

### Задача №11-Т1. Две окружности

1. Уравнение движения бусинки на резинке в магнитном поле  $\vec{B}$  имеет вид

$$m\vec{a} = -k\vec{r} + q[\vec{v} \times \vec{B}],$$

то есть (как и отмечено в условии) оно является *линейным* и *однородным* уравнением по отношению к закону движения  $\vec{r}(t)$  (сам вектор координаты, откладываемый от положения равновесия бусинки и его производные – скорость и ускорение – входят в уравнение только в первой степени). При движении по окружности радиуса  $r_0$  центростремительное ускорение бусинки создается силой упругости резинки и силой Лоренца, причем в зависимости от направления вращения сила Лоренца либо направлена к центру окружности, либо от него. Значит, величина угловой скорости бусинки при таком движении находится из уравнения

$$m\omega^2 r_0 = kr_0 \pm qB\omega r_0 \implies \omega^2 \pm \frac{qB}{m}\omega - \frac{k}{m} = 0.$$

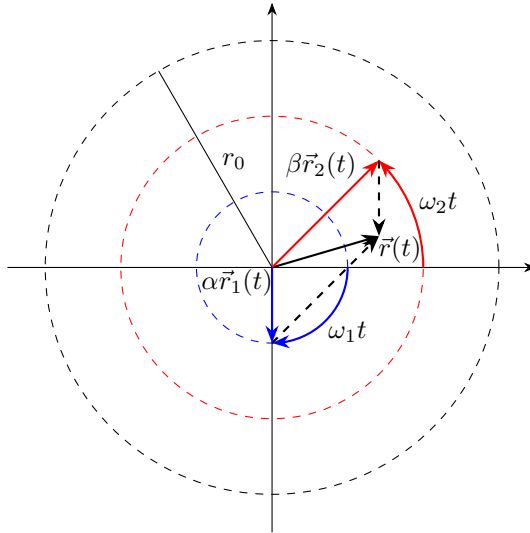
Далее введем обозначения  $\Omega \equiv \frac{qB}{2m}$  и  $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$ . Тогда, выбирая для каждого случая положительный корень, приходим к выводу, что при вращении по часовой стрелке величина угловой скорости (циклическая частота вращения)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} + \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2 B^2}{4m^2}} + \frac{qB}{2m},$$

а при вращении против часовой стрелки она равна

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} - \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2 B^2}{4m^2}} - \frac{qB}{2m} < \omega_1,$$

*Примечание:* в обоих случаях угловая скорость не зависит от радиуса окружности! Поэтому величина линейной скорости пропорциональна радиусу описываемой окружности.



2. Пусть теперь  $\vec{r}_1(t)$  – закон движения бусинки, вращающийся по окружности радиуса  $r_0$  по часовой стрелке, а  $\vec{r}_2(t)$  – закон движения бусинки, вращающийся по той окружности против часовой стрелки. Модули скоростей движения у бусинки при этих движениях различаются: легко найти, что  $|\vec{v}_1| = \omega_1 r_0$ , а  $|\vec{v}_2| = \omega_2 r_0$ . Если записать *суперпозицию* этих законов движения в виде

$$\vec{r}(t) = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_1(t) + \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_2(t),$$

то, в соответствии с линейностью и однородностью уравнения движения (и в соответствии с содержащейся в условии «подсказкой») этот закон тоже удовлетворяет уравнению движения. Легко определить начальные условия, которым он соответствует: поскольку  $\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0) \equiv \vec{r}_0$  и при различных направлениях вращения  $|\vec{v}_1(0)| = \omega_1 r_0 = \frac{\omega_1}{\omega_2} |\vec{v}_2(0)|$ , то  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  и  $\vec{v}(0) = 0$ . Следовательно, полученный закон описывает движение бусинки, запущенной без начальной скорости с расстояния  $r_0$  от отверстия! Мы обнаружили, что вектор координаты такой бусинки можно в любой момент времени найти как сумму вектора  $\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_1(t)$  с постоянной длиной  $\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega_1$  по часовой стрелке, и вектора  $\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_2(t)$  с постоянной длиной  $\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega_2$  против часовой стрелки от того же начального положения

(см. рисунок). Отметим, что угол между этими векторами в момент времени  $t$  равен  $\varphi(t) = (\omega_1 + \omega_2)t$ . Поэтому, по теореме косинусов, в этот момент времени расстояние от бусинки до отверстия удовлетворяет уравнению

$$r^2(t) = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \right)^2 + \left( \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \right)^2 + 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \cdot \cos [(\omega_1 + \omega_2)t].$$

Значит,

$$r(t) = \frac{r_0}{\omega_1 + \omega_2} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cdot \cos [(\omega_1 + \omega_2)t]}.$$

Таким образом, циклическая частота изменения расстояния от бусинки по положению равновесия равна  $\omega_1 + \omega_2 = 2\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}$ , причем минимальное значение

$$r_{\min} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 = \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} r_0$$

расстояние принимает в моменты времени  $t_n = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} \left( n + \frac{1}{2} \right)$  (где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Отметим, что для нахождения  $r_{\min}$  не обязательно исследовать закон изменения расстояния  $r(t)$ : достаточно понять, что расстояние от бусинки до отверстия минимально, когда вектора «составляющих» векторов нашей суперпозиции направлены противоположно. Тогда ясно, что  $r_{\min}$  равно разности их модулей.

3. Из формулы для  $r(t)$  видно, что максимальное расстояние от бусинки до отверстия равно начальному  $r_{\max} = r_0$ , и оно достигается в моменты времени

$t'_n = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} n$  (где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Как видно, впервые после отпускания это произойдет в момент времени

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}$$

Как и в предыдущем пункте, можно получить этот ответ без нахождения  $r(t)$  – достаточно образного представления движения. Тогда ясно, что расстояние максимально, когда вращающиеся навстречу друг другу вектора «составляющих» векторов суперпозиции встречаются, и  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}$ .

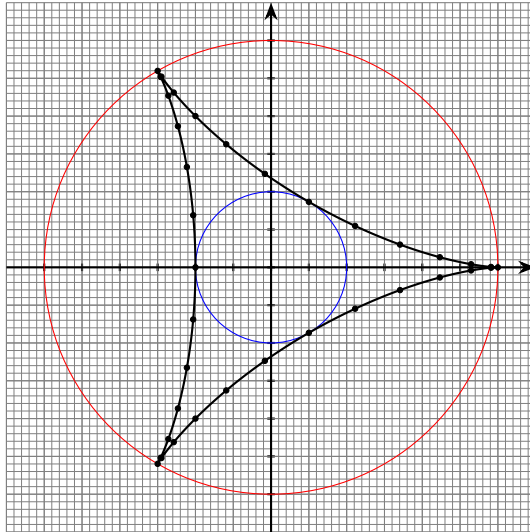
4. При таком соотношении параметров  $\Omega^2 = \omega_0^2/8$ , и поэтому  $\omega_1 = \omega \cdot \sqrt{2}$ , а  $\omega_2 = \omega_0/\sqrt{2}$ . Значит, отношение угловых скоростей  $\omega_1 : \omega_2 = 2 : 1$ , то есть общее движение периодическое, и траектория оказывается замкнутой. В этом случае

$$\vec{r}_1(t) = \frac{1}{3} \vec{r}_1(t) + \frac{2}{3} \vec{r}_2(t),$$

длины векторов, сумма которых дает  $\vec{r}(t)$ , равны  $r_0/3$  и  $2r_0/3$ , а закон изменения расстояния

$$r(t) = \frac{r_0}{3} \sqrt{5 + 4 \cdot \cos [3\omega_2 t]}.$$

Ясно, что период движения – наименьшее общее кратное периодов двух составляющих движений, которое в нашем случае равно периоду меньшей частоты  $\omega_2$ .



Поэтому впервые после отпускания бусинка окажется в исходной точке спустя время

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

Период изменения расстояния от отверстия

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3\omega_0} = \frac{1}{3}T_2.$$

Поэтому за один период движения бусинка трижды достигает максимального расстояния  $r_0$ , и трижды – минимального  $r_0/3$ . Таким образом, траектория за «полный оборот» вокруг оси отверстия трижды проходит от окружности с радиусом  $r_0$  до окружности с радиусом  $r_0/3$  и обратно, причем вблизи общих точек с большей окружностью бусинка движется по радиусу (траектория касается радиуса), в общих точках с меньшей окружностью радиальная скорость бусинки

обращается в ноль при ненулевой угловой скорости – бусинка движется перпендикулярно радиусу, и ее траектория касается меньшей окружности в общих точках. По этим сведениям можно достаточно корректно изобразить вид траектории (см. рисунок). Другой способ изучить траекторию – записать закон движения бусинки в декартовых координатах  $(x, y)$ . Удобно совместить начало координат с осью отверстия, а ось  $x$  направить так, чтобы она проходила через начальное положение бусинки. Проецируя закон движения на эти оси, получим:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{r_0}{3} [2 \cos(\omega_2 t) + \cos(2\omega_2 t)] \\ y(t) = \frac{r_0}{3} [2 \sin(\omega_2 t) - \sin(2\omega_2 t)] \end{cases}$$

Тогда можно построить траекторию «по точкам», выбрав несколько характерных значений  $\omega_2 t$ . Впрочем, и в этом случае удобно в первую очередь построить положение точек, отвечающих моментам, когда бусинка находится на максимальном и минимальном расстояниях от отверстия, то есть  $\omega_2 t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ .

### Задача №11-Т2. Лепёшка из ртути

1. Неравенство из условия задачи позволяет считать верхнюю поверхность ртути практически плоской, а горизонтальный радиус ртутной "лепёшки" много большим, чем её толщина. Это даёт возможность определить толщину слоя ртути  $h$ , рассматривая задачу как двумерную. Будем считать, что ртуть заполнила всю площадь основания цилиндра, но при этом не перешла на его боковую поверхность.

Рассмотрим участок слоя жидкости шириной  $L$  и условие её равновесия в проекции на горизонтальную ось  $x$  (силы, действующие на этот участок в горизонтальном направлении, изображены на рис.):

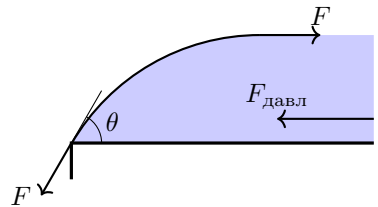
$$F_x = F \cos \theta - F + p_{\text{ср}} L h = \sigma L \cos \theta - \sigma L + p_{\text{ср}} L h = 0,$$

где  $p_{\text{ср}}$  – среднее по высоте гидростатическое давление ртути, равное  $p_{\text{ср}} = \rho g h / 2$ . Тогда имеем:

$$\frac{\rho g h^2}{2} = \sigma(1 - \cos \theta) \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{\rho g}}.$$

Когда ртуть заполняет всю поверхность основания цилиндра, её объём равен

$$V_0 = S h = S \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{\rho g}}.$$



2. Если поставить на ртуть цилиндр массой  $m$ , то в каждой точке жидкости гидростатическое давление возрастёт на величину  $mg/S_{\text{к}}$ , где  $S_{\text{к}}$  — площадь контакта ртути и поставленного на неё цилиндра. Среднее гидростатическое давление в слое ртути в этом случае составит

$$p_{\text{ср}} = \frac{\rho gh}{2} + \frac{mg}{S_{\text{к}}}.$$

Условие равновесия сил, действующих на участок ртути единичной ширины в проекции на ось  $x$  (см. рис.), примет вид:

$$\sigma(1 - \cos \theta) = \frac{\rho gh^2}{2} + \frac{mgh}{S_{\text{к}}}.$$

Отметим, что  $h = V/S_{\text{к}}$ , поскольку поверхность ртути можно считать плоской (после постановки на неё цилиндра это приближение становится ещё более справедливым). Подставляя выражение для  $h$ , получим:

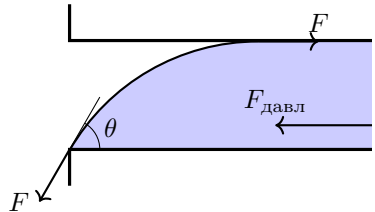
$$\sigma(1 - \cos \theta) = \frac{\rho g V^2}{2 S_{\text{к}}^2} + \frac{m g V}{S_{\text{к}}^2}.$$

Ртуть полностью заполнит зазор между цилиндрами при  $S_{\text{к}} = S$ , следовательно

$$m_1 = \frac{\sigma S^2(1 - \cos \theta)}{g V} - \frac{\rho V}{2}.$$

*Примечание: обращаем внимание, что в выражении для давления ртути нельзя считать  $\rho gh \ll mg/S$ , так как эти величины могут быть одного порядка!*

3. В процессе перехода границы ртути с основания нижнего цилиндра на его боковую поверхность направление касательной к поверхности ртути поворачивается на  $90^\circ$ . Ртуть станет вытекать из зазора между цилиндрами, когда сила гидростатического давления превысит максимально возможную величину горизонтальной компоненты силы поверхностного натяжения. Теоретически, этот максимум соответствует положению касательной, при котором она является горизонтальной, однако это положение может быть нереализуемо при заданном значении угла смачивания  $\theta$ .

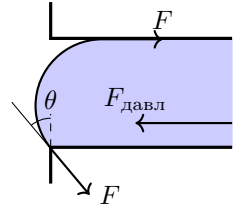


Рассмотрим два случая.

**Первый случай:**  $\theta < \pi/2$ .

В данном случае касательная к поверхности жидкости никогда не станет горизонтальной, поэтому величина горизонтальной компоненты силы поверхностного натяжения будет максимальной, если касательная будет направлена под углом  $\theta$  к боковой поверхности цилиндра (см. рис.). Тогда

$$F_{max} = \sigma L(1 + \sin \theta).$$



Записывая условие равновесия, получим, что

$$\sigma(1 + \sin \theta) = \frac{\rho g V^2}{2S^2} + \frac{m_2 g V}{S^2},$$

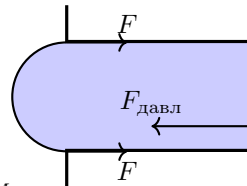
откуда

$$m_2 = \frac{\sigma S^2(1 + \sin \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

**Второй случай:**  $\theta \geq \pi/2$ .

В данном случае касательная к поверхности жидкости может стать горизонтальной (см. рис.). Тогда максимальная горизонтальная компонента силы поверхностного натяжения будет равна

$$F_{max} = 2\sigma L.$$



Записывая условие равновесия в этом случае, получим

$$2\sigma = \frac{\rho g V^2}{2S^2} + \frac{m_2 g V}{S^2},$$

откуда

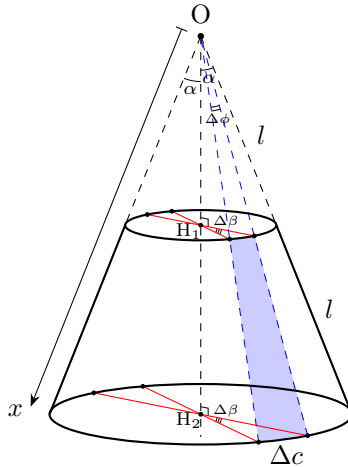
$$m_2 = \frac{2\sigma S^2}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

$$m_2 = \begin{cases} \frac{\sigma S^2(1 + \sin \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2} & \text{при } \theta < \pi/2, \\ \frac{2\sigma S^2}{gV} - \frac{\rho V}{2} & \text{при } \theta \geq \pi/2. \end{cases}$$

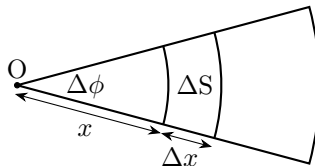
### Задача №11-ТЗ. Усечённый конус

#### 1. Первый способ:

Из осевой симметрии системы следует, что в любой точке на оси конуса вектор напряженности параллелен оси. Мысленно разрежем конус на  $2N$  одинаковых практически плоских трапеций. При увеличении  $N$  площадь кусочка искривленной трапеции стремится к площади плоской трапеции, так что при достаточно большом  $N$  кусочки можно считать плоскими.



Наибольшее основание  $\Delta c$  трапеции выражается через центральный угол  $\Delta\beta$  окружности сечения с наибольшим радиусом или через угол  $\Delta\phi$  при вершине треугольника, получающегося при дополнении трапеции, как  $\Delta c = l\Delta\beta = 2l\Delta\phi$ . При достаточно малом  $\Delta\beta$  справедливо соотношение  $\Delta c \ll l$ , так что в первом приближении каждую из трапеций можно представить в виде тонкого стержня с некоторой эффективной линейной плотностью заряда  $\lambda(x)$ .



Найдем  $\lambda(x)$ . Выразим заряд на малой площади треугольника, получающегося при дополнении трапеции.

$$\Delta q = \sigma(x) \Delta S = \sigma(x) x \Delta x \Delta \phi = A \Delta x \Delta \phi$$



Тогда имеем

$$\lambda(x) = \frac{\Delta q}{\Delta x} = A \Delta \phi = A \frac{\Delta \beta}{2} \equiv \text{const.}$$

Рассмотрим тонкий диэлектрический равномерно заряженный стержень длины  $l$  с линейной плотностью заряда  $\lambda$ . Найдём напряжённость на прямой, содержащей стержень, в точке  $O$  на расстоянии  $l$  от стержня. Сделаем это методом разности потенциалов. При смещении из точки  $O$  на расстояние  $\Delta x \ll l$  имеем

$$\Delta E_O = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = k\lambda \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{2l} \right) = \frac{A}{8\varepsilon_0 l} \frac{\Delta \beta}{2\pi}$$

Тогда с учётом проекции на ось после суммирования  $\Delta \beta$  от 0 до  $2\pi$  получаем вклад в результирующую напряжённость от боковой поверхности конуса:

$$E_O^{\text{side}} = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}$$

Нормальная компонента поля к плоской равномерно заряженной площадке в любой точке пространства выражается через телесный угол, под которым видна площадка из этой точки. Покажем, что если по плоскому слою равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ , то в точке  $A$  компонента электрического поля, перпендикулярная слою, равна:

$$E_n = \frac{\sigma \Omega_A}{4\pi \varepsilon_0}$$

где  $\Omega_A$  – телесный угол, под которым виден плоский слой из точки  $A$ . *Доказательство:* Рассмотрим элемент плоского слоя с площадью  $dS$ . Пусть  $\vec{e}_n$  – единичный вектор нормали к поверхности слоя, направленный к точке  $A$ , а  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведённый от элемента слоя к точке  $A$ . Тогда для нормальной компоненты электрического поля элемента слоя получим:

$$d\vec{E}_n = \vec{e}_n \cdot \frac{\sigma \vec{r} dS}{4\pi \varepsilon_0 r^3} = \frac{\sigma}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3}$$

Если направления векторов  $\vec{r}$  и  $d\vec{S}$  изменить на противоположные, величина  $(\vec{r} \cdot d\vec{S})/r^3$  по определению будет представлять собой элемент телесного угла  $d\Omega_A$ , под которым элемент плоского слоя виден из точки  $A$ . Таким образом:

$$dE_n = \frac{\sigma d\Omega_A}{4\pi \varepsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma \Omega_A}{4\pi \varepsilon_0}$$

что и требовалось доказать.

Так как оба основания видны из точки  $O$  под одинаковым телесным углом, а  $\sigma_1 = -\sigma_2$ , из теоремы о выражении нормальной к площадке напряженности через телесный угол следует, что суммарный вклад в результирующую напряженность от оснований

$$E_O^{bases} = 0$$

Значит,

$$E_O = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}$$

**Второй способ:**

Разобьём боковую поверхность на колечки и начнём интегрировать.

$$E_o = \int_l^{2l} k \frac{2\pi x \sin(\alpha)}{x^2} \frac{A}{x} \cos(\alpha) dx = \frac{\sqrt{3}A}{8\varepsilon_0} \int_l^{2l} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}$$

Пусть  $y$  — расстояние от центра диска, заряженного с  $\sigma_0$ , по его оси. Радиус диска  $R$ . Будем интегрировать по радиусу.

$$E^{disk}(y) = \frac{y\sigma_0}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right)$$

В нашем случае

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} l, \quad R_1 = \frac{l}{2}$$

$$y_2 = \sqrt{3} l, \quad R_2 = l$$

Тогда, так как  $\sigma_1 = -\sigma_2$ , суммарная напряжённость от оснований:

$$E_O^{bases} = 0$$

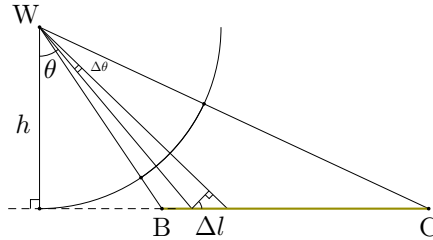
$$E_O = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}$$

**2. Первый способ:**

Рассмотрим пару противоположных стержней. Они образуют равнобокую трапецию с основаниями  $l$ ,  $2l$  и боковой стороной  $l$ .

Заметим, что для равномерно заряженного стержня BC в любой точке W, не принадлежащей стержню, напряжённость направлена вдоль биссектрисы угла  $\angle BWC$ .

*Доказательство:* Рассмотрим малый элемент длины  $\Delta l$  стержня. Напряжённость от него в точке W эквивалентна напряжённости от точечного заряда  $\Delta q = \lambda \Delta l$ .



По закону Кулона,

$$\Delta E_W = k \frac{\lambda \Delta l \cos^2 \theta}{h^2}$$

Заметим, что

$$\frac{h}{\cos \theta} \Delta \theta = \cos(\theta) \Delta l$$

Тогда выражение для  $\Delta E_W$  примет вид

$$\Delta E_W = \frac{k \lambda}{h^2} h \Delta \theta$$

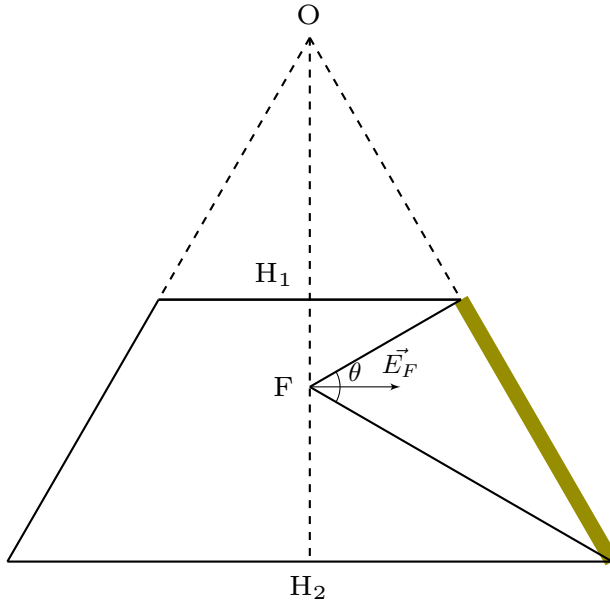
что в точности соответствует напряжённости от малого элемента длины  $h \Delta \theta$  дуги окружности радиусом  $h$  с плотностью заряда  $\lambda$ . Поскольку для дуги окружности в силу симметрии результирующая напряжённость в точке W направлена по биссектрисе центрального угла, то же самое верно и для стержня. Что и требовалось доказать.

Таким образом, напряжённость  $\vec{E}_F$  в точке пересечения диагоналей трапеции F от боковой стороны направлена вдоль биссектрисы угла  $\theta$ .

Заметим, что точка  $F'$ , в которой суммарная напряжённость от боковой поверхности усечённого конуса равна 0, совпадает с точкой F.

В самом деле.

Рассмотрим соотношения углов:  $\gamma_1 = \gamma_2$  - как вертикальные,  $\gamma_2 = \gamma_3$  - так как треугольник в основании равнобедренный,  $\varphi_1 + \gamma_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 + \gamma_3 = \pi/2$  - так как напряженность от боковой стороны должна быть перпендикулярна высоте конуса.



Получаем  $\varphi_1 = \varphi_2$ , значит биссектриса угла  $\theta$  перпендикулярна высоте конуса. В точке пересечения диагоналей напряженность от боковой стороны перпендикулярна высоте конуса, точки F и F' совпадают.

Согласно теореме о выражении нормальной к площадке напряженности через телесный угол, так как  $\sigma_1 = \sigma_2$ , в точке F пересечения диагоналей трапеции суммарная напряжённость от оснований конуса равна нулю при любом значении  $\sigma_0$ .

Из подобия треугольников получаем

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

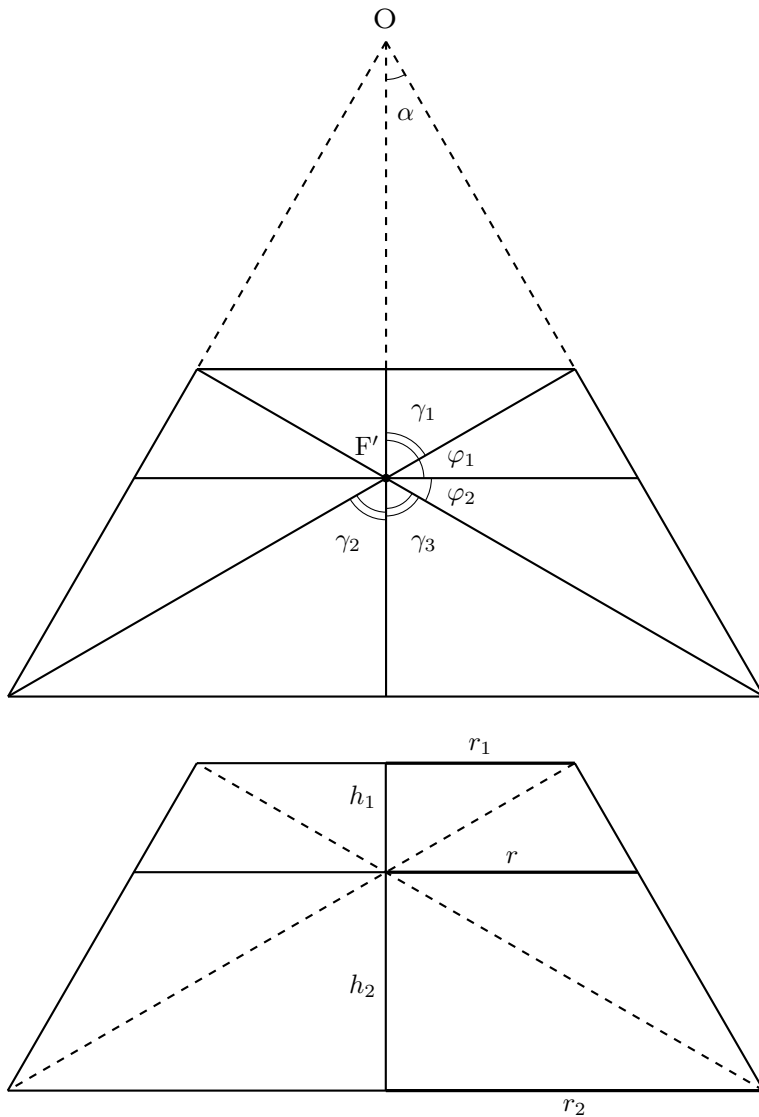
$$\frac{r - r_1}{h_1} = \frac{r_2 - r}{h_2}$$

Откуда:

$$r = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} \quad (*)$$

При  $r_1 = \frac{l}{2}$ ,  $r_2 = l$  получаем:

$$r = \frac{2}{3}l$$



В конусе

$$OF = \frac{r}{\operatorname{tg}(\alpha)}$$

Откуда имеем

$$OF = \frac{2\sqrt{3}}{3} l$$

**Второй способ:**

Введём координатную ось  $z$  с началом в точке  $O$  и направлением вдоль оси симметрии. Разобьём боковую поверхность усечённого конуса на колечки и для нахождения напряжённости проинтегрируем вклад от одного колечка в пределах изменения координаты  $x$  — от  $l$  до  $2l$ .

$$\begin{aligned} E^{sides}(z) &= \int_l^{2l} k \frac{2\pi x \sin(\alpha) A (x \cos(\alpha) - z)}{\left( (x \sin(\alpha))^2 + (x \cos(\alpha) - z)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dx = \\ &= \frac{A}{4\epsilon_0} \int_l^{2l} \frac{x \cos(\alpha) - z}{\left( (x \sin(\alpha))^2 + (x \cos(\alpha) - z)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dx \end{aligned}$$

Введём новую переменную:

$$u = x - \frac{\sqrt{3}}{2} z$$

Тогда выражение примет вид

$$E^{sides}(z) = \frac{A}{4\epsilon_0} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{l - \frac{\sqrt{3}}{2} z}^{2l - \frac{\sqrt{3}}{2} z} \frac{u}{\left( u^2 + \frac{z^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}} du - \frac{z}{4} \int_{l - \frac{\sqrt{3}}{2} z}^{2l - \frac{\sqrt{3}}{2} z} \frac{1}{\left( u^2 + \frac{z^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}} du \right]$$

Для взятия данных интегралов можно использовать подстановки Эйлера или Чебышёва или тригонометрическую подстановку, однако первообразная легко угадывается:

$$E^{sides}(z) = \frac{A}{4\epsilon_0} \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{\sqrt{4u^2 + z^2}} \Big|_{l - \frac{\sqrt{3}}{2} z}^{2l - \frac{\sqrt{3}}{2} z} - \frac{z}{4} \frac{8u}{z^2 \sqrt{4u^2 + z^2}} \Big|_{l - \frac{\sqrt{3}}{2} z}^{2l - \frac{\sqrt{3}}{2} z} \right].$$

После подстановки пределов и приведения к общему знаменателю имеем

$$E^{sides}(z) = \frac{l}{z} \left( \frac{2 \sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2} - \sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}}{\sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2} \sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}} \right)$$

Из условия

$$E^{sides}(z_0) = 0$$

получаем единственный корень

$$z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}l.$$

Теперь получим выражение для  $E^{bases}(z)$

Пусть  $y$  — расстояния от центра по оси диска, заряженного с  $\sigma_0$ . Радиус диска  $R$ . Будем интегрировать по радиусу.

$$E^{disk}(y) = \frac{y\sigma_0}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right)$$

Здесь напряженность положительна вдоль направления положительного отсчёта  $y$ .

В нашем случае

$$R_1 = \frac{l}{2}, \quad y_1 = z - \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

$$R_2 = l, \quad y_2 = \sqrt{3}l - z$$

Вклад в осевую напряжённость от оснований:

$$E^{bases}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{\sqrt{3}l - z}{\sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}} - \frac{z - \frac{\sqrt{3}}{2}l}{\sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2}} \right)$$

Тогда из условия

$$E^{bases}(z'_0) = 0$$

имеем единственный корень

$$z'_0 = z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}l$$

Поскольку  $E^{sides}(z_0) = E^{bases}(z_0) = 0$ ,  $z_0$  — искомое положение равновесия.

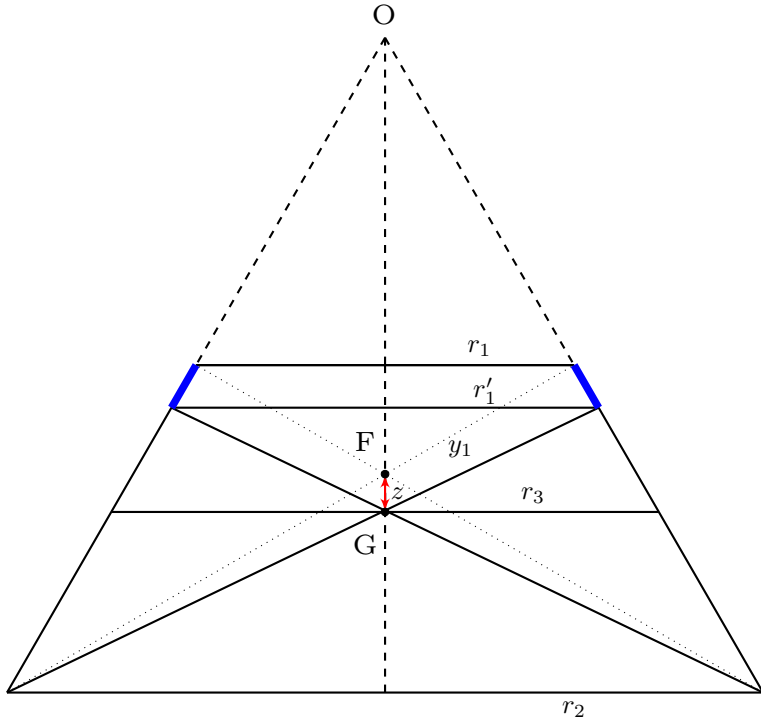
$$\text{OF} = \frac{2\sqrt{3}}{3} l$$

### 3. Первый способ:

Пусть пробный заряд смещён относительно положения равновесия F на расстояние  $z$  в точку G,  $z \ll l$ .

Рассчитаем вклад в напряжённость  $E_G$  в точке G от боковой поверхности конуса.

Отрежем от трапеции верхушку так, чтобы точка G была точкой равновесия для получившейся новой трапеции. Тогда на пробный заряд будет действовать



сила со стороны отрезанного кольца (на рисунке обозначенном синим цветом), эта сила будет возвращающей. Значит, положение равновесия устойчивое.

$$OG - OF = z$$

$$r_3 = OG \operatorname{tg}(\alpha) \quad r = OF \operatorname{tg}(\alpha)$$

Используя (\*), можно записать

$$r_3 = \frac{2r'_1 r_2}{r'_1 + r_2}$$

Откуда

$$r'_1 = \frac{r_2 r_3}{2r_2 - r_3}$$

$$\Delta r_1 = r'_1 - r_1$$

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta r_1}{\sin \alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{4} z$$



$$\Delta E_G^{side} = \frac{k\lambda(x)\Delta x_1}{y_1^2} \cos 60^\circ = \frac{kA\Delta x_1}{4y_1^2} \Delta\beta$$

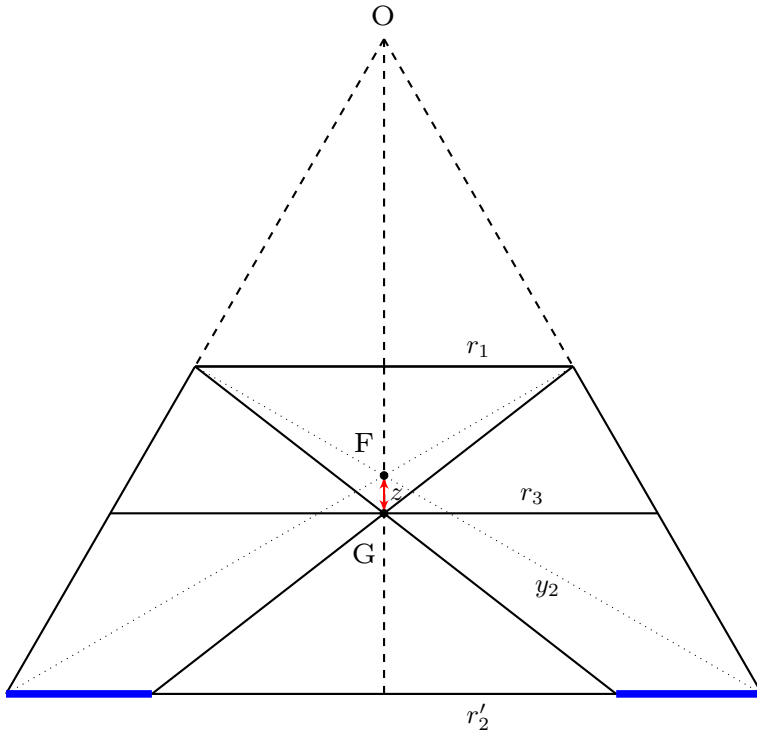
Где

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

Просуммируем  $\Delta\beta$  от 0 до  $2\pi$

$$E_G^{side} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{A}{\varepsilon_0 l^2} z$$

Рассчитаем вклад в напряжённость  $E_G$  в точке G от оснований конуса. Воспользуемся упомянутой в первом пункте теоремой. Тогда нескомпенсированный заряд расположен в форме кольца (на рисунке обозначенном синим цветом) в нижнем основании усечённого конуса.



Из подобия треугольников,

$$\frac{r_2'}{OH_2 - (OF + z)} = \frac{r_1}{OF + z - OH_1}$$

При этом:

$$OH_1 = l \cos \alpha, \quad OH_2 = 2l \cos \alpha$$

$$\Delta r_2 = r_2 - r'_2$$

$$\Delta E_G^{bases} = k \frac{2\pi r_2 \Delta r_2 \sigma}{y_2^2} \cos 60^\circ$$

Где

$$y_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} l$$

Тогда для вклада в напряжённость в G от оснований имеем

$$E_G^{bases} = -\frac{9\sqrt{3}}{16} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 l} z.$$

Окончательно, уравнение движения пробного заряда по оси принимает вид

$$\ddot{z} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{q}{m\varepsilon_0 l} \left( \frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right) z = 0.$$

Откуда ясно, что положение равновесия устойчивое в случае

$$\sigma_0 < \frac{A}{2l}$$

а период колебаний

$$T = \frac{8\pi}{3} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m\varepsilon_0 l}{q} \left( \frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right)^{-1}}$$

**Второй способ:**

Пусть

$$z = z_0 + z, \quad z \ll l$$

Принимая во внимание

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \quad x \ll 1$$

Получим

$$E^{sides}(z_0 + z) \approx \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{A}{\varepsilon_0 l^2} z$$

Продельвая то же самое для оснований получим

$$E^{bases}(z_0 + z) \approx -\frac{9\sqrt{3}}{16} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 l} z$$

Окончательно, уравнение движения пробного заряда по оси принимает вид

$$\ddot{z} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{q}{m\varepsilon_0 l} \left( \frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right) z = 0$$

Откуда ясно, что положение равновесия устойчивое в случае

$$\sigma_0 < \frac{A}{2l}$$

а период колебаний

$$T = \frac{8\pi}{3} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m\varepsilon_0 l}{q} \left( \frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right)^{-1}}$$

#### Задача №11-Т4. Рамка и провод

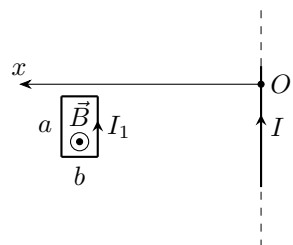
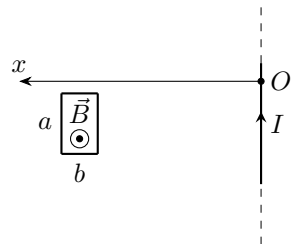
Пусть сторона рамки, параллельная проводу, равна  $a$ , а перпендикулярная ей сторона равна  $b$ . Введём ось  $Ox$  с началом на проводе перпендикулярно ему в направлении к рамке (см. рис. 1). Далее величина  $x$  везде обозначает расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки, которое изначально равнялось  $x_0$ . Пусть сила тока в проводе равна  $I$ . Тогда индукция создаваемого магнитного поля провода на расстоянии  $r$  от него направлена перпендикулярно горизонтальной поверхности на читателя и равна:

$$B(I, r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Пусть  $I_1$  – величина силы тока в рамке в направлении против часовой стрелки при виде сверху. Равнодействующая сил Ампера, действующих на контур, составляет:

$$F_x = I_1 a B(I, x + b) - I_1 a B(I, x).$$



Поскольку рамка выполнена из тонкой проволоки, а величины  $a$  и  $b$  во много раз меньше  $x_0$ , то выражение для  $F_x$  можно приблизить следующим образом:

$$F_x \approx \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) b = -\frac{\mu_0 I_1 I a b}{2\pi x^2}.$$

Пусть  $R$  – сопротивление рамки, а  $\Phi$  – поток индукции магнитного поля, пронизывающего рамку. Поскольку индуктивностью рамки можно пренебречь, для силы тока  $I_1$  из закона электромагнитной индукции Фарадея находим:

$$I_1 = -\frac{\dot{\Phi}}{R}.$$

Поскольку рамка выполнена из тонкой проволоки, а величины  $a$  и  $b$  во много раз меньше  $x_0$ , то индукцию магнитного поля провода можно считать постоянной по всей поверхности, натянутой на контур рамки, и равной  $B(x)$ , поэтому  $\Phi \approx B(x)ab$ . Тогда имеем:

$$I_1 = -\frac{abdB(x)}{R} \frac{d}{dt} = -\frac{\mu_0 ab}{2\pi R} \frac{d}{dt} \left( \frac{I}{x} \right),$$

откуда:

$$F_x = \left( \frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I}{Rx^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{I}{x} \right)$$

Рассмотрим увеличение силы тока в проводе. Поскольку это увеличение происходит очень быстро, движением рамки и её смещением за время увеличения силы в проводе до максимального значения можно пренебречь. Тогда для силы  $F_x$  имеем:

$$F_x \approx \left( \frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I}{Rx^3} \frac{dI}{dt}.$$

Пусть  $m$  и  $v_x$  – масса рамки и проекция её скорости на ось  $x$  соответственно. Из закона изменения импульса для рамки имеем:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \left( \frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I}{Rx^3} \frac{dI}{dt}.$$

Умножим закон изменения импульса для рамки на  $dt$ :

$$mdv_x = \left( \frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{IdI}{Rx^3}.$$

Проинтегрируем полученное выражение, обозначив за  $I_0$  максимальную величину силы тока в проводе:

$$\int_0^{v_0} m dv_x = mv_0 = \int_0^{I_0} \left( \frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{IdI}{Rx_0^3} = \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2Rx_0^3}.$$

Отметим, что рамка начинает удаляться от провода после достижения в нём максимального значения силы тока.

Проанализируем дальнейшее движение рамки. Для этого получим выражение для силы  $F_x$  при постоянном значении силы тока в проводе  $I = I_0$ :

$$F_x = \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{Rx^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = - \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{Rx^4} \frac{dx}{dt}.$$

Запишем закон изменения импульса для рамки:

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{Rx^4} \frac{dx}{dt}$$

Умножим закон изменения импульса для рамки на  $dt$ :

$$m dv_x = - \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{dx}{Rx^4}.$$

Проинтегрируем полученное выражение в предположении, что рамка удаляется бесконечно далеко от провода, обозначив за  $v_{1x}$  проекцию скорости рамки на ось  $x$  на бесконечном удалении от провода. Поскольку скорость рамки уменьшается, предположение окажется оправданным в том случае, если величина  $v_{1x}$  окажется положительной. Имеем:

$$m(v_{1x} - v_0) = - \frac{1}{R} \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = - \frac{1}{3Rx_0^3} \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 = - \frac{2mv_0}{3}.$$

Отсюда:

$$v_{1x} = \frac{v_0}{3}$$

Поскольку  $v_{1x} > 0$ , рамка в процессе движения после достижения силой тока в проводе максимального значения никогда не останавливалась, а значит, полученное значение является ответом на вопрос задачи. Если бы величина  $v_{1x}$  оказалась

отрицательной, то скорость рамки и расстояние между рамкой и проводом асимптотически стремились бы к нулю и к постоянному значению соответственно. Таким образом:

$$v_1 = \frac{v_0}{3}$$

### Задача №11-Т5. Неоднородность в призме

1. Поскольку пучок света направлен по нормали к грани призмы, на которую он падает, на входе в призму пучок не преломляется. Исследуем траектории лучей внутри призмы. Пусть  $\varphi$  – угол между направлением распространения луча и осью  $y$ , а  $x_0$  – координата точки входа луча в призму. При этом угол падения на границу раздела сред равен  $90 - \varphi$ , поэтому из закона Снелла следует:

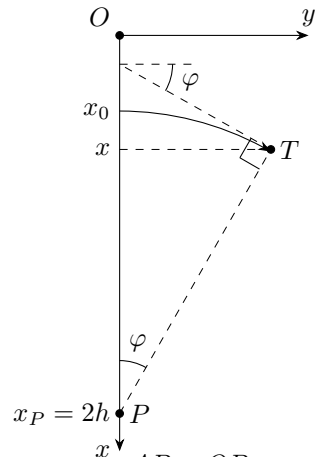
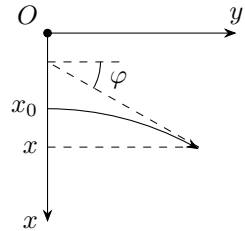
$$n \cos \varphi = \frac{3 \cos \varphi}{2 - \frac{x}{h}} = \frac{3}{2 - \frac{x_0}{h}} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{2h - x}{2h - x_0}.$$

#### Первое решение:

Обратим внимание на соотношение:

$$\frac{2h - x}{\cos \varphi} = 2h - x_0 = \text{const}.$$

Проведём через некоторую точку  $T$  траектории луча линию, перпендикулярную направлению его распространения до точки  $P$  такой, что  $x_P = 2h$ . Обратим внимание, что расстояние между точками  $P$  и  $T$  является постоянной величиной, равной  $2h - x_0$ . Поскольку свет распространяется в направлении, перпендикулярном  $PT$ , а  $PT = 2h - x_0 = \text{const}$  и  $x_P = 2h = \text{const}$  – положение точки  $P$  является постоянным, поскольку её смещение должно быть одновременно перпендикулярно  $PT$  и оси  $x$ , что невозможно. Значит, траектория луча света до попадания на стороны  $AB$  и  $OB$  сечения призмы представляет собой окружность с центром в точке  $P$ . Обратим внимание, что сразу после преломления все лучи света распространяются вдоль оси  $y$ , а значит для каждого луча центр окружности лежит в точке  $P$  такой, что  $x_P = 2h$  и  $y_P = 0$ . Окончательно:



$$y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2.$$

**Второе решение:**

Продифференцируем выражение, полученное из закона Снелла:

$$dx = (2h - x_0) \sin \varphi d\varphi.$$

Изменения координат  $dx$  и  $dy$  можно связать с помощью угла  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{dy}.$$

Найдём изменение  $dy$  координаты  $y$  при изменении угла  $\varphi$  на величину  $d\varphi$ :

$$dy = dx \operatorname{ctg} \varphi = (2h - x_0) \operatorname{ctg} \varphi \sin \varphi d\varphi = (2h - x_0) \cos \varphi d\varphi.$$

Величине  $y = 0$  соответствует  $\varphi = 0$ . Тогда получим:

$$y(\varphi) = (2h - x_0) \int_0^{\varphi} \cos \varphi d\varphi = (2h - x_0) \sin \varphi.$$

Теперь получим выражение, связывающее  $y$  и  $x$ :

$$1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \left( \frac{y}{2h - x_0} \right)^2 + \left( \frac{x - 2h}{2h - x_0} \right)^2,$$

откуда:

$$y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2.$$

**Третье решение:**

Получим зависимость  $y(x)$  для траектории луча света. Для этого избавимся от угла  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{dy}.$$

Поскольку  $\varphi > 0$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \sqrt{\left( \frac{2h - x_0}{2h - x} \right)^2 - 1} = \frac{dx}{dy}.$$

Учитывая, что  $2h > x$ , получим:

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{(2h-x)dx}{\sqrt{(2h-x_0)^2 - (2h-x)^2}} = \int_{2h-x_0}^{2h-x} \frac{x'dx'}{\sqrt{(2h-x_0)^2 - x'^2}}.$$

Отсюда:

$$y(x) = \sqrt{(2h-x_0)^2 - (2h-x)^2} \Rightarrow y^2 + (x-2h)^2 = (2h-x_0)^2.$$

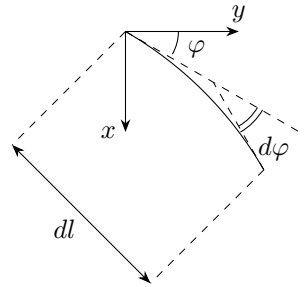
**Четвёртое решение:**

Для радиуса кривизны  $\rho$  траектории луча имеем:

$$\rho = \frac{dl}{d\varphi},$$

где  $dl$  – элемент пути, пройденного лучом. Но  $dl = dx / \sin \varphi$ , откуда:

$$\rho = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{dx}{d\varphi} = -\frac{dx}{d \cos \varphi}.$$



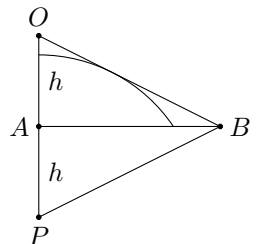
Продифференцируем выражение, полученное из закона Снелла:

$$-\frac{dx}{d \cos \varphi} = 2h - x_0 = \rho = const.$$

Таким образом, радиус кривизны траектории каждого луча остаётся постоянным, т.е траектория луча света до попадания на стороны  $AB$  и  $OB$  сечения призмы представляет собой дугу окружности радиусом  $2h - x_0$ . Обратим внимание, что сразу после преломления все лучи света распространяются вдоль оси  $y$ , а значит для каждого луча центр окружности лежит в точке  $P$  такой, что  $x_P = 2h - x_0 + x_0 = 2h$  и  $y_P = 0$ . Окончательно:

$$y^2 + (x-2h)^2 = (2h-x_0)^2.$$

2. Из решения первого пункта следует, что траектория любого луча внутри призмы до попадания на  $AB$  и  $OB$  сечения призмы являются дугами окружностей, лежащими в плоскости рисунка, а центры этих окружности расположены в точке  $P$  такой, что  $x_P = 2h$ , а  $y_P = 0$ . Обратим внимание, что радиус окружности уменьшается с увеличением координаты





$x_0$ . Расстояние от точки  $P$  до точки пересечения дуг окружности с  $OB$  уменьшается вплоть до момента, пока дуга окружности не коснётся рассматриваемой грани. При дальнейшем увеличении координаты  $x_0$  дуги окружности не будут пересекать  $OB$ . Таким образом, лучи достигнут всех точек  $OB$  при условии отсутствия точек касания с дугами окружностей, а значит угол  $\angle PBO$  не должен быть острым. Поскольку треугольник  $OPB$  является равнобедренным, имеем:

$$\angle PBO = 180^\circ - 2\alpha \geq 90^\circ,$$

откуда:

$$\alpha \leq 45^\circ.$$

3. Обратим внимание, что при увеличении координаты  $x_0$  угол падения лучей на  $OB$  будет увеличиваться, как и показатель преломления вещества призмы. Тогда условие, при котором все лучи, достигнувшие  $OB$ , попадают в воздух состоит в том, что лучи, достигнувшие её вблизи точки  $B$ , не испытают полного отражения. Поскольку исходно такие лучи падают под углом  $\alpha$  к  $OB$  и поворачивают на угол  $\alpha$  при движении по дуге окружности – угол падения луча в момент достижения  $OB$  равен  $2\alpha$ . Тогда имеем:

$$n(h) \sin 2\alpha = 3 \sin 2\alpha \leq 1,$$

откуда:

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} \approx 9.74^\circ.$$

