

11 класс

Первый день

- 11.1. В пространстве расположен бесконечный цилиндр (т.е. геометрическое место точек, удалённых от данной прямой ℓ на данное расстояние $R > 0$). Могут ли шесть прямых, содержащих рёбра некоторого тетраэдра, иметь ровно по одной общей точке с этим цилиндром?
- 11.2. Тройку положительных чисел (a, b, c) назовём *загадочной*, если

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2c^2} + 2ab} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2a^2} + 2bc} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca} = 2(a + b + c).$$

Докажите, что если тройка (a, b, c) — загадочная, то тройка (c, b, a) — тоже загадочная.

- 11.3. Юрий подошёл к великой таблице маяя. В таблице 200 столбцов и 2^{200} строк. Юрий знает, что в каждой клетке таблицы изображено солнце или луна, и любые две строки отличаются (хотя бы в одном столбце). Каждая клетка таблицы закрыта листом. Поднялся ветер и сдул некоторые листы: по два листа с каждой строки. Могло ли так случиться, что теперь Юрий хотя бы про 10 000 строк может узнать, что в них изображено в каждом из столбцов?
- 11.4. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность ω . Через вершину A проведена прямая $\ell_a \parallel BC$, через вершину B — прямая $\ell_b \parallel CD$, через вершину C — прямая $\ell_c \parallel DA$, через вершину D — прямая $\ell_d \parallel AB$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на этих четырёх прямых (именно в этом порядке), вписан в окружность γ . Окружности ω и γ пересекаются в точках E и F . Докажите, что прямые AC , BD и EF пересекаются в одной точке.