бесконечность

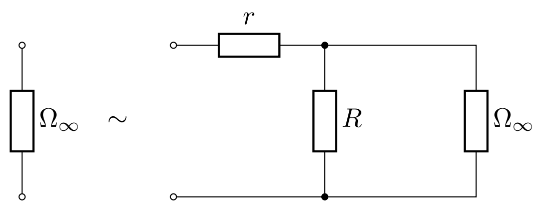
Мультиметром в режиме омметра измерим сопротивления всех резисторов. Полученные данные занесем в таблицу. Получим

$$r = (9{,}95 \pm 0{,}06)\ \text{кОм}, R = (998 \pm 4)\ \text{кОм}$$

r, кОм	R, кОм
$9{,}89 \pm 0{,}03$	997 ± 3
$9{,}94 \pm 0{,}03$	998 ± 3
$9{,}99 \pm 0{,}03$	998 ± 3
$9{,}95 \pm 0{,}03$	996 ± 3
$9{,}98 \pm 0{,}03$	997 ± 3
$9{,}93 \pm 0{,}03$	997 ± 3
$9{,}94 \pm 0{,}03$	1000 ± 3

Снимем зависимость эквивалентного сопротивления цепи $\Omega(n)$ от числа звеньев n.

n	Ω, кОм
1	1007 ± 3
2	511 ± 3
3	348 ± 3
4	268 ± 3
5	221 ± 3
6	191 ± 3
7	170 ± 3



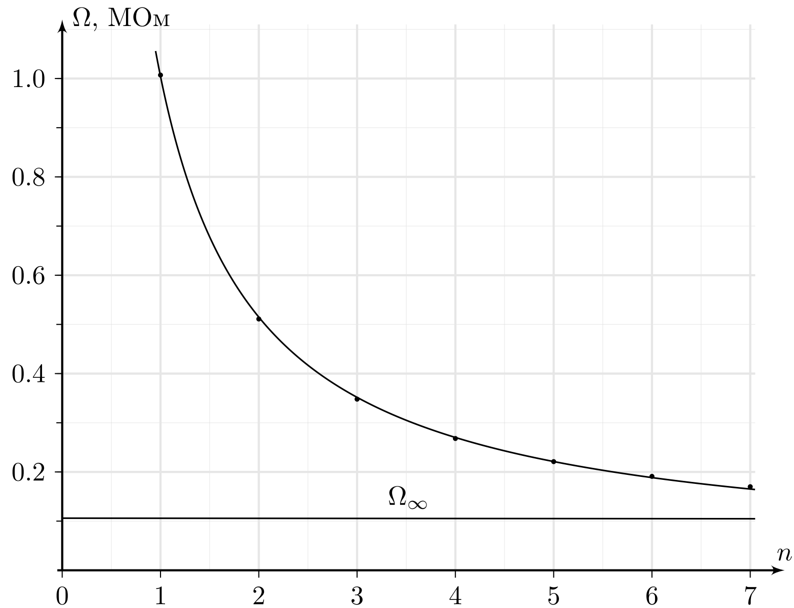
Если к цепи, состоящей из бесконечного (или очень большого) числа звеньев, добавить еще одно звено, то эквивалентное сопротивление цепи не изменится. Условие равенства эквивалентных сопротивлений:

$$\Omega(\infty) = r + \frac{R\Omega(\infty)}{R + \Omega(\infty)}$$

Решение этого уравнения дает результат

$$\Omega(\infty) = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4rR}}{2} \approx (104{,}8 \pm 0{,}5)\ \text{кОм}$$

Второй отрицательный корень уравнения физического смысла не имеет.



При $r = 0$ наша цепь превращается в n параллельно соединенных резисторов R

$$\Omega(n) = \frac{R}{n} = F(R, n).$$

Таким образом

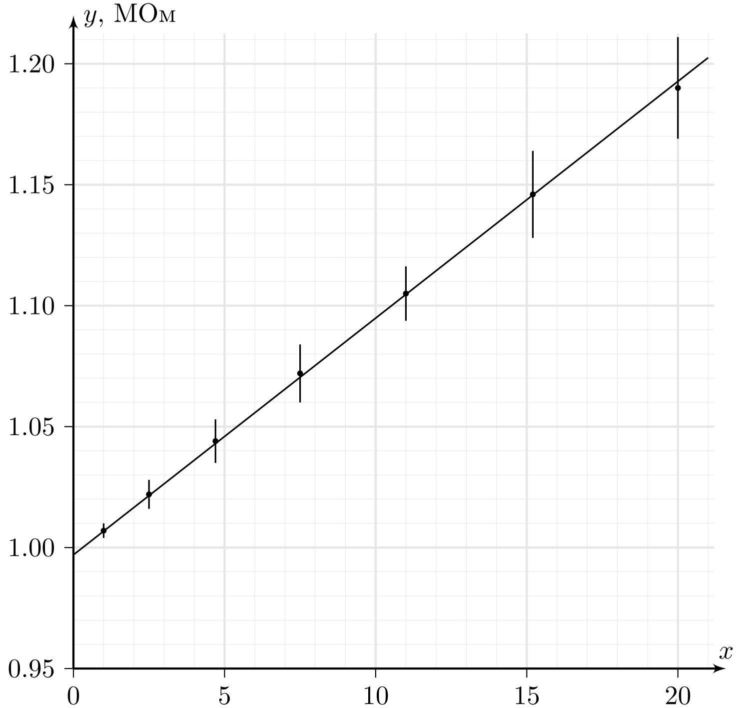
$$\Omega(n) = F(R, n) + f(r, n) = \frac{R}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} r. \qquad (*)$$

Если обозначить $y = n\Omega$ и $x = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$, то уравнение $(*)$ примет вид

$$y = rx + R$$

Пересчитаем таблицу $\Omega(n)$ в таблицу $y(x)$ и построим график.

$y = n\Omega$, кОм	$x = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$
1007 ± 3	1,0
1022 ± 6	2,5
1044 ± 9	4,7
1072 ± 12	7,5
1105 ± 15	11,0
1146 ± 18	15,2
1190 ± 21	20,0



Свободный коэффициент линейного графика равен $R = (997 \pm 4)$ кОм. Угловой коэффициент равен $r = (9{,}7 \pm 1{,}2)$ кОм. Эти значения совпадают в рамках погрешности со значениями, полученными в пункте 1.