

10 класс

Второй день

10.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \dots, n$. Существует ли такое натуральное число m , что $S_{m+1} = 4S_m$?

10.7. Петя взял некоторые трёхзначные натуральные числа a_0, a_1, \dots, a_9 и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень.

10.8. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . На стороне AB выбрана точка L так, что $AL = CK$. Отрезки AK и CL пересекаются в точке M . На продолжении отрезка AD за точку D отмечена точка N . Известно, что четырёхугольник $ALMN$ — вписанный. Докажите, что $\angle CNL = 90^\circ$.

10.9. Дано натуральное число k . Вдоль дороги стоят n столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в k цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем n так могло оказаться?

10.10. Докажите, что для любых трёх положительных вещественных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} + (y-z)\sqrt{3y^2+z^2} + (z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geq 0.$$