Материалы для проведения заключительного этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Первый день

Нижний Новгород,
19–25 апреля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, Н. Ю. Власова, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

А также: М. А. Дидин, И. А. Ефремов, К. А. Кноп, П. Ю. Козлов, Т. С. Коротченко, А. Д. Терёшин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, А. И. Храбров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

10 класс

10.1. Пусть p и q — различные простые числа. Дана бесконечная убывающая арифметическая прогрессия, в которой встречается каждое из чисел p^{23}, p^{24}, q^{23} и q^{24}. Докажите, что в этой прогрессии обязательно встретятся числа p и q.

(*А. Кузнецов, методкомиссия*)

Решение. Вычеркнем все нецелые числа из прогрессии (если они есть). Ясно, что после вычёркивания остаётся бесконечная убывающая арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел. Пусть её разность равна $-d$.

Заметим, что $q^{23}-p^{23}$ делится на d, значит, d не делится на p, иначе q^{23} должно будет делиться на p, что неверно. С другой стороны, d должно являться делителем числа $p^{24}-p^{23}=p^{23}(p-1)$. Поскольку p и d взаимно просты, $p-1$ делится на d. Далее, $p^{23}-p$ делится на $p-1$ (поскольку оно равно $p(p-1)(p^{21}+p^{20}+\ldots+1)$). Поэтому $p^{23}-p$ делится на d, и, поскольку $p<p^{23}$, получаем, что p лежит в нашей прогрессии. Аналогично, q лежит в этой прогрессии.

10.2. Дано нечётное число $n \geqslant 3$. В клетчатом квадрате $2n \times 2n$ закрашивают $2(n-1)^2$ клеток. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно гарантированно вырезать из незакрашенной клетчатой фигуры? (*Г. Шарафетдинова*)

Ответ. $2n-1$.

Решение. *Оценка.* Разобьём квадрат $2n \times 2n$ на n^2 квадратиков 2×2.

Среди этих квадратиков не более $2(n-1)^2/2=(n-1)^2$ квадратиков, в которых покрашено хотя бы 2 клетки. Остальных квадратиков 2×2 — не менее $n^2-(n-1)^2=2n-1$ штук. Из каждого из них можно вырезать трёхклеточный уголок.

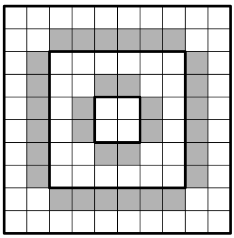

Рис. 2

Пример. Построим пример индукцией по нечётным $n \geqslant 1$. При $n=1$ закрашенных клеток нет, и можно вырезать один уголок.

Для перехода выделим в квадрате внешнюю «рамку» шириной в две клетки. В этой рамке закрасим все $8(n-2)$ клетки, примыкающие к внутренней границе рамки (см. рис. 2), а в квадрате внутри рамки закрасим клетки по предположению индукции. Общее количество закрашенных клеток равно $2(n-3)^2+8(n-2)=2(n-1)^2$.

Осталось понять, сколько уголков можно вырезать в этом примере. Любой уголок из непокрашенных клеток целиком лежит либо в рамке, либо во внутреннем квадрате (таких по предположению $2(n-2)-1=2n-5$). Из рамки же нельзя вырезать более 4 уголков — каждый такой уголок должен содержать хотя бы 2 клетки одного из угловых квадратов 2×2, а двух уголков, пересекающихся с одним квадратом, вырезать нельзя. Значит, общее количество уголков не больше $(2n-5)+4=2n-1$.

10.3. Дано натуральное число n. Илья задумал пару различных многочленов степени n (с вещественными коэффициентами), аналогично Саша задумал пару различных многочленов степени n. Лёня знает n; его цель — выяснить, одинаковые ли пары многочленов у Ильи и Саши. Лёня выбирает набор из k вещественных чисел $x_1<x_2<\ldots<x_k$ и сообщает эти числа. В ответ Илья заполняет таблицу $2\times k$: для каждого $i=1,2,\ldots,k$ он вписывает в две клетки i-го столбца пару чисел $P(x_i)$, $Q(x_i)$ (в любом из двух возможных порядков), где P и Q — задуманные им многочлены. Аналогичную таблицу заполняет Саша. При каком наименьшем k Лёня сможет (глядя на таблицы) наверняка добиться цели? (*Л. Шатунов*)

Ответ. $2n+1$.

Решение. Покажем, что при $k=2n$ (а тем более при $k<2n$) Лёня не сможет однозначно определить определить пару P, Q. Пусть он назвал $x_1<x_2<\ldots<x_{2n}$. Положим $A=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, $B=(x-x_{n+1})(x-x_{n+2})\ldots(x-x_{2n})$, так что $A(x_i)=0$ для $i=1,2,\ldots,n$ и $B(x_i)=0$ для $i=n+1,n+2,\ldots,2n$. Тогда если Илья загадал $P_1=A+2B$ и $Q_1=-A-2B$, то в i-м столбце таблицы будут числа $\pm 2B(x_i)$ при $i=1,2,\ldots,n$ и числа $\pm A(x_i)$ при $i=n+1,n+2,\ldots,2n$. Но та же таблица годится для пары $P_2=A-2B$ и $Q_2=-A+2B$, её мог загадать Саша.

С другой стороны, покажем, что при $k=2n+1$ таблице

Ильи может удовлетворять не более одной пары многочленов P, Q. Предположим противное, и есть две такие пары: P_1, Q_1 и P_2, Q_2. Тогда P_2 совпадает с P_1 или Q_1 хотя бы при $n+1$ различных значениях аргумента, пусть, скажем, с P_1. Но тогда P_1 и P_2 — одинаковые многочлены (поскольку их разность — многочлен степени не выше n, имеющий не менее $n+1$ различных корней). Из таблицы тогда получаем, что значения Q_1 и Q_2 совпадают в $2n+1$ точке, а тогда и $Q_1 = Q_2$.

10.4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle D = 90^\circ$, его диагонали пересекаются в точке E. Прямая ℓ пересекает отрезки AB, CD, AE и ED в точках X, Y, Z и T соответственно. Известно, что $AZ = CE$ и $BE = DT$. Докажите, что длина отрезка XY не больше диаметра описанной окружности треугольника ETZ. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим через ω окружность (ETZ) и через d — её диаметр. Поскольку $BE = DT$, то $BT = BE + ET = DT + ET = DE$. Из условия $\angle A + \angle D = 90^\circ$ следует, что лучи AB и DC пересекаются в некоторой точке F под прямым углом (см. рис. 3). Проведем диаметр EB' в окружности (ABE). Поскольку $\angle ABE > 90^\circ$, точки идут на окружности в порядке $A - B - E - B'$. Тогда $\angle AB'B = \angle AEB = \angle CED$ и $\angle BAB' = 90^\circ + \angle FAC = \angle ECD$. Следовательно, треугольники CED и $AB'B$ подобны по двум углам, поэтому $\frac{AB'}{BB'} = \frac{CE}{ED} = \frac{AZ}{BT}$. Полученное равенство означает, что прямоугольные треугольники $AB'Z$ и $BB'T$ подобны по отношению катетов. Тогда $\angle BTB' = \angle AZB'$, поэтому точка B' лежит на окружности ω. Заметим, что AB — прямая Симсона точки B' для треугольника ZET, поскольку $\angle B'AE = \angle B'BE = 90^\circ$. Тогда и проекция B' на прямую ZT тоже лежит на AB, то есть $B'X \perp ZT$.

Рассуждая аналогично, мы получаем, что точка C', диаметрально противоположная E на окружности (CED), лежит на окружности ω, а также $C'Y \perp ZT$. Таким образом, $B'C'$ — хорда окружности ω, а X и Y — проекции точек B' и C' на прямую ZT, поэтому $XY \leqslant B'C' \leqslant d$, что и требовалось.

Замечание 1. На самом деле $B'C'$ — диаметр окружности (ETZ), что нетрудно установить счётом углов, но для решения

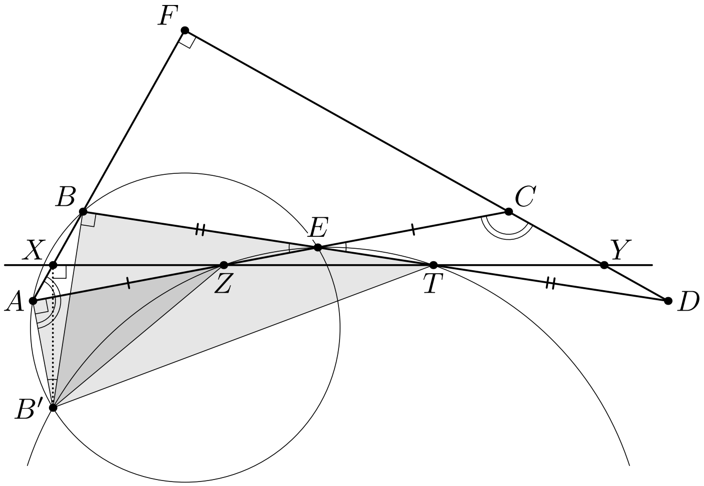

Рис. 3

этого не требуется. Равенство $XY = d$ достигается в том и только в том случае, когда исходный четырёхугольник — вписанный.

Замечание 2. Приведём план другого подхода к задаче. Используем обозначения из приведённого выше решения, а также введём новые: $x = BF$, $y = AB$, $z = CF$, $t = DC$, $k = \frac{DE}{EB}$, $m = \frac{AE}{FC}$, $p = ZT$, $\alpha = \angle AED$. Из теорем Менелая для $\triangle EZT$ и прямой AYB; $\triangle EZT$ и прямой CYD находим: $XZ = YT = p \cdot \frac{1}{kl-1}$. По теореме синусов для треугольника ZET: $d = \frac{p}{\sin\alpha}$, в силу сказанного выше $XY = XZ+YZ+ZT = p\cdot\frac{kl+1}{kl-1}$. Таким образом, достаточно доказать, что $\sin\alpha \leqslant \frac{kl-1}{kl+1}$ $(\star)$. Из теорем Менелая для $\triangle AFC$ и прямой BED; $\triangle BFD$ и прямой AEC легко видеть, что $k = \frac{t(x+y)}{zy}$, $l = \frac{y(z+t)}{xt}$, отсюда $kl = \frac{(x+y)(z+t)}{xz}$ и $\frac{kl-1}{kl+1} = \frac{(x+y)(z+t)-xz}{(x+y)(z+t)+xz}$.

Обозначим $\angle FAC = \beta$, $\angle FDB = \gamma$, тогда $\alpha = 90^\circ + \beta + \gamma$. Значит, $\sin\alpha = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta = \frac{(x+y)(z+t)-xz}{\sqrt{(x^2+(z+t)^2)(z^2+(y+t)^2)}}$, последнее равенство получается из прямоугольных треугольников AFC и BFD. Остаётся заметить, что $\sqrt{(x^2+(z+t)^2)(z^2+(y+t)^2)} \geqslant xz+(z+t)(y+t)$ по неравенству Коши-Буняковского-Шварца, получаем в точности требуемое неравенство $(\star)$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ 10 КЛАССА		
ЗАДАЧА	**КРИТЕРИЙ**	**БАЛЛ**
10.1	Проблемы со знаком разности прогрессии, не влияющие на решение	Баллы не снимаются
10.1	Без обоснования считается, что разность прогрессии целая	Баллы не снимаются
10.1	Доказано, что разность прогрессии рациональна, или задача сведена к целой разности прогрессии	Баллы не добавляются
10.1	Неверно доказана делимость p-1 на d, и из этого верно выведено утв. задачи	Баллы не добавляются
10.1	В предположении p>q доказано, что в прогрессии встречается p; второе утверждение не доказано	2
10.2	Только полная оценка	**2**
10.2	Только полный пример с обоснованием	**4**
10.2	Отмечено, что в 2x2 должно быть минимум 2 закрашенных клетки, чтобы нельзя было выделить уголок, и есть идея разбиения на непересекающиеся квадраты 2x2, других продвижений нет	1
10.2	В обосновании в целом верного примера используются неверные утверждения.	Штраф 1 балл
10.3	только доказательство достаточности n=2k+1	2
10.3	Утверждается, что для построения примера в случае k=2n достаточно найти пары многочленов (P_1, Q_1) и (P_2,Q_2) такие, что P_1(t)=P_2(t) для n данных точек и P_1(t)=Q_2(t) для n оставшихся точек, других продвижений нет	0 баллов за эту часть
10.3	Замечено только, что можно рассматривать только k=2n (а не k=< 2n)	0 баллов за эту часть
10.3	Обсужден только случай k=2n, случай k<2n не рассмотрен	баллы не снимались
10.3	разбор конкретных значений n	0
10.3	В примере для k=2n некоторые многочлены имеют степень меньше n	снимается 1 балл
10.4	Начальные продвижения, включая достроение до прямоугольного AFB, построение центра (EZT) и понимание, что он на серпере к BD, и т.д.	0
10.4	Огрублено XY<AD	0
10.4	Разные переформулировки, в том числе в терминах прямоугольной гиперболы	0
10.4	Доказано, что XZ = TY (только написанные теоремы Менелая без выводов -- не достаточно для получения балла)	1
10.4	Недоведенный счет (координаты и т.д)	0
10.5	Далее обозначено: Пусть длины прыжков a_0=eps, a_1, ..., a_7 (обычно a_0=eps -- другое по сути число).	
10.5	В работе имеется идея кратного увеличения длин прыжков a_1, a_2, ..., a_7 (например, степени двойки)	1 балл
10.5	В работе имеется идея взять одним из прыжков число меньше 1 (a_0= eps), с помощью которого <<допрыгивать до края дощечки>>.	1 балл
10.5	В работе считается, что длины отрезков --- целые числа	не более 1 балла
10.5	В работе не появляются конкретные неравенства на a_0= eps (например, в работе вместо неравенств написано <<достаточно маленькое>>, <<бесконечно маленькое>>, <<очень маленькое, например, 10^{-100}>> и т.п.)	не более 2 баллов
10.5	Выбирается наибольшее a_i<C и в качестве нужного прыжка берётся a_{i+1}, при этом множество a_i<C может быть пусто.	снимается не менее 1 балла
10.5	В работе верно сформулировано неравенство, которое надо проверить, однако проверка этого неравенства или неверна, или отсутствует	снимается не менее 2 баллов

10.5	В работе a_{i+1} выбирается по ходу выполнения алгоритма как сумма двух длин соседних отрезков, когда a_i уже не хватает. При этом утверждается, что a_{i+1} >= 2a_i. В некоторых работах это неравенство неверно.	снимается не менее 3 баллов
10.6	Только счет углов и переформулировки в терминах углов (в частности, посчитан угол EMF, или если задача сведена к равенству угла EBF и угла 360-2D), достраивание конструкции до "трезубца" и пр.	баллы не добавляются
10.6	(A) Рассмотрение E'B'F' (как в решении A) и сведение задачи к нахождению угла E'B'F' (только переформулировки после гомотетии с центром D не достаточно) (критерий не суммируется с другими)	2 балла
10.6	(B1) задача сведена к изогональности BE и BF отн. ABC (или к эквивалентному равенству углов)	1 балл
10.6	(B1') задача сведена к подобию ABE и CBF(явно указано, что нам нужно подобие, или отношение/произведение соответствующих сторон) (не суммируется с (B1))	2 балла
	(B2) Доказано AE AD = CF CD	1 балл
10.6	(B2') Доказано подобие ABE и CBF (не суммируется с (B2))	2 балла
10.6	Не рассмотрено различное расположение точек, не влияющее на ход решения	не снимаем
10.6	незавершенный счет (в синусах, комплексных, недостаточно положений в "методе движения точек" и пр.)	0
10.7	Введение графа, доказательство ацикличности, структура графа	0
10.7	Оценено количество рёбер	0
10.7	"Причёсывание" задачи: выкидывание изолированных отрезков, продление отрезков и тд	0
10.7	Недоведённый подсчёт всех пар подмножеств из x_1 и x_2 отрезков	0
10.7	Разборы частных случаев: x_1=1, чередуются цвета отрезков, одновременно y_1 >= 2x_1 и y_2 >= 2x_2 и другие	0
10.7	Доказано только, что каждую пару белых отрезков пересекает не более чем один чёрный отрезок	0
10.7	Равносильные преобразования доказываемого неравенства	0
10.7	Рассмотрены циклические сдвиги по x_1 отрезку, недоведённая попытка двойного подсчёта	1
10.8	Сведение задачи к получению всех нечётных чисел	0
10.8	Сведение задачи к случаю, когда суммы соседних чисел не степени 2	0
10.8	Доказано, что можно получить следующую ситуацию: по кругу стоят только двойки и нечетные числа из некоторого отрезка, в котором нет степеней двойки, а также сумма никаких двух чисел не равна степени двойки.	3